



Matemàtiques I

SÈRIE **RESOL**

El llibre **Matemàtiques I**, per al 1r curs de Batxillerat, és una obra col·lectiva concebuda, dissenyada i creada al Departament d'Edicions Educatives de Grup Promotor / Santillana Educación, S. L., dirigit per **Teresa Grence Ruiz** i **Pere Macià Arqué**.

A l'elaboració ha participat l'equip següent:

César de la Prida Almansa
Ana María Gaztelu Villoria
Augusto González García
José Lorenzo Blanco
Carlos Pérez Saavedra
Domingo Sánchez Figueroa

EDICIÓ

Núria Grinyó Martorell
César de la Prida Almansa
Virgilio Nieto Barrera

EDICIÓ EXECUTIVA

Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓ DEL PROJECTE

Domingo Sánchez Figueroa

Les activitats d'aquest llibre no s'han de fer en cap cas en el mateix llibre.
Les taules, els esquemes i els altres recursos que s'hi inclouen
són models perquè l'alumne els traslladi a la llibreta.

UNITAT	SABER	
1 Nombres reals	1. Nombres racionals 10 2. Nombres irracionals 11 3. Nombres reals 12 4. Intervalls 14 5. Aproximacions i errors 15 6. Acotació d'errors 16 7. Notació científica 17 8. Radicals 18 9. Operacions amb radicals 20 10. Racionalització 21 11. Logaritmes 22	• Escriure nombres irracionals • Representar en la recta real els nombres de la forma $\sqrt{n}$ • Escriure un nombre en notació científica • Simplificar radicals • Reduir radicals a índex comú • Racionalitzar expressions del tipus $\frac{a}{\sqrt{b}}$
2 Successions numèriques. Progressions	1. Successions de nombres reals 38 2. Progressions aritmètiques 39 3. Progressions geomètriques 41 4. Interpolació 45 5. Interès simple 46 6. Interès compost 47	• Reconèixer successions de nombres reals • Obtenir diferents termes de successions de nombres reals a partir d'una regla de formació • Determinar el terme general d'una successió de nombres reals en cas que sigui possible • Reconèixer una progressió aritmètica • Determinar el terme general d'una progressió aritmètica • Obtenir la diferència d'una progressió aritmètica • Calcular diferents termes d'una progressió aritmètica
3 Equacions i inequacions	1. Polinomis 58 2. Arrels d'un polinomi 60 3. Factorització de polinomis 61 4. Fraccions algèbriques 62 5. Operacions amb fraccions algèbriques 63 6. Equacions de segon grau 64 7. Altres tipus d'equacions 66 8. Factorització d'equacions 67 9. Equacions logarítmiques 68 10. Equacions exponencials 69 11. Inequacions 70	• Utilitzar la regla de Ruffini per dividir polinomis • Calcular les arrels enteres d'un polinomi • Factoritzar un polinomi • Simplificar fraccions algèbriques • Reduir a comú denominador fraccions algèbriques • Sumar i restar fraccions algèbriques • Resoldre equacions biquadrades • Resoldre equacions logarítmiques • Resoldre equacions exponencials • Resoldre una inequació de primer grau amb una incògnita • Resoldre una inequació de segon grau amb una incògnita
4 Sistemes d'equacions	1. Sistemes d'equacions lineals 86 2. Sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites 88 3. Sistemes d'equacions lineals amb tres incògnites 90 4. Mètode de Gauss 91 5. Discussió d'un sistema pel mètode de Gauss 92 6. Sistemes d'equacions no lineals 94	• Resoldre un sistema amb el mètode de substitució • Resoldre un sistema amb el mètode d'igualació • Resoldre un sistema amb el mètode de reducció • Resoldre un sistema amb el mètode gràfic • Resoldre un sistema de tres equacions amb el mètode de Gauss • Resoldre un sistema expressat matricialment per Gauss
5 Trigonometria	1. Mesura d'angles 110 2. Raons trigonomètriques 111 3. Relacions entre raons trigonomètriques 112 4. Raons trigonomètriques de 30° , 45° i 60° 113 5. Raons d'un angle qualsevol 114 6. Fórmules trigonomètriques 116 7. Equacions trigonomètriques 118 8. Resolució de triangles rectangles 119 9. Teorema del sinus 120 10. Teorema del cosinus 121 11. Resolució de triangles qualssevol 122	• Transformar graus en radians, i viceversa • Calcular les raons reduint al 1r quadrant • Calcular les raons d'angles més grans que 360° • Resoldre un triangle rectangle coneguts dos costats • Resoldre un triangle rectangle coneguts un angle i un costat • Resoldre un triangle coneguts els tres costats • Resoldre un triangle coneguts dos costats i l'angle que formen
6 Nombres complexos	1. Nombres complexos 138 2. Representació de nombres complexos 140 3. Operacions amb nombres complexos 141 4. Nombres complexos en forma polar 142 5. Multiplicació i divisió en forma polar 144 6. Potències de nombres complexos 145 7. Arrels de nombres complexos 146	• Passar un nombre complex de forma bionòmia a forma polar • Passar un nombre complex de forma polar a forma bionòmia • Calcular les arrels d'un nombre complex • Calcular les solucions complexes d'una equació • Resoldre operacions amb potències de i • Calcular l'invers d'un nombre complex
7 Geometria analítica	1. Vectors. Operacions 160 2. Bases 162 3. Coordenades d'un vector 163 4. Operacions amb coordenades 164 5. Producte escalar 165 6. Aplicacions del producte escalar 166 7. Aplicacions dels vectors 167 8. Equacions de la recta 168 9. Posicions relatives de dues rectes 171 10. Distàncies i angles entre rectes 172	• Sumar i restar vectors gràficament • Multiplicar gràficament un vector per un nombre real • Expressar un vector com a combinació lineal d'uns altres dos • Calcular vectors perpendiculars a un vector donat • Calcular la distància entre dues rectes en el pla • Expressar un vector com a combinació lineal de dos vectors que formen base • Calcular les coordenades d'un dels extrems d'un vector conegut l'altre extrem i el vector

