

Números enteros y fracciones

1



PUNTO DE PARTIDA



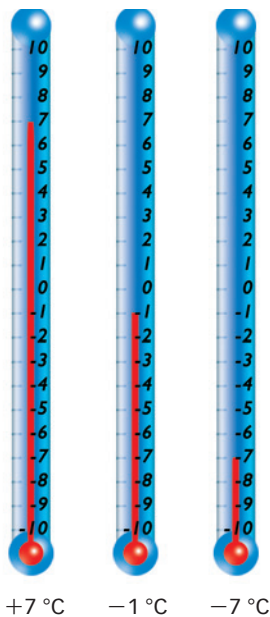
En el mundo occidental, el nacimiento de Jesucristo marca el punto de partida de la medición del tiempo en años. Sin embargo, para otras culturas, el inicio de sus calendarios se estableció según otros acontecimientos históricos.

Como puedes ver, en la tabla se refleja el inicio de los calendarios para las culturas china, hebrea y árabe, si bien en la actualidad la mayoría de las civilizaciones han adoptado la fórmula occidental.

¿Cuántos años transcurrieron entre el comienzo del calendario hebreo y el chino? ¿En qué año estamos según el calendario árabe?

Hebreo	3671 a.C.
Chino	2967 a.C.
Occidental	0
Árabe	622 d.C.

1 Números enteros



Los **números enteros** expresan cantidades positivas y negativas. Para ello, escribimos los números naturales con un signo $+$ o $-$.

Si quitamos el signo de un número entero a , obtenemos el **valor absoluto** de este número, que se representa $|a|$.

EJEMPLOS

1. Cuando Daniel se subió al avión en Vigo, el termómetro marcaba $+7\text{ }^{\circ}\text{C}$. Al llegar a Berna, la temperatura era de $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$, y cuando aterrizó en Copenhague había $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ordena las temperaturas de menor a mayor y halla sus valores absolutos.

- Los números negativos son siempre menores que los positivos.
- El número 0 es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquiera positivo.
- Al comparar dos números positivos, es mayor el de mayor valor absoluto.
- Si comparamos dos números negativos, es mayor el de menor valor absoluto.

Los valores absolutos de las tres temperaturas son:

$$|+7| = 7 \quad |-1| = 1 \quad |-7| = 7$$

La mayor de las tres es la temperatura positiva, $+7\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Entre los valores negativos -1 y -7 , es mayor -1 , ya que su valor absoluto es menor. Por tanto, el orden de menor a mayor será:

$$-7 < -1 < +7.$$

Los enteros -7 y $+7$ son **números opuestos**, ya que tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo.

2. Representa las temperaturas de las ciudades del ejemplo anterior en una recta.

Los números enteros se representan en una recta. A la izquierda del 0 se representan los números enteros negativos, y a su derecha, los números positivos.



ACTIVIDADES

1. Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros.

- a) $-8, 3, 10$ c) $0, 14, -4$
b) $-15, -2, -6$ d) $1, -5, -11$

2. Representa los números anteriores en diferentes rectas numéricas.

3. Escribe un número negativo que tenga un valor absoluto menor que 4.

4. Escribe un número entero que tenga un opuesto mayor que -5 .

5. ¿Cuáles de los números enteros coinciden con su opuesto?

2

Suma y resta de números enteros

Para **sumar números enteros**:

- Si los números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo.
- Si tienen distinto signo, se restan sus valores absolutos y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto.

Para **restar números enteros** se suma al primero el opuesto del segundo.

EJEMPLOS

3. Carla ha recibido un extracto del banco donde pone que tenía +250 € hace 10 días. Después, ha pagado un recibo y ha cobrado su sueldo, movimientos reflejados en el extracto como -485 € y +900 €.

a) ¿Cuál es su saldo ahora?

Sumamos las cantidades con su signo, a partir de los 250 € iniciales.

$$\begin{array}{lcl}
 (+250) + (-485) = -235 & & (-235) + (+900) = +665 \\
 \underbrace{485 - 250 = 235} & & \underbrace{900 - 235 = 665}
 \end{array}$$

El saldo actual es de +665 €.

b) Si quiere sacar 800 €, ¿tendrá dinero suficiente?

$$\begin{array}{lcl}
 (+665) - (+800) = (+665) + (-800) = -135 \\
 \underbrace{\quad \quad \quad} & \xrightarrow{\text{opuesto}} & -800
 \end{array}$$

Si sacase 800 € debería al banco 135 €, luego no tendrá dinero suficiente.

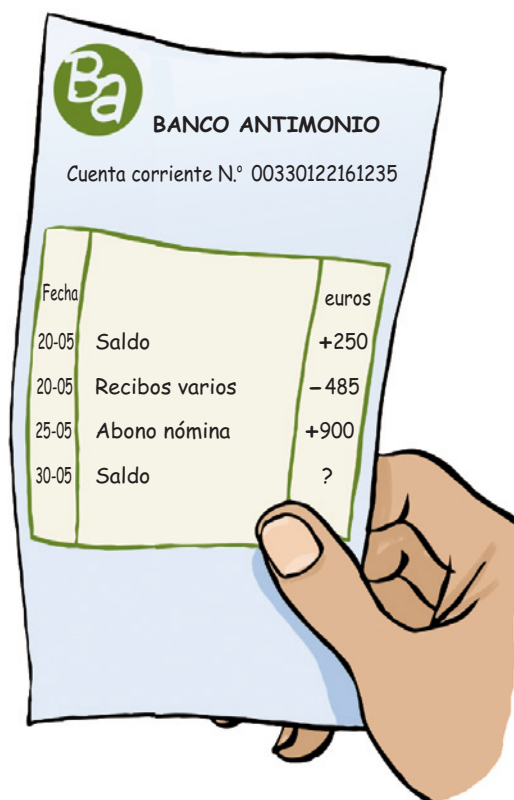
4. Calcula el resultado de las siguientes operaciones.

a) $(+12) - (-7) - (+10)$

Para realizar sumas y restas combinadas usamos la regla de los signos.

$$\begin{array}{lcl}
 (+12) - (-7) - (+10) = +12 + 7 - 10 = 9 \\
 \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad} & \underbrace{\quad \quad \quad}
 \end{array}$$

b) $(+10) + (-2) - (+3) - (+5) = +10 - 2 - 3 - 5 = 0$



Regla de los signos

$$\begin{array}{lcl}
 + \cdot + & = & + \\
 - \cdot - & = & + \\
 + \cdot - & = & - \\
 - \cdot + & = & -
 \end{array}$$

ACTIVIDADES

- 6 Efectúa las siguientes sumas y restas.

- a) $(-10) + (-7)$ c) $(-2) - (+5)$
 b) $(+14) - (-6)$ d) $(+8) + (-8)$

- 7 Realiza estas operaciones.

- a) $(-15) + (+7) - (-4) + (+2)$
 b) $(+9) - (+5) + (-4) - (-10) - (+6)$

- 8 Al número de golpes asignados a un hoyo en golf se le llama «par». La tabla muestra los golpes por encima o por debajo del par que ha hecho un jugador. ¿Cuál es su puntuación final?

Hoyo	1	2	3	4	5	6
Golpes	-3	+4	+5	-2	-1	0

3 Multiplicación y división de números enteros

Para **multiplicar dos números enteros** se multiplican sus valores absolutos y al resultado se le pone el signo $+$ si los factores tienen el mismo signo, o signo $-$ si los factores son de distinto signo.

Para **dividir dos números enteros** se dividen sus valores absolutos, y se aplica el mismo criterio en los signos que al multiplicar.

EJEMPLOS

5. Realiza las siguientes operaciones con números enteros.

$$\begin{array}{c} 8 \cdot 5 = 40 \\ \text{a) } (-8) \cdot (+5) = -40 \\ \text{Signo distinto} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 2 = 6 \\ \text{c) } (-3) \cdot (-2) = +6 \\ \text{Mismo signo} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 15 : 3 = 5 \\ \text{b) } (+15) : (-3) = -5 \\ \text{Signo distinto} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 12 : 4 = 3 \\ \text{d) } (+12) : (+4) = +3 \\ \text{Mismo signo} \end{array}$$

6. Resuelve estas operaciones con números enteros.

a) $(+3) \cdot (-2) \cdot (-4)$

Al multiplicar o dividir varios números enteros el signo del resultado es:

- $+$ si tiene un número par de factores negativos o no tiene ninguno.
- $-$ si tiene un número impar de factores negativos.

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \\ (+3) \cdot (-2) \cdot (-4) = +24 \\ \text{2 factores negativos} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \\ \text{b) } (-3) \cdot (-2) \cdot (-4) = -24 \\ \text{3 factores negativos} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 18 : 3 : 2 = 6 : 2 = 3 \\ \text{d) } (-18) : (+3) : (+2) = -3 \\ \text{1 factor negativo} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \\ \text{c) } (+3) \cdot (+2) \cdot (+4) = +24 \\ \text{No hay factores negativos} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 18 : 3 : 2 = 6 : 2 = 3 \\ \text{e) } (+18) : (+3) : (+2) = +3 \\ \text{No hay factores negativos} \end{array}$$

ACTIVIDADES

9. Resuelve estos productos y cocientes.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------|
| a) $(+3) \cdot (-5) \cdot (+2)$ | d) $(+21) : (-3) : (-7)$ |
| b) $(+4) \cdot (-1) \cdot (-7)$ | e) $(-8) : (+2) : (+2)$ |
| c) $(-2) \cdot (-7) \cdot (-3)$ | f) $(-24) : (-6) : (-2)$ |

10. Calcula estos productos y cocientes.

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| a) $(+4) \cdot (+7) \cdot (+5)$ | d) $(+20) \cdot (+5) \cdot (+4)$ |
| b) $(+4) \cdot (+7) \cdot (-1)$ | e) $(+25) \cdot (+5) \cdot (+1)$ |
| c) $(+4) \cdot 0 \cdot (+5)$ | f) $(+36) \cdot (+6) \cdot (-1)$ |

4

Operaciones combinadas con números enteros

Las **operaciones combinadas** hay que realizarlas en el siguiente orden:

1. Se resuelven las operaciones que hay entre corchetes y paréntesis.
2. Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
3. Y por último, se calculan las sumas y las restas también de izquierda a derecha.



EJEMPLO

7. Resuelve estas operaciones.

a) $(-3) \cdot [(-4) + (+6)] - (-6) : (-2) + (+5) =$

Primero, resolvemos las operaciones que hay entre corchetes.

$$= (-3) \cdot (+2) - (-6) : (-2) + (+5) =$$

Después, las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha

$$= (-6) - (-6) : (-2) + (+5) =$$

Y, por último, las sumas y las restas.

$$= (-6) - (+3) + (+5) =$$

$$= (-9) + (+5) = +4$$

b) $[(-7) + (+3)] \cdot (-2) - (-5) + (-6) \cdot (-2) : (+4) - (+6) =$

$$= (-4) \cdot (-2) - (-5) + (-6) \cdot (-2) : (+4) - (+6) =$$

$$= (+8) - (-5) + (-6) \cdot (-2) : (+4) - (+6) =$$

$$= (+8) - (-5) + (+12) : (+4) - (+6) =$$

$$= (+8) - (-5) + (+3) - (+6) =$$

$$= (+13) + (+3) - (+6) =$$

$$= (+16) - (+6) = +10$$

ACTIVIDADES

11 Resuelve estas operaciones combinadas.

- a) $(-3) \cdot [(+2) - (+3)] - [(-5) + (-2)]$
- b) $(+4) - (-12) : [(-5) - (-2)] + (-1)$
- c) $[(+7) + (-9)] - [(-8) + (-2)] : (+5)$

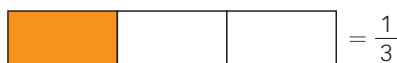
12 Resuelve estas operaciones.

- a) $(-28) + (-7) \cdot (+2) \cdot [(+5) - (+3)]$
- b) $[(-2) \cdot (+6)] : [(+5) - (+3)] - (-8)$
- c) $(-3) \cdot (-4) \cdot (+5) : (-5) - (+8)$

Una **fracción** es un número de la forma $\frac{a}{b}$, siendo a y b números enteros y b distinto de 0.

El número a de la fracción se llama **numerador**, y el número b , **denominador**.

Una fracción sirve para expresar el número de partes que cogemos de una totalidad.



EJEMPLO

8. En la final de la copa regional de fútbol, el equipo A ha metido 6 goles, de los cuales 2 han sido de Mariano. ¿Qué parte de los goles ha metido Mariano?

Mariano ha metido 2 goles de los 6 que ha metido en total el equipo A. Por tanto, la fracción que representa los goles que ha metido Mariano con respecto al total de goles del equipo A es:

$$\begin{array}{l} \text{Goles de Mariano} \rightarrow \frac{2}{6} \\ \text{Total de goles} \rightarrow \frac{6}{6} \end{array}$$

Si dividimos el numerador y el denominador entre un mismo número, obtenemos una fracción que representa la misma cantidad, lo que se llama una **fracción equivalente**.

$$\frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$$

Así, diremos que Mariano ha metido la tercera parte de los goles que ha marcado su equipo.

Dos fracciones son equivalentes si al multiplicar el numerador de cada fracción por el denominador de la otra, el resultado es el mismo.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1 \rightarrow 6 = 6$$

Como el resultado es el mismo, las fracciones $\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3}$ son equivalentes.

ACTIVIDADES

- 13 Expresa en forma de fracción.

- De 10 manzanas cogemos 7.
- En una clase con 30 alumnos, 15 tienen el pelo castaño.
- En un cine hay 60 personas; de ellas, 20 son mujeres.

- 14 Escribe fracciones equivalentes a las siguientes.

- $\frac{125}{25}$
- $\frac{40}{100}$
- $\frac{7}{21}$
- $\frac{35}{15}$

- 15 Expresa en forma de fracción y halla una fracción equivalente cuando sea posible.