SABER FER

- Racionalitzar binomis amb arrels quadrades
- Operar amb nombres decimals periòdics
- Realitzar operacions combinades amb potències
- Usar la propietat distributiva per extreure factor comú
- Efectuar la unió de dos intervals
- Efectuar la intersecció de dos intervals
- Calcular intervals encaixats que continguin un nombre irracional

- Sumar i restar nombres en notació científica
- Escriure certes expressions amb un sol radical
- Introduir factors en un radical
- Racionalitzar fraccions amb un producte de radicals en el denominador
- Reconèixer nombres representats en la recta real
- Resoldre operacions entre fraccions amb radicals

- Reconèixer una progressió geomètrica
- Determinar el terme general d'una progressió geomètrica
- Obtenir la raó d'una progressió geomètrica
- Calcular diferents termes d'una progressió geomètrica
- Calcular la suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica
- Calcular la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica
- Calcular el producte dels n primers termes d'una progressió geomètrica
- Sumar els infinits termes d'una progressió geomètrica

- Interpol·lar mitjans aritmètics entre dos nombres de manera que formin una progressió aritmètica
- Interpol·lar mitjans geomètrics entre dos nombres de manera que formin una progressió geomètrica
- Distingir entre interès simple i interès compost
- Calcular interessos en problemes d'interès simple i interès compost
- Resoldre problemes reals d'interès simple i compost

- Determinar un coeficient perquè una equació de $2n$ grau tingui un nombre determinat de solucions
- Resoldre equacions del tipus $ax^{2n} + bx^n + c = 0$
- Resoldre equacions del tipus $P(x)/Q(x) = R(x)$
- Resoldre equacions del tipus $P(x)/Q(x) = R(x)/S(x)$
- Resoldre equacions del tipus $\sqrt{P(x)} = Q(x)$
- Resoldre equacions del tipus $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} = R(x)$
- Resoldre equacions mitjançant factorització

- Resoldre expressions del tipus $\log_a x = c$ o $\log_x b = c$
- Resoldre inequacions que contenen fraccions algèbriques
- Resoldre equacions del tipus $\sqrt{P(x)} = a$
- Resoldre equacions exponencials mitjançant un canvi de variable

- Expressar les solucions d'un sistema indeterminat amb dues incògnites
- Resoldre sistemes en funció d'un paràmetre
- Resoldre problemes amb un sistema d'equacions
- Trobar el nombre de solucions d'un sistema amb dues incògnites
- Expressar les solucions d'un sistema compatible indeterminat amb tres incògnites

- Discutir sistemes amb tres incògnites en funció d'un paràmetre
- Resoldre problemes amb un sistema amb tres incògnites
- Resoldre sistemes no lineals amb radicals
- Resoldre sistemes no lineals amb fraccions algèbriques
- Escriure un sistema compatible determinat amb una solució
- Resoldre un sistema de quatre equacions i tres incògnites

- Resoldre un triangle coneguts dos costats i l'angle oposat a un d'ells
- Resoldre un triangle coneguts un costat i dos angles
- Calcular les raons d'un angle coneixent-ne una
- Calcular les raons d'un angle a partir d'altres angles
- Resoldre equacions trigonomètriques del tipus $\sin f(x) = k$, $\cos f(x) = k$ o $\operatorname{tg} f(x) = k$
- Resoldre equacions trigonomètriques factoritzant
- Resoldre equacions trigonomètriques amb cosinus

- Aplicar la resolució de triangles a la resolució de problemes
- Trobar l'àrea d'un triangle coneguts dos costats i l'angle que formen
- Calcular l'altura d'un triangle coneguts un costat i els seus dos angles adjacents
- Calcular l'àrea d'un polígon regular conegut el radi
- Resoldre problemes aplicant el teorema del cosinus
- Resoldre problemes aplicant el teorema del sinus
- Resoldre triangles amb el teorema de les tangents
- Verificar una identitat trigonomètrica

- Resoldre equacions amb nombres complexos
- Calcular el conjugat d'un nombre complex en forma polar
- Calcular l'oposat d'un nombre complex en forma polar
- Calcular l'invers d'un nombre complex en forma polar
- Sumar i restar nombres complexos
- Multiplicar, dividir i calcular potències amb nombres complexos

- Determinar les coordenades dels punts que són arrels d'un nombre
- Resoldre equacions del tipus $z^n - k = 0$
- Resoldre operacions combinades amb nombres complexos
- Resoldre problemes geomètrics associats amb les arrels de nombres complexos

- Calcular les coordenades de dos vectors dels quals es coneixen algunes operacions
- Calcular vectors perpendiculars a un de donat
- Calcular el perímetre de polígons conegudes les coordenades dels seus vèrtexs
- Trobar diversos punts que divideixin un segment en parts iguals
- Determinar si tres punts estan alineats
- Trobar l'equació d'una recta amb alguns dels seus elements

- Determinar l'equació d'una recta paral·lela a una altra
- Trobar l'equació d'una recta que passa per un punt i és perpendicular a una altra
- Trobar una recta paral·lela a una altra que està a una certa distància
- Trobar l'equació d'una recta que passa per un punt i forma un angle donat amb una altra
- Resoldre de manera gràfica operacions combinades de vectors
- Determinar si un punt pertany a una recta
- Determinar el punt d'intersecció entre dues rectes secants