- En un cuaderno de 120 hojas hemos escrito en 64.
- De un refresco que tiene 33 centilitros hemos bebido 11.
- De 60 chicles, 30 son de fresa.
- En un taller mecánico se han arreglado 5 de los 20 coches que tienen en total.
- De un álbum de 80 fotos, 16 son de paisajes.

6

Significado de una fracción

Una fracción se puede **interpretar** de varias formas.

- Como partes de una unidad.
- Como resultado de una medida.
- Como operador que actúa sobre un número.

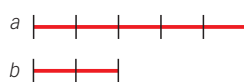
EJEMPLOS

9. Una máquina que fabrica 2000 tornillos al minuto, produce fallos en 37. ¿Qué fracción de tornillos es defectuosa?

Son 37 partes de un total formado por los 2000 tornillos fabricados.

$$\begin{array}{l} \text{Partes} \rightarrow 37 \\ \text{Total} \rightarrow 2000 \end{array}$$

10. ¿Cuánto mide el segmento a tomando el segmento b como unidad?



El segmento a mide 5 veces la mitad del b .

$$a = \frac{5}{2} b$$

11. Marina se ha gastado $\frac{2}{3}$ de su paga en ir al cine. Si recibe 6 € semanalmente, ¿cuánto le ha costado la entrada?

Para calcularlo utilizamos la fracción como operador, multiplicando el número por el numerador y dividiendo el resultado entre el denominador.

$$\frac{2}{3} \text{ de } 6 = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2 \cdot 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

La entrada del cine le ha costado 4 €.

ACTIVIDADES

- 16 Utilizando como medida el segmento a , halla las medidas de b , c y d .



- 17 Un jugador de fútbol ha fallado 1 de cada 4 penaltis lanzados la pasada temporada. Si en total ha lanzado 12 veces, ¿cuántos goles ha marcado?

- 18 La edad de Beatriz es $\frac{1}{4}$ de la de su madre y la de esta es $\frac{3}{4}$ de la de su abuela,

que tiene 64 años.

¿Cuántos años tienen Beatriz y su madre?



Simplificar una fracción consiste en obtener una fracción equivalente dividiendo el numerador y el denominador entre el mismo número.

Decimos que una **fracción es irreducible** cuando no se puede simplificar.

EJEMPLO

- 12.** En un partido de fútbol, el comentarista ha dicho que ha estado lloviendo durante 60 minutos de juego. ¿Qué parte del partido ha estado lloviendo?

Un partido de fútbol dura 90 minutos. Ha estado lloviendo durante 60 minutos de los 90 que dura en total, por tanto:

$\frac{60}{90}$ es la fracción del partido que ha estado lloviendo.

Simplificamos esta fracción dividiendo el numerador y el denominador entre el mismo número.

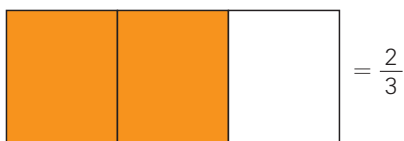
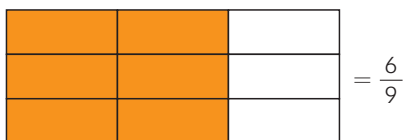
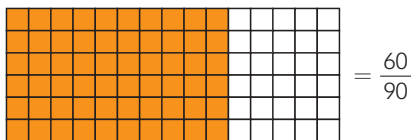
$\frac{60:10}{90:10} = \frac{6}{9}$ es una fracción que representa la misma cantidad que $\frac{60}{90}$

Podemos seguir simplificando la fracción, es decir, dividiendo el numerador y el denominador entre un mismo número.

$\frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$ es otra fracción que representa la misma cantidad que $\frac{60}{90}$

En la fracción $\frac{2}{3}$ no podemos seguir dividiendo el numerador y el denominador entre un mismo número. Decimos que $\frac{2}{3}$ es la fracción irreducible de $\frac{60}{90}$.

Por tanto, podemos decir que ha estado lloviendo las dos terceras partes del partido.



ACTIVIDADES

- 19** De una tableta de chocolate con leche que tenía 12 onzas nos hemos comido 4 onzas. ¿Qué fracción de la tableta nos hemos comido?

- 20** Tenemos que ir en coche desde Villadentro hasta Villamar. La distancia que separa estos pueblos es de 640 km, de los cuales ya hemos recorrido 320 km. ¿Qué parte del viaje hemos realizado?

- 21** Simplifica todo lo que puedas estas fracciones.

a) $\frac{4}{36}$ b) $\frac{12}{36}$ c) $\frac{72}{42}$ d) $\frac{450}{750}$

¿Cómo se llaman las fracciones que has obtenido?

- 22** Halla la fracción irreducible de estas fracciones.

a) $\frac{32}{24}$ b) $\frac{36}{48}$ c) $\frac{35}{75}$ d) $\frac{68}{26}$

8

Reducción a común denominador

Reducir dos o más fracciones a **común denominador** es encontrar fracciones equivalentes a ellas, de tal forma que los denominadores de todas sean iguales.

EJEMPLOS

13. Reduce a común denominador las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{8}{3}$.

Tenemos que encontrar dos fracciones equivalentes a las dadas, con el mismo denominador. Para ello multiplicamos el numerador y el denominador de cada una de ellas por el denominador de la otra.

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \qquad \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{32}{12}$$

Así obtenemos dos fracciones que tienen el mismo denominador. Ahora vamos a comprobar que son equivalentes a las de partida.

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 12 = 36 \\ 9 \cdot 4 = 36 \end{cases}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{32}{12} \rightarrow \begin{cases} 8 \cdot 12 = 96 \\ 3 \cdot 32 = 96 \end{cases}$$

14. Reduce a común denominador las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{3}$.

En este caso, tenemos que encontrar tres fracciones equivalentes a las del enunciado con el mismo denominador. Para ello multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por los denominadores de las otras dos fracciones.

$$\frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{15}{30} \qquad \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{12}{30} \qquad \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{40}{30}$$

ACTIVIDADES

23. Reduce las siguientes fracciones a común denominador.

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{2}$

c) $\frac{1}{8}$ y $\frac{5}{3}$

b) $\frac{13}{4}$ y $\frac{3}{7}$

d) $\frac{6}{11}$ y $\frac{9}{4}$

24. Reduce a común denominador las siguientes fracciones y después comprueba que las fracciones que obtienes son equivalentes a las dadas.

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{9}$

c) $\frac{9}{7}$ y $\frac{7}{9}$

b) $\frac{1}{8}$ y $\frac{7}{3}$

d) $\frac{13}{5}$ y $\frac{15}{2}$

25. Marcos y Diana trabajan pintando vallas. Cuando han terminado 2 de las 8 partes de una valla, ella dice que llevan pintados los $\frac{3}{12}$, y él, que llevan $\frac{1}{4}$. ¿Quién tiene razón?



Para **comparar fracciones**:

- Si tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
- Si tienen distinto denominador, las reducimos primero a denominador común y entonces será mayor la que tenga mayor numerador.



EJEMPLOS

- 15.** Para cenar, Dani y Julia se han preparado una pizza que han dividido en 8 trozos. Dani se ha comido 3 trozos y Julia 5 trozos. ¿Quién ha comido más pizza?

Dani se ha comido 3 de los 8 trozos en que se ha dividido la pizza.

$\frac{3}{8}$ es la fracción de pizza que ha comido Dani.

Julia se ha comido 5 trozos de los 8 en que se ha dividido la pizza.

$\frac{5}{8}$ es la fracción de pizza que ha comido Julia.

Julia ha comido más pizza porque las dos fracciones tienen el mismo denominador y es mayor el numerador de la fracción que representa la parte de pizza que se ha comido Julia. Esto se escribe así:

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$$

- 16.** En los dos últimos partidos del Vector Club de Baloncesto se han ocupado todas las localidades. En el primero, los $\frac{3}{5}$ de los espectadores fueron mujeres, y en el segundo, las espectadoras fueron los $\frac{4}{7}$ del total. ¿En qué partido hubo menos mujeres?

Reducimos las fracciones a común denominador.

$$1.^{\text{er}} \text{ partido} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35} \quad 2.^{\circ} \text{ partido} \rightarrow \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$$

Hubo menos espectadoras en el segundo partido porque el numerador es menor.

ACTIVIDADES

- 26** Carlos ha pintado 3 m de una valla que mide 8 m. De otra valla de 14 m, César ha pintado 5 m. ¿Quién ha pintado mayor parte de su valla?

- 27** Ordena de menor a mayor estas fracciones.

$$\frac{2}{5}, \frac{8}{3}, \frac{7}{10} \text{ y } \frac{4}{9}$$

- 28** Un abuelo deja su herencia a tres de sus nietos.

A Guille le deja los $\frac{2}{5}$ de la herencia; a Marta,

los $\frac{7}{20}$, y a Sebas, $\frac{1}{4}$. ¿Cuál de los tres

ha recibido la mayor parte de la herencia? ¿Y cuál la menor?

10

Suma y resta de fracciones

Para **sumar** o **restar** fracciones deben tener el mismo denominador. Si los denominadores no son iguales, primero tenemos que reducirlos a común denominador.

Cuando los denominadores son iguales, se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

EJEMPLOS

17. Suma las fracciones $\frac{7}{3}$ y $\frac{14}{3}$.

Como las dos fracciones ya tienen el mismo denominador, sumamos los numeradores y mantenemos el mismo denominador:

$$\frac{7}{3} + \frac{14}{3} = \frac{7+14}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

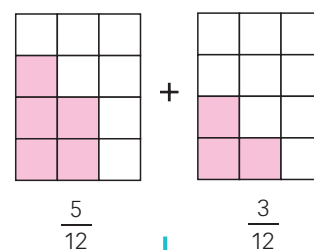
18. Resta las fracciones $\frac{9}{5}$ y $\frac{4}{3}$.

En este caso, los denominadores de las fracciones no son iguales, por lo que antes de hacer las restas, tenemos que reducirlas a común denominador.

$$\frac{9}{5} = \frac{9 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{27}{15} \quad \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{20}{15}$$

Después, restamos los numeradores, manteniendo el denominador común.

$$\frac{9}{5} - \frac{4}{3} = \frac{27}{15} - \frac{20}{15} = \frac{27-20}{15} = \frac{7}{15}$$



$$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5+3}{12} = \frac{8}{12}$$

ACTIVIDADES

29. Realiza estas operaciones con fracciones.

a) $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}$ c) $\frac{8}{3} - \frac{2}{3} + \frac{12}{3}$
 b) $\frac{10}{7} + \frac{4}{7}$ d) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{4}{6}$

30. Calcula.

a) $\frac{5}{8} + \frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$
 b) $\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$ d) $\frac{9}{5} - \frac{2}{3}$

31. Calcula estas operaciones con fracciones.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{7} - \frac{2}{4}$

32. Alberto hace fotocopias en una oficina. Hoy tiene que realizar 800 fotocopias. Antes del desayuno hizo las $\frac{2}{5}$ partes, y $\frac{1}{4}$ hasta la hora de comer. ¿Cuántas fotocopias le faltan por hacer?



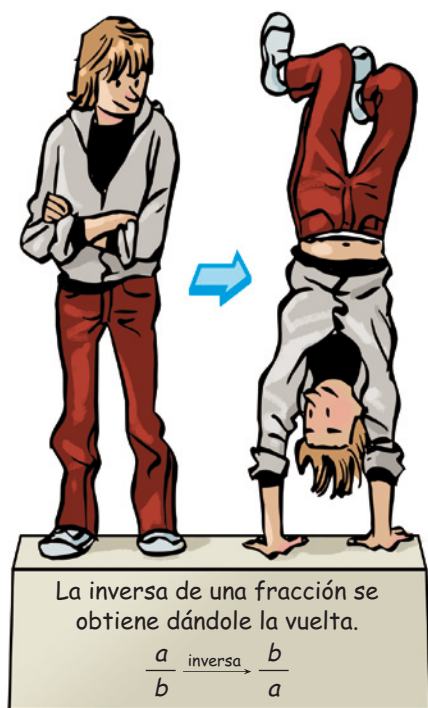
Para **multiplicar** fracciones multiplicamos los numeradores y los denominadores.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

La **división** de fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

La **fracción inversa** de $\frac{c}{d}$ es $\frac{d}{c}$.



EJEMPLOS

19. Multiplica $\frac{5}{3}$ por $\frac{8}{7}$.

Para multiplicar fracciones solo tenemos que multiplicar los numeradores y los denominadores.

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 7} = \frac{40}{21}$$

20. Divide $\frac{9}{5}$ entre $\frac{3}{4}$.

Para dividir fracciones multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda.

$$\frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$$

↖ Inversa ↗
(: 3)

Como verás, al dar el resultado de una operación con fracciones, siempre tratamos de simplificar al máximo la fracción que obtenemos como resultado.

ACTIVIDADES

- 33 Realiza estas operaciones:

a) $\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{9}$

c) $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{10}{3}\right) : \frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{7} : \frac{5}{8}$

d) $\frac{1}{8} : \left(\frac{3}{7} \cdot 4\right)$

- 34 Eva y sus amigas juegan un partido de baloncesto. En la mitad del segundo cuarto, Eva se ha hecho daño en la rodilla y ha tenido que dejar de jugar. Si el partido ha durado 40 minutos, ¿durante cuánto tiempo ha jugado?



12 Operaciones combinadas con fracciones y números enteros

Las **operaciones combinadas** con fracciones se realizan de forma similar a las de los números enteros: primero se resuelven los paréntesis, luego las multiplicaciones y divisiones, y por último, las sumas y restas. Y todo se resuelve de izquierda a derecha.

Para operar números enteros con fracciones transformamos los enteros en fracciones cuyo numerador es el número y el denominador es 1.

EJEMPLO

21. Calcula el valor de $4 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

Primero, resolvemos los paréntesis.

$$4 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{4}{1} \cdot \left(\frac{20}{8} - \frac{6}{8}\right) : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$$

Común denominador

$$= \frac{4}{1} \cdot \frac{14}{8} : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$$

Después, las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha.