Índex

UNITAT	SABER	
8 Llocs geomètrics. Còniques	1. Seccions còniques 188 2. Llocs geomètrics 189 3. El·lipse 190 4. Hipèrbola 193 5. Paràbola 196 6. Circumferència 197 7. Posicions de dues circumferències 198 8. Posicions de rectes i circumferències 199	• Trobar l'equació d'una el·lipse amb algun dels seus elements • Calcular els elements d'una el·lipse a partir de la seva equació • Trobar l'equació d'una hipèrbola pels seus elements • Calcular els elements d'una hipèrbola a partir de la seva equació • Reconèixer l'equació d'una circumferència • Determinar la posició relativa de dues circumferències • Determinar la posició relativa d'una recta i una circumferència • Calcular els punts de tall d'una circumferència i una recta • Calcular l'equació d'un lloc geomètric
9 Funcions	1. Funcions reals de variable real 214 2. Domini i recorregut 215 3. Simetria i periodicitat 216 4. Funcions polinòmiques 217 5. Transformacions de funcions 218 6. Funcions racionals 219 7. Funcions amb radicals 220 8. Funció inversa 221 9. Funcions exponencials 222 10. Funcions logarítmiques 223 11. Funcions trigonomètriques 224 12. Funcions definides a trossos 226 13. Operacions amb funcions 228 14. Composició de funcions 229	• Determinar el domini d'una funció • Determinar la simetria d'una funció • Representar una funció quadràtica • Representar una funció de proporcionalitat inversa • Representar la funció $f(x) = \sqrt[n]{x}$ • Calcular la funció inversa d'una funció • Representar una funció exponencial • Representar una funció logarítmica • Representar una funció definida a trossos
10 Límit d'una funció	1. Successions. Límit d'una successió 244 2. Càlcul de límits 246 3. Operacions amb límits 247 4. Indeterminacions 248 5. Resolució d'algunes indeterminacions 249 6. Límit d'una funció en l'infinit 252 7. Límit d'una funció en un punt 253 8. Branques infinites. Asímtotes 256 9. Continuitat d'una funció 258	• Calcular límits amb indeterminació del tipus ∞/∞ • Resoldre límits amb indeterminació del tipus $\infty - \infty$ • Calcular el límit d'una funció en un punt • Calcular el límit d'una funció definida a trossos • Resoldre límits amb indeterminació del tipus $0/0$ • Calcular les asímtotes horitzontals d'una funció • Calcular les asímtotes verticals d'una funció racional
11 Derivada d'una funció	1. Taxa de variació mitjana 274 2. Derivada d'una funció en un punt 275 3. Interpretació geomètrica de la derivada 276 4. Funció derivada 277 5. Derivades de funcions elementals 278 6. Operacions amb derivades 280 7. Regla de la cadena 283	• Calcular, amb la definició, la derivada d'una funció en un punt • Calcular, amb la definició, la tangent d'una funció en un punt • Calcular la derivada d'un producte de funcions • Calcular la derivada d'un quocient de funcions • Calcular la derivada d'una funció composta • Calcular el valor d'un paràmetre d'una funció coneguda la seva derivada en un punt • Estudiar la derivabilitat d'una funció en un punt segons un paràmetre
12 Aplicacions de la derivada. Representació de funcions	1. Creixement i decreixement 298 2. Concavitat i convexitat 301 3. Representació gràfica de funcions 302 4. Representació de funcions polinòmiques 304 5. Representació de funcions racionals 306	• Determinar el creixement i el decreixement d'una funció • Determinar els màxims i els mínims d'una funció utilitzant la derivada segona • Determinar la concavitat i la convexitat d'una funció • Representar una funció coneguda algunes característiques • Representar funcions polinòmiques • Representar funcions racionals • Estudiar el creixement i el decreixement en una funció definida a trossos
13 Estadística unidimensional	1. Variable estadística unidimensional 322 2. Gràfics estadístics 324 3. Mesures de centralització 326 4. Mesures de posició 328 5. Mesures de dispersió 329 6. Anàlisi de les mesures estadístiques 330	• Construir una taula agrupant les dades en intervals • Realitzar un histograma i el seu polígon de freqüències • Calcular mesures de centralització en variables contínues • Estudiar conjuntament la mitjana i la desviació típica
14 Estadística bidimensional	1. Variable estadística bidimensional 344 2. Gràfics estadístics de variables bidimensionals 346 3. Dependència entre variables 347 4. Correlació 349 5. Rectes de regressió 351 6. Estimació de resultats 353	• Estudiar la dependència mitjançant taules de contingència • Calcular la covariància • Calcular i interpretar el coeficient de correlació • Determinar i representar la recta de regressió • Estimar valors utilitzant la recta de regressió • Treballar l'estadística bidimensional amb calculadora

SABER FER

- Trobar l'equació d'una el·lipse coneguts l'excentricitat i la distància focal
- Determinar l'equació d'una el·lipse amb eixos paral·lels a OX i a OY
- Calcular l'equació d'una hipèrbola amb eixos paral·lels a OX i OY
- Calcular l'equació d'una paràbola amb eix paral·lel a l'eix OY
- Determinar l'equació general d'una circumferència coneguts tres punts per on passa
- Calcular el centre i el radi d'una circumferència coneguts tres punts per on passa

- Calcular l'equació d'una circumferència coneguts dos dels seus punts i una recta que passi pel seu centre
- Identificar l'equació d'una cònica
- Estudiar posicions relatives entre un punt i una circumferència
- Escriure l'equació general d'una el·lipse i obtenir les coordenades del centre, vèrtexs i focus
- Determinar l'equació d'una circumferència
- Estudiar les posicions relatives entre una recta i una circumferència

- Trobar els valors de les operacions amb funcions
- Compondre funcions
- Calcular el domini de funcions no elementals
- Calcular el període de les funcions trigonomètriques
- Representar funcions del tipus $f(x) = ax^n$ amb $n \geq 2$
- Determinar la gràfica d'una funció a partir de transformacions
- Representar funcions del tipus $kf(x)$ coneguda la gràfica de $f(x)$
- Representar funcions del tipus $f(x) = \frac{k}{x+a}$ i $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$
- Representar la gràfica d'una funció inversa

- Representar funcions del tipus $f(x) = a^{kx}$
- Representar funcions del tipus $f(x) = a^{x+b} + c$
- Representar funcions del tipus $f(x) = \log_a kx^b$
- Representar funcions del tipus $g(x) = |f(x)|$
- Representar funcions en què intervé el valor absolut
- Expressar una funció com a composició d'altres funcions
- Determinar el període d'una funció
- Representar funcions del tipus $f(x) = \frac{k}{x^n}$
- Representar funcions del tipus $f(x) = \frac{k}{\sqrt[n]{x}}$