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{14}{8} : \frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 14}{1 \cdot 8} : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{56}{8} : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{56}{8} \cdot \frac{2}{1} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{112}{8} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{112}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{112}{8} + \frac{4}{6}$$

Y por último, las sumas y las restas reduciendo a común denominador.

$$\frac{112}{8} + \frac{4}{6} = \frac{112 \cdot 6}{8 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{672}{48} + \frac{32}{48} = \frac{704}{48} = \frac{88}{6} = \frac{44}{3}$$

Simplificando ($\cdot 8$) ($\cdot 2$)



ACTIVIDADES

35 Efectúa las operaciones indicadas.

- a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{4}\right) + \frac{8}{5} : \frac{1}{4}$
- b) $\frac{3}{7} + \frac{5}{8} - 1 + \frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{8} + \frac{1}{5} : \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{6}{5} - 1\right)$

36 Andrea trabaja en una panadería. De los 15 kg de harina que usa al día, $\frac{1}{3}$ lo dedica a elaborar pan, $\frac{2}{5}$ de lo que queda lo usa para pasteles, y el resto, para hacer rosquillas. ¿De qué cantidad dispone para rosquillas?

Números enteros

- 37** Clasifica los siguientes números en positivos o negativos.

a) -37 c) $+45$ e) $+65$
b) -68 d) -81 f) -38

- 38** Di si estos números son positivos o negativos.

a) -273 c) -96 e) $+132$
b) $+180$ d) $+140$ f) -111

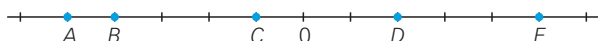
- 39** Escribe el opuesto de cada uno de estos números enteros.

a) $+15$ c) -7 e) -22
b) $+47$ d) -30 f) $+115$

- 40** Calcula el valor absoluto de los números que aparecen a continuación.

a) $|+18|$ c) $|-300|$ e) $|-43|$
b) $|+63|$ d) $|-18|$ f) $|+23|$

- 41** ¿Qué número entero representa cada letra en esta recta real?



- 42** Coloca los siguientes números enteros en la recta real.

-8 $+6$ $+3$ -4 -3

- 43** Resuelve estas operaciones.

a) $(+13) + (+14)$
b) $(-20) + (+35)$
c) $(+19) + (-11)$
d) $(-14) + (-27)$

- 44** Calcula estas operaciones.

a) $(+53) - (+36)$
b) $(-18) - (+60)$
c) $(+12) - (-39)$
d) $(-25) - (-33)$

- 45** Resuelve estas operaciones.

a) $(+20) + (+42) + (-13) + (+5)$
b) $(+67) - (+15) - (-8) - (+23)$
c) $(-15) - (-4) + (+22) - (+10)$
d) $(+36) + (+101) - (-40) - (+23)$

- 46** Realiza estas multiplicaciones.

a) $(+8) \cdot (+12)$ d) $(+10) \cdot (-7)$
b) $(-15) \cdot (+3)$ e) $(-9) \cdot (-8)$
c) $(-3) \cdot (-2)$ f) $(+4) \cdot (+11)$

- 47** Calcula estas divisiones.

a) $(+45) : (+9)$ d) $(-100) : (+5)$
b) $(+234) : (-9)$ e) $(-216) : (-12)$
c) $(-33) : (-3)$ f) $(+51) : (-3)$

- 48** Calcula.

a) $(+15) \cdot (-3) : (+5) \cdot (-6)$
b) $(-110) : (-11) \cdot (+4) \cdot (-7) : (+14)$
c) $(-13) \cdot (+4) \cdot (-3) : (-6) : (+2)$
d) $(+864) : (+36) \cdot (+3) : (-9)$

- 49** Realiza estas operaciones combinadas con números enteros.

a) $[(-11) + (-24)] : (+7) + (+12) \cdot (-4)$
b) $(+264) : [(-35) + (+11)] + (-25) \cdot (-4)$
c) $[(-10) - (+25)] \cdot [(+37) + (-30)] : (-35)$
d) $(-24) \cdot [(+7) - (-5)] : [(-50) - (+41)]$

- 50** Calcula la suma de los números negativos de este conjunto de números enteros.

$+18$ -32 -19 $+194$ -83 $+27$
 $+53$ $+12$ -9 -55 $+46$ -11

- 51** Ordena los siguientes números enteros.

$+15$ -23 -7 $+11$ $+20$ -4

- 52** Escribe un número entero cuyo valor absoluto sea menor que 6.

- 53** ¿Qué números negativos tienen como valor absoluto el resultado de las siguientes operaciones?

a) $(-3) \cdot (-4)$
b) $(+12) : (-3)$
c) $(-21) + (+7)$
d) $(+11) - (-3)$

- 54** Utiliza los símbolos $<$, $=$ o $>$ para ordenar estos valores absolutos.

$|-8|$ $|+15|$ $|-12|$ $|+4|$

- 55** Resuelve estas operaciones.

a) $|(-3) + (+8)|$ c) $|(+15) - (-10)|$
b) $|(-3) \cdot (+11)|$ d) $|(-56) : (-7)|$

- 56** Halla el valor desconocido en estas operaciones.

a) $(-30) + \square = -55$
b) $(+13) \cdot \square = -39$
c) $\square - (-9) = 29$
d) $\square : (-15) = -1$

Fracciones y operaciones

57 ¿Cuáles de estos números no son una fracción?

••• $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$ -7 $\frac{0}{18}$ $+23$ $\frac{7}{7}$

58 De las siguientes fracciones, agrupa las que tengan el mismo numerador.

••• $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{25}{2}$ $\frac{3}{27}$
 $\frac{7}{17}$ $\frac{25}{6}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{17}{19}$ $\frac{3}{19}$ $\frac{2}{100}$ $\frac{2}{5}$

59 Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones.

- a) De una clase de 32 alumnos, 18 son chicas.
 b) Un equipo de fútbol tiene 25 jugadores en plantilla pero solo juegan 11 al mismo tiempo.
 c) En un equipo titular de baloncesto, 2 de sus jugadores miden más de 2 m.
 d) En una empresa de 482 empleados, 306 tienen más de 55 años.
 e) Juan tiene en su casa 237 libros, de los que 185 son novelas de aventuras.