- Calcular les asímptotes obliqües d'una funció
- Estudiar la continuïtat d'una funció elemental
- Determinar el límit d'un quocient de polinomis amb radicals
- Resoldre límits del tipus $(a_n/b_n)^{c_n}$ amb indeterminació 1^∞
- Calcular el límit d'una funció en un punt
- Calcular un límit que presenta una indeterminació del tipus $0/0$ quan hi ha radicals

- Representar una funció coneguts les asímptotes els punts de tall
- Determinar el signe de les branques infinites d'una funció racional
- Determinar si una funció racional té asímptotes horitzontals i obliqües
- Estudiar la continuïtat d'una funció definida a trossos
- Calcular el valor d'un paràmetre perquè una funció sigui contínua
- Calcular el límit en un punt d'un quocient de polinomis
- Determinar les asímptotes d'una funció

- Calcular la tangent d'una funció en un punt utilitzant les tècniques de derivació
- Determinar els punts amb tangent horitzontal en una funció
- Calcular la tangent a un punt d'un lloc geomètric
- Trobar el valor d'un paràmetre en una funció conegudes algunes de les seves tangents
- Calcular una derivada successiva
- Calcular la derivada d'una funció del tipus $f(x) = g(x)^n$
- Calcular la derivada d'una funció del tipus $f(x) = a^{g(x)}$
- Calcular la derivada d'una funció del tipus $f(x) = \ln g(x)$

- Calcular la derivada d'una funció del tipus $f(x) = \sin g(x)$
- Calcular la derivada d'una funció del tipus $f(x) = \arccos g(x)$
- Calcular la derivada d'una funció del tipus $f(x) = g(x)^{h(x)}$
- Calcular la derivada de la composició de tres funcions
- Determinar la tangent d'una funció en un punt que compleix unes condicions
- Calcular la recta normal a una corba
- Calcular el valor de diversos paràmetres d'una funció conegudes algunes de les seves característiques
- Calcular la velocitat d'un mòbil

- Resoldre problemes mitjançant el creixement d'una funció
- Determinar els paràmetres d'una funció conegut un màxim o un mínim
- Determinar una funció coneguts algun punt pel qual passa i un màxim o un mínim
- Estudiar el creixement i el decreixement en una funció a partir de la gràfica de la seva derivada
- Representar la derivada d'una funció a partir de la gràfica d'aquesta funció
- Determinar la concavitat i la convexitat d'una funció definida a trossos
- Estudiar la concavitat i la convexitat en un punt a partir de la representació gràfica de la funció

- Estudiar la concavitat i la convexitat en un punt a partir de la representació gràfica de la funció
- Estudiar la posició de la gràfica respecte d'una asímptota horitzontal
- Estudiar la posició de la gràfica respecte d'una asímptota vertical
- Resoldre problemes d'optimització
- Representar funcions exponencials

- Elaborar una taula d'una variable discreta quan el nombre de dades és gran
- Construir un diagrama de barres adossades
- Interpretar piràmides de població
- Analitzar dades mitjançant mesures de posició
- Treballar l'estadística unidimensional amb calculadora

- Interpretar les mesures estadístiques en una variable unidimensional
- Interpretar la mitjana i la desviació típica conjuntament
- Calcular mesures estadístiques amb ordinador
- Realitzar gràfics estadístics amb ordinador
- Afegir o suprimir dades per obtenir una mesura estadística
- Variar la mitjana d'un conjunt de dades sumant-hi una quantitat fixa a totes

- Agrupar en intervals les dades de variables bidimensionals
- Construir les taules de freqüències marginals a partir de la taula de doble entrada
- Interpretar una taula de doble entrada
- Calcular la recta de regressió amb la calculadora
- Determinar la mitjana d'una variable a partir de la recta de regressió

- Determinar i interpretar el signe del coeficient de correlació a partir de la recta de regressió
- Dibuixar gràfics estadístics bidimensionals amb ordinador
- Realitzar una recta de regressió amb ordinador
- Representar variables bidimensionals
- Calcular el coeficient de correlació en taules de doble entrada agrupades en intervals

L'estructura de les unitats didàctiques és molt senzilla, ja que es tracta de facilitar la localització dels continguts fonamentals, dels exemples resolts i de les activitats proposades.

Introducció a la unitat: un text que motiva l'estudi dels continguts.

S'especifiquen els continguts (**Saber**) de la unitat.

El text inicial presenta un aspecte de la vida real en què s'utilitzen els continguts que s'estudiaran en la unitat.

5 Trigonometria

CONTINGUTS
Mesura d'angles
Raons trigonomètriques d'angles
Relacions entre les raons trigonomètriques
Fórmules i equacions trigonomètriques
Teoremes del sinus i del cosinus
Resolució de triangles

Segur que si penseu en la fibra òptica, de seguida us ve al cap Internet i les connexions de dades a alta velocitat. De fet, no sabem gaire documentats, ja que avui dia aquesta és una de les seves aplicacions més habituals, però no pas l'única.

El primer pas de la fibra òptica, l'any 1950, van ser de tipus mèdic: es va construir un endoscopi flexible que utilitzava la fibra òptica per transportar la llum que calia a una càmera per captar imatges que transmetia a l'exterior, encara que la qualitat no era gaire bona.

D'altra banda, el desenvolupament de la fibra òptica pot que fa als components que la formen no ha deixat d'evolucionar en rapidesa, capacitat i reducció de costos.

Reduïm la fibra òptica amb molts objectes quotidians, però...

Com funciona un cable de fibra òptica?

Pàgines finals de la unitat: un pas més en l'aplicació dels continguts apresos.

MATEMÀTIQUES EN LA TEVA VIDA

PER A QUÈ SERVEIX LA TRIGONOMETRIA?
Per entendre com funciona la fibra òptica

La fibra òptica és un mitjà de transmissió de dades que ha revolucionat el món de les telecomunicacions perquè ha ofert un angle de banda molt més gran que altres mitjans. Així ha permès que les xarxes puguin manejar enllaços digitals a grans velocitats.