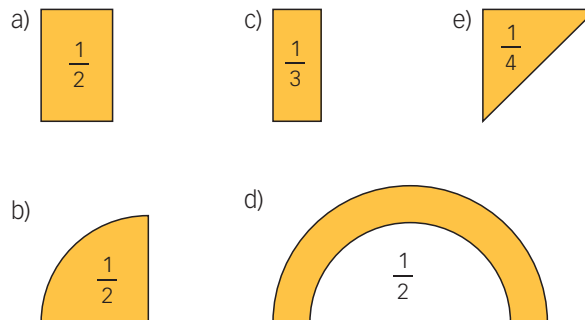
60 Escribe una fracción equivalente a cada una de las dadas.

a) $\frac{12}{18}$ d) $\frac{10}{1000}$
 b) $\frac{17}{23}$ e) $\frac{3}{4}$
 c) $\frac{125}{75}$ f) $\frac{4}{9}$

61 Determina si los siguientes pares de fracciones son equivalentes.

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{8}$ c) $\frac{2}{9}$ y $\frac{12}{54}$
 b) $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ d) $\frac{15}{8}$ y $\frac{5}{7}$

62 Dibuja la unidad completa, teniendo en cuenta la parte representada por cada fracción.



63 Calcula.

••• a) $\frac{1}{2}$ de 180 c) $\frac{5}{6}$ de 420
 b) $\frac{4}{9}$ de 540 d) $\frac{5}{8}$ de 320

64 Simplifica las siguientes fracciones.

••• a) $\frac{10}{1005}$ c) $\frac{18}{24}$ e) $\frac{35}{75}$
 b) $\frac{27}{54}$ d) $\frac{78}{36}$ f) $\frac{1006}{1004}$

65 Encuentra la fracción irreducible de cada una de las fracciones de la actividad anterior.

66 Reduce a común denominador cada una de estas parejas de fracciones.

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$ d) $\frac{8}{7}$ y $\frac{11}{14}$
 b) $\frac{17}{25}$ y $\frac{3}{4}$ e) $\frac{18}{6}$ y $\frac{4}{11}$
 c) $\frac{3}{7}$ y $\frac{20}{4}$ f) $\frac{6}{11}$ y $\frac{11}{6}$

67 Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones.

••• a) $\frac{3}{6}, \frac{6}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{8}{6}$
 b) $\frac{6}{3}, \frac{6}{6}, \frac{6}{2}, \frac{6}{7}, \frac{6}{4}, \frac{6}{11}$
 c) $\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{5}{7}, \frac{8}{12}$

68 Calcula las siguientes sumas de fracciones.

••• a) $\frac{8}{7} + \frac{13}{7}$ c) $\frac{9}{3} + \frac{21}{5}$
 b) $\frac{18}{25} + \frac{17}{25}$ d) $\frac{7}{12} + \frac{14}{4}$

ACTIVIDADES

69 Realiza estas restas.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{16}{9} - \frac{8}{9} & \text{c) } \frac{75}{30} - \frac{10}{6} \\ \text{b) } \frac{75}{25} - \frac{39}{25} & \text{d) } \frac{108}{12} - \frac{26}{8} \end{array}$$

70 Efectúa estas operaciones.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} & \text{d) } \frac{4}{11} \cdot \frac{12}{9} \\ \text{b) } \frac{16}{25} \cdot \frac{2}{4} & \text{e) } \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12} \\ \text{c) } \frac{15}{6} : \frac{3}{15} & \text{f) } \frac{9}{27} : \frac{2}{6} \end{array}$$

71 Encuentra el término desconocido para que estas fracciones sean equivalentes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{5}{4} = \frac{\square}{8} & \text{c) } \frac{\square}{15} = \frac{6}{9} \\ \text{b) } \frac{9}{\square} = \frac{6}{4} & \text{d) } \frac{14}{42} = \frac{\square}{9} \end{array}$$

72 Calcula.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3}{2} + \frac{5}{16} - \frac{3}{8} & \text{d) } \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \\ \text{b) } \frac{5}{6} - \frac{5}{3} + \frac{5}{4} & \text{e) } \frac{7}{15} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \\ \text{c) } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} & \text{f) } \frac{1}{8} + \frac{6}{12} + \frac{5}{6} + \frac{2}{24} \end{array}$$

73 Realiza estas operaciones.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{7}{6} - \left(\frac{3}{20} + \frac{8}{15} \right) & \text{d) } \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{14} \\ \text{b) } \frac{2}{5} : \frac{3}{10} - \frac{7}{18} & \text{e) } \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} + \frac{7}{5} : \frac{4}{3} \\ \text{c) } \frac{8}{5} : \frac{3}{5} + \frac{11}{30} & \text{f) } \frac{1}{2} - \frac{6}{5} : \frac{7}{5} + \frac{4}{3} \end{array}$$

Operaciones combinadas con números enteros y fracciones

74 Calcula estas expresiones.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 17 + \frac{4}{5} & \text{d) } \frac{12}{5} : 9 \\ \text{b) } 23 - \frac{8}{3} & \text{e) } \frac{3}{2} \cdot 5 : \frac{12}{9} \\ \text{c) } \frac{4}{7} \cdot 9 & \text{f) } 16 : \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \right) \end{array}$$

75 Resuelve estas operaciones.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3}{2} + \frac{12}{20} - 2 & \text{d) } \frac{5}{4} - \left(1 - \frac{2}{3} \right) \\ \text{b) } 4 - \frac{7}{8} - \frac{10}{12} & \text{e) } \left(\frac{21}{6} - 3 \right) + \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{8} \right) \\ \text{c) } 3 + \frac{9}{7} - \frac{2}{5} + 5 & \text{f) } 5 - \left(\frac{4}{5} + \frac{10}{12} \right) - \left(\frac{13}{6} + \frac{2}{7} \right) \end{array}$$

76 Calcula.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) & \text{d) } \frac{8}{3} \cdot \left(3 - \frac{12}{15} \right) + \frac{4}{5} : 6 \\ \text{b) } \left(\frac{17}{3} - \frac{6}{12} \right) : \frac{2}{5} & \text{e) } \left(\frac{8}{6} - \frac{9}{7} \right) : \left(\frac{11}{4} + \frac{11}{5} \right) \cdot 2 \\ \text{c) } \left(\frac{19}{10} - \frac{1}{2} \right) : \frac{5}{3} & \text{f) } \left(\frac{12}{9} + \frac{1}{8} \right) - \frac{5}{4} : 2 \end{array}$$

77 Resuelve.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{6 - \frac{3}{5}} & \text{b) } \frac{\left(2 - \frac{2}{5} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} + 1 \right)}{6} \end{array}$$

Problemas con números enteros y fracciones

78 Un barco llevaba 502 pasajeros y ha hecho paradas en tres puertos. En el primero bajan 256 pasajeros, en el segundo suben 162 nuevos pasajeros y en el tercero bajan 84 pasajeros.



Expresa esta situación utilizando números enteros y calcula cuántos pasajeros quedan a bordo tras las tres paradas.

79 Pilar ingresa mensualmente en una cuenta 125 €. En esa cuenta también tiene domiciliados dos recibos mensuales de 60 y 32 € cada uno, uno trimestral de 50 € y además el pago del IBI, impuesto de bienes inmuebles del ayuntamiento, que cuesta 232 € al año. Si abrió la cuenta con 20 €, ¿cuánto dinero tiene al finalizar un año?

- 80** Sabemos que una caja vacía pesa 2 kg y que esa misma caja llena pesa 7 kg. ¿Cuánto pesará el contenido de 26 cajas?
- 81** En un hipermercado se venden botes de tomate frito, que cuestan 3 € cada uno, en oferta tres por dos.
- ¿Por cuánto nos saldría cada bote si tomamos la oferta?
 - ¿Por qué fracción hay que multiplicar el precio con oferta para obtener el precio sin oferta?
- 82** A Pedro le corresponde la mitad de un pastel y a María la tercera parte.
- ¿En cuántas partes conviene dividir el pastel para que el reparto se haga fácilmente?
 - ¿Qué parte del pastel sobrará?
- 83** Hemos hecho ya tres cuartas partes de nuestro viaje y aún nos quedan 120 km para llegar a nuestro destino. ¿Cuántos kilómetros recorreremos durante el viaje?
- 84** En una bodega se abre un tonel el lunes y se saca la sexta parte de su capacidad, el martes se extrae la cuarta parte de lo que queda y el miércoles quedan 75 ℓ. ¿Cuál es la capacidad del tonel?
- 85** El agua al congelarse aumenta su volumen en $\frac{1}{10}$ del mismo. ¿Qué volumen ocuparán 200 ℓ de agua después de helarse?
- 86** Un almacén de pintura tiene un bidón con 700 ℓ de pintura de color oro.
- ¿Cuántos botes de $\frac{1}{3}$ ℓ pueden llenarse con esta pintura?
 - ¿Cuántos botes de $\frac{1}{5}$ ℓ?
 - ¿Y de $\frac{3}{4}$ ℓ?
- 87** Lucía se ha gastado en un libro dos tercios del dinero que tenía, después la quinta parte de lo que le quedaba en una revista y aún le quedan 4 €.
- ¿Cuánto dinero tenía al principio?
 - ¿Cuánto ha costado el libro?
 - ¿Y la revista?
- 88** Una piscina está llena hasta los $\frac{7}{9}$ de su capacidad. Aún se necesitan 880 ℓ de agua para que esté completamente llena. Teniendo en cuenta estos datos, ¿qué capacidad tiene la piscina?

- 89** En 3.º de ESO, tres quintas partes de los alumnos han aprobado Matemáticas y 10 alumnos han suspendido. ¿Cuántos alumnos son en total en clase?
- 90** En una mesa hay 5 comensales, cada uno de los cuales consume $\frac{1}{4}$ ℓ de vino.
- ¿Cuánto consumen en total?
 - ¿Cuántas botellas han abierto si cada una tiene $\frac{3}{4}$ ℓ de vino?



- 91** Unos amigos organizan una marcha por el campo de tres días. El primer día recorren la cuarta parte del total, el segundo día la tercera parte, y el resto, que son 25 km, el tercer día.
- ¿Qué fracción representa los kilómetros recorridos el tercer día?
 - ¿Cuánto han recorrido en total?
- 92** Pablo, Estrella y Olga se reparten 90 € de la siguiente manera: Pablo se queda con la quinta parte, Estrella con la tercera parte de lo que recibe Pablo y Olga con la mitad de la cantidad que recibe Estrella.
- ¿Qué fracción se lleva cada uno?
 - ¿Cuánto se lleva cada uno?
 - ¿Cuánto dinero dejan de bote?
- 93** Tenemos un rollo de alambre de 90 m. Vendemos dos terceras partes a 3 € el metro, un sexto del resto a 4 € el metro y los metros que quedan, a 2 € cada metro. ¿Cuánto ganamos si habíamos comprado cada metro a 2 €?
- 94** En una reunión hay 200 personas, $\frac{2}{3}$ de los hombres presentes están casados con $\frac{3}{5}$ de las mujeres.
- ¿Cuántas personas están casadas y cuántas están solteras?
 - ¿Cuántos son hombres y cuántas mujeres?

Sergio ha empezado a trabajar en una frutería. Su jefe le ha encargado que prepare los pedidos de varios clientes y para ello le ha dado la siguiente tabla.

Julían	• Tres cuartos de naranjas. • Kilo y medio de manzanas. • Medio kilo de limones.
Esther	• Mitad de cuarto de cerezas. • Cuarto y mitad de albaricoques. • Kilo y medio de peras. • Tres cuartos de plátanos.
María	• Medio kilo de mandarinas. • Dos kilos y medio de melocotones. • Cuarto de fresas.

- Expresa la cantidad de fruta que necesita en cada pedido en forma de fracción.
- Obtén también el peso total en kilogramos de cada pedido.

Además de preparar los pedidos, Sergio debe llevarlos al domicilio de los clientes. Para hacer el reparto dispone de un ciclomotor.

Sergio pesa 81 kg y según las características del ciclomotor la tercera parte de este peso recae sobre el eje delantero, y el resto, sobre el trasero.