Podem definir la fibra òptica com un fil molt prim de material transparent, vidre o materials plàstics, a través del qual s'envien impulsos de llum que representen dades.

La fibra òptica està formada per dues capes: un nucli (nucli) i una capa cobertora (cobertora) amb propietats òptiques diferents de les del nucli.

El funcionament de la fibra òptica consisteix a transmetre pel nucli de la fibra un feix de llum tal que no travessi el nucli, sinó que es reflecteix i es contínui propagant. Aquest fet es pot analitzar a partir de la llei de Snell: «Per a un raig lluminós amb un angle d'incidència i sobre el primer medi, tenim que el raig es propaga en el segon medi amb un angle de refracció r . En aquest cas, el primer medi és el nucli i el segon medi és la capa cobertora.

Com a resultat d'aquesta llei, quan un feix lluminós passa d'un medi a un altre, l'angle de refracció és aproximadament de 90° , sempre que l'índex de refracció del segon medi sigui més gran que el del primer. Així, si representem $n_1 = 90^\circ$ segons la llei de Snell, tenim que:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

en què n_1 és l'índex de refracció del nucli i n_2 de l'índex de refracció de la capa cobertora.

Com que $\sin 90^\circ = 1$, la llei de Snell esdevé: $n_1 = n_2 \sin \theta_2$, és a dir, $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2}$, i com que el sinus d'un angle no pot ser més gran que 1, tenim que $n_1 < n_2$. D'aquesta manera, la conclusió és que un feix lluminós amb l'angle d'incidència més petit que l'angle de refracció, restarà en el nucli fins a arribar al final de la fibra òptica.

EXERCICIS

- Què és la fibra òptica? Quina condició compleix el feix de llum per restar en el nucli fins al final de la fibra òptica?
- La condició del feix anterior de què un feix lluminós amb l'angle d'incidència més petit que l'angle de refracció, restarà en el nucli fins a arribar al final de la fibra òptica. Com es dedueix aquesta conclusió a partir de la llei de Snell?

EXERCICIS

- mesura i representa alguns angles i components d'utilitat la fibra òptica en el context de la teva vida.
- Si l'índex de refracció de l'aire és 1,0003 i l'angle més a menys d'una fibra òptica és 1,001, quant serà l'angle de refracció de la fibra òptica?

Aquesta pàgina, que mostra la manera com les **matemàtiques** intervien en la **teva vida**, respon a la pregunta de la pàgina inicial de la unitat. A més, proposa una sèrie d'activitats que et permetran aprofundir en l'aspecte de la vida real que es mostra.

Pàgines de continguts: SABER i SABER FER com un tot integrat.

La nostra proposta per **Saber** són uns textos clars i estructurats. Els **Exemples** t'ajudaran a consolidar aquests sabers.

Juntament amb els textos explicatius trobaràs **informacions complementàries** que et seran molt útils en la comprensió dels conceptes i els procediments.

1 Taxa de variació mitjana

La taxa de variació mitjana d'una funció $f(x)$ en un interval $[a, b]$ és el quocient:

$$TVM(f, [a, b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La taxa de variació mitjana d'una funció en un interval mesura l'augment o la disminució de la funció en aquest interval. El valor de la taxa de variació mitjana coincideix amb el valor del pendent de la recta que passa pels punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

EXERCICIS

- Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = 3x^2 - 2$ en l'interval $[-1, 2]$.
- Una automòbil que fa un recorregut entre dues ciutats modifica la velocitat. La gràfica mostra la relació entre el temps que triga la distància que recorre. Determina la taxa de variació mitjana en els intervals de temps $[15, 30]$, $[30, 45]$ i $[45, 60]$ i interpreta el resultat.

Fixa't-hi!

Recordem, en la taxa de variació mitjana es considera l'interval $[a, b]$, en què b s'indica la longitud.

Si es dona aquest cas, podem definir la taxa de variació mitjana com el quocient següent:

$$TVM(f, [a, b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ACTIVITATS

- Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = x^2 - x + 3$ en els intervals següents: a) $[2, 4]$, b) $[1, 3]$, c) $[0, 2]$, d) $[3, 5]$.
- Determina la TVM de la funció $f(x) = x^2 - x + 3$ en els intervals següents: a) $[2, 4]$, b) $[1, 3]$.

2 Derivada d'una funció en un punt

Per mesurar l'augment o la disminució d'una funció en un punt donat utilitzem la taxa de variació mitjana en un interval molt proper a aquest punt. Aquest valor s'anomena derivada de la funció en aquest punt.

La derivada d'una funció $f(x)$ en un punt $x = a$ es representa amb $f'(a)$ i s'obté calculant aquest límit:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

SABER FER

Calcular la derivada d'una funció en un punt utilitzant la definició

Determina la derivada de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -1$ i en $x = 0$.

Resolució: Calculem l'increment de la funció i simplifiquem el resultat.

Per $x = -1$: $f(-1+h) - f(-1) = \frac{1}{-1+h} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1+h} + 1 = \frac{1 + (-1+h)}{-1+h} = \frac{h}{-1+h}$

Per $x = 0$: $f(0+h) - f(0) = \frac{1}{0+h} - \frac{1}{0}$ (no està definit)

No te'n oblidis!

Ahora de calcular la derivada d'una funció en un punt com a límit, cal que la funció sigui derivable en aquest punt.

ACTIVITATS

- Mesura la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = x^2 - x + 3$ en els punts següents: a) $f'(2)$, b) $f'(1)$, c) $f'(0)$, d) $f'(3)$.
- Calcula la derivada de la funció $f(x) = x^2 - x + 3$ en els punts següents: a) $x = 1$, b) $x = -1$, c) $x = 2$, d) $x = -3$.

Saber fer és tan important com saber. En aquestes seccions aprendràs, pas a pas, els procediments necessaris per al teu desenvolupament matemàtic.

Les **Activitats** d'aquestes pàgines t'ajudaran a practicar els coneixements adquirits. A més, estan seqüenciats perquè arribis a dominar-los.

Pàgines de SABER FER: per aprendre a fer matemàtiques.

En aquestes pàgines es mostren els procediments bàsics (**Saber fer**) de la unitat.

Cada procediment s'introdueix mitjançant la resolució d'una activitat en què es mostra, pas a pas, un mètode general de resolució.

Les activitats que
acompanyen cada
procediment et
permetran
practicar i
assegurar aquests
continguts.

Tema 9

SABER FER

Resolució de triangles rectangles

Aplicar la resolució de triangles per resoldre problemes reals

L'empenta vol saber l'amplada d'un camp.
Amb els seus passos ha obtingut les mesures següents, que ha apuntat en aquest croquis.

PROBLEMA 1 El triangle de vèrtexs ABC és un triangle rectangle del qual coneixem els dos costats. Volem calcular l'angle α .

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{6,8}{10,4}$$

SOLUCIÓ. El triangle de vèrtexs ABC és un triangle rectangle del qual coneixem un dels costats i un angle. Determinem α .

$$\alpha = \arctan \left(\frac{a}{b} \right) = \arctan \left(\frac{6,8}{10,4} \right) = \arctan 0,6538 \approx 33,2^\circ$$

PRÀCTICA

39. En Joan vol saber l'amplada d'un riu sense haver de creuar-lo a l'altra riba. Per fer-ho, marca amb els seus passos amb els la situació següent:

Resolució de triangles

Calcular l'angle d'un triangle rectangle dels dos costats i l'angle dels altres dos angles.

Calcular l'altura d'un triangle rectangle.

PROBLEMA 1 En calcular l'altura per mitjà del sinus de l'angle.

$$\sin \alpha = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 \text{ cm}$$

SOLUCIÓ. Determinem l'altura del triangle a través del sinus del angle α i l'altura.

$$\text{Area} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ cm}^2$$

PRÀCTICA

Calcular l'area d'un triangle rectangle.

Resolució de triangles

Calcular l'altura d'un triangle rectangle un dels costats i els dos angles adjacents.

Calcular l'altura d'un triangle rectangle un dels costats i els dos angles adjacents.

PROBLEMA 1 Calculem l'altura d'un triangle rectangle dels dos costats i els dos angles adjacents.

SOLUCIÓ. Resoltem el triangle.

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ m}$$

SOLUCIÓ. Resoltem el triangle en determinar l'altura.

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ m}$$

PRÀCTICA

41. Calcular l'altura d'un triangle de base 100 m i amb els angles adjacents a 45° i 60° .

Resolució de triangles

Calcular l'area d'un polígon regular conegut el radi.

Determinar l'area d'un octàgon regular de 12 cm de radi.

PROBLEMA 1 Calculem la mitja de l'angle central. Per fer-ho, dividim 360° entre el nombre de costats, el polígon regular.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

SOLUCIÓ. Calculem l'area del triangle que formen dos dels vèrtexs al centre i el costat mitjàment pel nombre de costats, n .

Raïo = 12 cm

$$\text{Altura} = \text{Raïo} \cdot \cos \alpha = 12 \cdot \cos 45^\circ = 8,485 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = n \cdot \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = 8 \cdot \frac{12 \cdot 8,485}{2} = 403,29 \text{ cm}^2$$

PRÀCTICA

42. Determinar l'area d'un pentàgon regular de 15 cm de radi.

Teoremes del sinus i del cosinus

Resoldre problemes aplicant el teorema del sinus

La base d'un triangle isòs de 7 cm i un angle a la parta, i els angles adjacents a la base són de 30° i 45° .

PROBLEMA 1 Calculem la mitja dels altres costats del triangle. La base pertany a l'angle de 30° . Per tant, aconterem el costat que pertany a l'angle de 45° i el costat que pertany a l'angle de 105° .

SOLUCIÓ. Aplicarem el teorema del sinus en els dos angles coneguts per obtenir les mitjanes que ens demanem.

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 105^\circ} \Rightarrow \frac{7}{0,5} = \frac{b}{0,7071} = \frac{c}{0,9659} \Rightarrow b = 9,898 \text{ cm}, c = 13,89 \text{ cm}$$

PRÀCTICA

44. Calcular la longitud dels costats que fallen en un triangle rectangle següent:

Teoremes del sinus i del cosinus

Resoldre problemes aplicant el teorema del cosinus

Deu corredors surten d'un mateix punt en direccions diferents que formen un angle de 40° al cap de 2 hores, el primer ha recorregut 18 km, i el segon 14 km. A quina distància en línia recta es troben?

PROBLEMA 1 Observeu el triangle que es forma entre els punts de partida i els punts de arribada. En coneixem els dos costats i l'angle que formen.

SOLUCIÓ. Aplicarem el teorema del cosinus per calcular la longitud de l'altre costat.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \Rightarrow c^2 = 18^2 + 14^$$

Pàgines d'Activitats: per aprendre a fer matemàtiques.

Les **Activitats finals** estan **seqüenciades** perquè aprofitis al màxim possible l'aplicació dels continguts que has estudiat.

Les activitats tenen marcada la **dificultat** de resolució. Els **Saber fer** t'ajudaran a seguir aprofundint en els procediments.

Aquesta pàgina serveix per **ampliar** l'aprenentatge dels continguts de la unitat. Les activitats que s'hi ofereixen et faran **reflexionar sobre la teoria** i pensar una mica més.

[illegible]

En els problemes de les **Olimpíades matemàtiques** hauràs d'aplicar tots els teus coneixements i el teu enginy per descobrir regularitats i propietats dels continguts que acabes d'estudiar.

1

Nombres reals

CONTINGUTS

**Nombres racionals
i irracionals**

Nombres reals

Intervals

**Aproximació i acotació
d'errors**

Notació científica

Radicals

Logaritmes



En general, associem els cotxes i el fet de conduir-los a situacions agradables; d'això s'han encarregat la publicitat, els venedors...

La realitat és que en la majoria dels casos aquestes situacions idíl·liques no ho són gens i la conducció passa a ser estressant i perillosa, ja que s'hi ha de prestar la màxima atenció per evitar accidents.