N° SERIE		N° CERTIFICADO	
Número de identificación:			
Clasificación del vehículo:			
Marca: Tipo: Variante: Denominación comercial: Tara (kg): 77 MTMA/MMA (kg): 191 MTMA/MMA 1ª E (kg): 65 MTMA/MMA 2ª E (kg): 126 MTMA/MMA 4ª E (kg): MMH S/E, c/F (kg): Neumáticos: W de sillero: Volumen de bodega:	Clase: Altura total (mm): Anchura total (mm): Vía anterior/posterior (mm): Longitud total (mm): Voladizo posterior (mm): Distancia eje 1/2ª (mm): Distancia eje 2ª/3ª (mm): Distancia eje 3ª/4ª (mm): Distancia eje 4ª/5ª (mm): Distancia eje 5ª/6ª (mm): Distancia eje 6ª/7ª (mm): Distancia eje 7ª/8ª (mm): Distancia eje 8ª/9ª (mm): Distancia eje 9ª/10ª (mm): Distancia eje 10ª/11ª (mm): Distancia eje 11ª/12ª (mm): Distancia eje 12ª/13ª (mm): Distancia eje 13ª/14ª (mm): Distancia eje 14ª/15ª (mm): Distancia eje 15ª/16ª (mm): Distancia eje 16ª/17ª (mm): Distancia eje 17ª/18ª (mm): Distancia eje 18ª/19ª (mm): Distancia eje 19ª/20ª (mm): Distancia eje 20ª/21ª (mm): Distancia eje 21ª/22ª (mm): Distancia eje 22ª/23ª (mm): Distancia eje 23ª/24ª (mm): Distancia eje 24ª/25ª (mm): Distancia eje 25ª/26ª (mm): Distancia eje 26ª/27ª (mm): Distancia eje 27ª/28ª (mm): Distancia eje 28ª/29ª (mm): Distancia eje 29ª/30ª (mm): Distancia eje 30ª/31ª (mm): Distancia eje 31ª/32ª (mm): Distancia eje 32ª/33ª (mm): Distancia eje 33ª/34ª (mm): Distancia eje 34ª/35ª (mm): Distancia eje 35ª/36ª (mm): Distancia eje 36ª/37ª (mm): Distancia eje 37ª/38ª (mm): Distancia eje 38ª/39ª (mm): Distancia eje 39ª/40ª (mm): Distancia eje 40ª/41ª (mm): Distancia eje 41ª/42ª (mm): Distancia eje 42ª/43ª (mm): Distancia eje 43ª/44ª (mm): Distancia eje 44ª/45ª (mm): Distancia eje 45ª/46ª (mm): Distancia eje 46ª/47ª (mm): Distancia eje 47ª/48ª (mm): Distancia eje 48ª/49ª (mm): Distancia eje 49ª/50ª (mm): Distancia eje 50ª/51ª (mm): Distancia eje 51ª/52ª (mm): Distancia eje 52ª/53ª (mm): Distancia eje 53ª/54ª (mm): Distancia eje 54ª/55ª (mm): Distancia eje 55ª/56ª (mm): Distancia eje 56ª/57ª (mm): Distancia eje 57ª/58ª (mm): Distancia eje 58ª/59ª (mm): Distancia eje 59ª/60ª (mm): Distancia eje 60ª/61ª (mm): Distancia eje 61ª/62ª (mm): Distancia eje 62ª/63ª (mm): Distancia eje 63ª/64ª (mm): Distancia eje 64ª/65ª (mm): Distancia eje 65ª/66ª (mm): Distancia eje 66ª/67ª (mm): Distancia eje 67ª/68ª (mm): Distancia eje 68ª/69ª (mm): Distancia eje 69ª/70ª (mm): Distancia eje 70ª/71ª (mm): Distancia eje 71ª/72ª (mm): Distancia eje 72ª/73ª (mm): Distancia eje 73ª/74ª (mm): Distancia eje 74ª/75ª (mm): Distancia eje 75ª/76ª (mm): Distancia eje 76ª/77ª (mm): Distancia eje 77ª/78ª (mm): Distancia eje 78ª/79ª (mm): Distancia eje 79ª/80ª (mm): Distancia eje 80ª/81ª (mm): Distancia eje 81ª/82ª (mm): Distancia eje 82ª/83ª (mm): Distancia eje 83ª/84ª (mm): Distancia eje 84ª/85ª (mm): Distancia eje 85ª/86ª (mm): Distancia eje 86ª/87ª (mm): Distancia eje 87ª/88ª (mm): Distancia eje 88ª/89ª (mm): Distancia eje 89ª/90ª (mm): Distancia eje 90ª/91ª (mm): Distancia eje 91ª/92ª (mm): Distancia eje 92ª/93ª (mm): Distancia eje 93ª/94ª (mm): Distancia eje 94ª/95ª (mm): Distancia eje 95ª/96ª (mm): Distancia eje 96ª/97ª (mm): Distancia eje 97ª/98ª (mm): Distancia eje 98ª/99ª (mm): Distancia eje 99ª/100ª (mm): Distancia eje 100ª/101ª (mm): Distancia eje 101ª/102ª (mm): Distancia eje 102ª/103ª (mm): Distancia eje 103ª/104ª (mm): Distancia eje 104ª/105ª (mm): Distancia eje 105ª/106ª (mm): Distancia eje 106ª/107ª (mm): Distancia eje 107ª/108ª (mm): Distancia eje 108ª/109ª (mm): Distancia eje 109ª/110ª (mm): Distancia eje 110ª/111ª (mm): Distancia eje 111ª/112ª (mm): Distancia eje 112ª/113ª (mm): Distancia eje 113ª/114ª (mm): Distancia eje 114ª/115ª (mm): Distancia eje 115ª/116ª (mm): Distancia eje 116ª/117ª (mm): Distancia eje 117ª/118ª (mm): Distancia eje 118ª/119ª (mm): Distancia eje 119ª/120ª (mm): Distancia eje 120ª/121ª (mm): Distancia eje 121ª/122ª (mm): Distancia eje 122ª/123ª (mm): Distancia eje 123ª/124ª (mm): Distancia eje 124ª/125ª (mm): Distancia eje 125ª/126ª (mm): Distancia eje 126ª/127ª (mm): Distancia eje 127ª/128ª (mm): Distancia eje 128ª/129ª (mm): Distancia eje 129ª/130ª (mm): Distancia eje 130ª/131ª (mm): Distancia eje 131ª/132ª (mm): Distancia eje 132ª/133ª (mm): Distancia eje 133ª/134ª (mm): Distancia eje 134ª/135ª (mm): Distancia eje 135ª/136ª (mm): Distancia eje 136ª/137ª (mm): Distancia eje 137ª/138ª (mm): Distancia eje 138ª/139ª (mm): Distancia eje 139ª/140ª (mm): Distancia eje 140ª/141ª (mm): Distancia eje 141ª/142ª (mm): Distancia eje 142ª/143ª (mm): Distancia eje 143ª/144ª (mm): Distancia eje 144ª/145ª (mm): Distancia eje 145ª/146ª (mm): Distancia eje 146ª/147ª (mm): Distancia eje 147ª/148ª (mm): Distancia eje 148ª/149ª (mm): Distancia eje 149ª/150ª (mm): Distancia eje 150ª/151ª (mm): Distancia eje 151ª/152ª (mm): Distancia eje 152ª/153ª (mm): Distancia eje 153ª/154ª (mm): Distancia eje 154ª/155ª (mm): Distancia eje 155ª/156ª (mm): Distancia eje 156ª/157ª (mm): Distancia eje 157ª/158ª (mm): Distancia eje 158ª/159ª (mm): Distancia eje 159ª/160ª (mm): Distancia eje 160ª/161ª (mm): Distancia eje 161ª/162ª (mm): Distancia eje 162ª/163ª (mm): Distancia eje 163ª/164ª (mm): Distancia eje 164ª/165ª (mm): Distancia eje 165ª/166ª (mm): Distancia eje 166ª/167ª (mm): Distancia eje 167ª/168ª (mm): Distancia eje 168ª/169ª (mm): Distancia eje 169ª/170ª (mm): Distancia eje 170ª/171ª (mm): Distancia eje 171ª/172ª (mm): Distancia eje 172ª/173ª (mm): Distancia eje 173ª/174ª (mm): Distancia eje 174ª/175ª (mm): Distancia eje 175ª/176ª (mm): Distancia eje 176ª/177ª (mm): Distancia eje 177ª/178ª (mm): Distancia eje 178ª/179ª (mm): Distancia eje 179ª/180ª (mm): Distancia eje 180ª/181ª (mm): Distancia eje 181ª/182ª (mm): Distancia eje 182ª/183ª (mm): Distancia eje 183ª/184ª (mm): Distancia eje 184ª/185ª (mm): Distancia eje 185ª/186ª (mm): Distancia eje 186ª/187ª (mm): Distancia eje 187ª/188ª (mm): Distancia eje 188ª/189ª (mm): Distancia eje 189ª/190ª (mm): Distancia eje 190ª/191ª (mm): Distancia eje 191ª/192ª (mm): Distancia eje 192ª/193ª (mm): Distancia eje 193ª/194ª (mm): Distancia eje 194ª/195ª (mm): Distancia eje 195ª/196ª (mm): Distancia eje 196ª/197ª (mm): Distancia eje 197ª/198ª (mm): Distancia eje 198ª/199ª (mm): Distancia eje 19		



- c) Atendiendo a la ficha técnica de la moto, ¿puede llevar los tres pedidos en un solo viaje?
- d) ¿Y si además lleva 12 botellas de 2 l de agua?
- e) ¿Cómo debe repartir los pedidos entre la cesta del manillar y la caja que tiene detrás para poder llevar todo en un solo viaje?