La prevenció dels accidents de trànsit és fonamental; per millorar-la s'han fet campanyes que portin a la conducció responsable: respecte als senyals de circulació, adequació

de la velocitat a la via per la qual es circula, prohibició expressa de consumir substàncies que influeixin negativament en la conducció com ara les drogues o l'alcohol...

Aquestes mesures no són capritxoses, s'han establert després d'analitzar milions d'accidents i determinar les causes que els han provocat. Els estudis afirmen que la velocitat és responsable en la majoria dels casos, però...

Com podem saber a quina velocitat anava un vehicle abans de l'accident?

1 Nombres racionals

El conjunt $\mathbb{Q}$ dels **nombres racionals** està format per tots els nombres que es poden escriure com una fracció $\frac{a}{b}$, en què a i b són nombres enters i b és diferent de 0.

Quan calculem l'expressió decimal d'un nombre racional, quan dividim el numerador entre el denominador, obtenim un nombre enter o un nombre decimal exacte o periòdic. Recíprocament, qualsevol nombre decimal d'aquest tipus el podem escriure en forma de fracció i, per tant, és un nombre racional.

EXEMPLE

1 Classifica els nombres racionals i posa'n exemples.

Nombres racionals	{	Nombres enters	{ Nombres naturals: 1, 2, 3, ... El nombre zero: 0 Enters negatius: -1, -2, -3, ...
		Nombres decimals	{ Decimals exactes: 0,1; -2,33; ... Decimals periòdics: 1,6; -3,145; ...

Recorda

Dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ són equivalents quan tenen el mateix valor numèric:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Cada conjunt de fraccions equivalents representa el mateix nombre racional.

Qualsevol fracció del conjunt és un **representant** del nombre racional, i la fracció irreductible amb denominador positiu n'és el **representant canònic**.

EXEMPLE

2 El nombre racional $\frac{3}{5}$ està format per la fracció $\frac{3}{5}$ i totes les seves fraccions equivalents. Quin és el seu representant canònic?

$$\frac{3}{5} = \left\{ \dots, \frac{-9}{-15}, \frac{-6}{-10}, \frac{-3}{-5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \dots \right\}$$

La fracció irreductible amb denominador positiu és $\frac{3}{5}$; per tant, és el representant canònic del conjunt de fraccions.

ACTIVITATS

1. Calcula el representant canònic d'aquests nombres:

a) $\frac{-16}{24}$

b) $\frac{18}{39}$

c) $\frac{-24}{-60}$

2. Escriu dos representants d'aquests nombres racionals:

a) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{9}{2}$

c) $\frac{8}{25}$

3. Determina quants nombres racionals diferents hi ha en aquesta seqüència:

$$\frac{5}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad \frac{-5}{3} \quad \frac{5}{-3} \quad \frac{10}{6} \quad 1,6$$

4. Una fracció que tingui un terme negatiu i una altra que tingui els dos termes positius, poden ser representants del mateix nombre racional?

2 Nombres irracionals

El conjunt $\mathbb{I}$ dels **nombres irracionals** està format pels nombres que no es poden expressar com a fracció. La seva expressió decimal té una quantitat infinita de xifres que no es repeteixen de manera periòdica.

Hi ha infinits nombres irracionals, alguns dels quals són aquests:

- Les arrels no exactes, com ara $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{1714}$... En general, si n és un nombre natural que no és un quadrat perfecte, $\sqrt{n}$ és irracional.
- Nombres especialment importants:

$$\pi = 3,1415926...; \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339...; e = 2,71828182...$$

No te n'oblidis

Si a és un nombre racional i b és un nombre irracional:

$a + b$ és irracional

$a \cdot b$ és irracional

EXEMPLE

3 Demostra que $\sqrt{7}$ no és un nombre racional.

Si $\sqrt{7}$ fos racional $\rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b}$, amb $\frac{a}{b}$ irreductible $\rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b} \rightarrow 7 = \frac{a^2}{b^2}$

Per tant, a^2 és divisible entre b^2 , cosa que és impossible, ja que a i b són primers entre ells.

→ SABER FER

Escriure nombres irracionals

► Escribe uns quants nombres irracionals i indica com ho fas.

PRIMER MÈTODE. Escrivim el nombre decimal fins a una xifra determinada i indiquem com continua.

Nombre	Regla de formació
0,1234567891011...	Després de la coma se situen tots els nombres naturals
1,2468101214...	Després de la coma se situen tots els nombres parells

SEGON MÈTODE. Si un nombre irracional el sumem a un nombre racional o bé el multipliquem per un nombre racional, el resultat és un nombre irracional.

Per exemple, $\sqrt{5}$ és irracional $\rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $1 + \sqrt{5}$, $3 \cdot \sqrt{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{3}$, ..., són irracionals.

ACTIVITATS

5. Escribe quatre nombres irracionals i especifica'n la regla de formació.
6. Determina si els nombres següents són irracionals:
 - a) 0,51015202530...
 - b) $\frac{3\pi}{4\pi}$
 - c) $2 - \pi$
 - d) $\frac{10}{17}$
7. Sense fer operacions amb decimals, escriu un nombre irracional inclòs entre $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$.
8. Justifica si les afirmacions següents són certes o no:
 - a) L'arrel d'un nombre irracional és irracional.
 - b) Un nombre irracional al quadrat no és racional.

3 Nombres reals

NOMBRES REALS $\mathbb{R}$

NOMBRES IRRACIONALS $\mathbb{I}$

$\sqrt{12}$ $-\sqrt{103}$
 π $-0,1234567\dots$
 $1,120120012000\dots$ $\sqrt{3}$

NOMBRES RACIONALS $\mathbb{Q}$

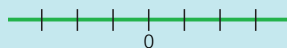
$\frac{1407}{5}$ $-\frac{4}{9}$ $\frac{7}{3}$

Nombres enters $\mathbb{Z}$

-1 -3 0 **Nombres naturals $\mathbb{N}$**
 2 1304

No te n'oblidis

Els nombres reals *omplen* completament la recta.



Cada punt de la recta es correspon amb un nombre real, sigui racional o irracional.

El conjunt dels **nombres reals** està format pels nombres racionals i els irracionals, i es representa amb $\mathbb{R}$.

3.1. Recta real

La recta numèrica on es representen tots els nombres reals s'anomena **recta real**.

→ SABER FER

Representar en la recta real els nombres de la forma $\sqrt{n}$

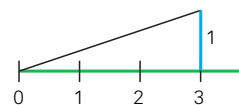
► Representa $\sqrt{12}$ en la recta real.

PRIMER. Descomponem n com una suma de quadrats perfectes.

$$\sqrt{12} \rightarrow 12 = 3^2 + 3 = 3^2 + 1^2 + 2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

SEGON. Utilitzem els dos primers quadrats perfectes per construir els catets d'un triangle rectangle sobre la recta real.

Les longituds dels catets són 3 i 1.

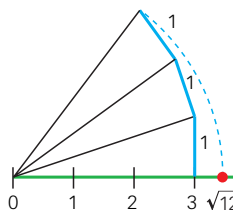


TERCER. Utilitzem el quadrat perfecte següent per construir un altre triangle sobre la hipotenusa del triangle anterior.

La longitud és 1.

QUART. Continuem construint triangles de la mateixa manera fins a fer-ho amb tots els quadrats.

CINQUÈ. Amb centre a 0 i radi la hipotenusa de l'últim triangle, tracem un arc que talli la recta real.



ACTIVITATS

9. Indica el conjunt numèric mínim al qual pertanyen aquests nombres:

- a) 8,0999... c) $\sqrt{15}$ e) 2,5
 b) 1,223334444... d) $6,1\overline{26}$ f) -11

10. Representa les arrels següents:

- a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$

11. Col·loca aquest nombre en la recta real:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

12. Representa els nombres 1 i 2 en la recta real següent:



3.2. Propietats

Les propietats que compleixen els nombres reals són les mateixes que en el cas dels nombres racionals.

Propietats	Suma	Multiplacació
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Element neutre	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Element oposat/ invers	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

No te n'oblidis

- L'element oposat i l'element invers són únics per a cada nombre real.
- El nombre 0 no té invers, és a dir, no existeix cap nombre real que multiplicat per 0 sigui igual a 1.

EXEMPLE

4 Aplica la propietat distributiva a aquestes expressions:

$$\text{a)} -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{35} = -\frac{24}{105} = -\frac{8}{35}$$

$$\text{b)} \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{47}{40} = \frac{329}{80}$$

3.3. Relació d'ordre

Donats dos nombres reals a i b , diem que:

- a és **més petit que** b , i ho escrivim $a < b$, quan $b - a$ és positiu.
- a és **més gran que** b , i ho escrivim $a > b$, quan $b - a$ és negatiu.

La relació d'ordre entre nombres reals compleix les propietats següents:

Transitiva

Si $a \leq b$ i $b \leq c$, es compleix que $a \leq c$.

Relació total

S'estableix un ordre entre tots els nombres: $a < b$, $a = b$ o $a > b$.

Monòtona respecte de la suma

Si $a \leq b$, donat un valor de c , es compleix que $a + c \leq b + c$.

Respecte del producte

Si $a \leq b$ i $c > 0$, es compleix que $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Si $a \leq b$ i $c < 0$, es compleix que $a \cdot c \geq b \cdot c$.

ACTIVITATS

13. Aplica la propietat distributiva i opera.

$$\text{a)} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right) \quad \text{b)} \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7}$$

14. Escriu tres nombres situats entre aquests:

$$\text{a)} \frac{301}{200} \text{ i } \frac{302}{200} \quad \text{b)} \sqrt{5} \text{ i } \sqrt{5} + \frac{1}{10}$$

15. Ordena de més petit a més gran els nombres racionals i irracionals següents:

$$3 \quad \frac{22}{7} \quad \pi \quad \frac{2827}{900}$$

16. Per mitjà de la propietat distributiva, calcula sense efectuar els quadrats.

$$\text{a)} 99^2 \quad \text{b)} 999^2$$

4 Intervals

Un **interval** és un conjunt de nombres reals que es correspon amb els punts d'un segment o una semirecta de la recta real.

Cada interval està determinat pels extrems corresponents: dos extrems en el cas dels segments i un extrem en el cas de les semirectes.

Segons si inclouen o no els punts extrems, els intervals poden ser **oberts**, **semi-oberts** o **tancats**.

Interval obert	(a, b)	$\{x: a < x < b\}$	
Interval tancat	$[a, b]$	$\{x: a \leq x \leq b\}$	
Interval semiobert	$(a, b]$	$\{x: a < x \leq b\}$	
Interval semiobert	$[a, b)$	$\{x: a \leq x < b\}$	
Semirecta oberta	$(a, +\infty)$	$\{x: a < x\}$	
Semirecta tancada	$[a, +\infty)$	$\{x: a \leq x\}$	
Semirecta oberta	$(-\infty, b)$	$\{x: x < b\}$	
Semirecta tancada	$(-\infty, b]$	$\{x: x \leq b\}$	

Recorda

Valor absolut

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$|3| = 3 \quad |-3| = 3 \quad |-7| = 7$$

EXEMPLE

5 Representa els conjunts que tens a continuació de totes les maneres possibles:

a) Nombres més petits que 6

b) $\{x: 2 \leq x < 9\}$

a) $\{x: x < 6\} = (-\infty, 6)$



b) $\{x: 2 \leq x < 9\} = [2, 9)$



c) $\{x: -5 < x < 8\}$

d) $\{x: |x| \leq 5\}$

c) $\{x: -5 < x < 8\} = (-5, 8)$



d) $\{x: |x| \leq 5\} = [-5, 5]$



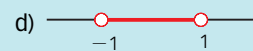
En l'últim apartat, la condició $\{|x| \leq 5\}$ equival al fet que la distància fins al nombre 0 és més petita o igual que 5 unitats.

ACTIVITATS

17. Representa els conjunts numèrics següents de totes les maneres que coneguis:

- Nombres més petits que π .
- Nombres més grans que $\sqrt{3}$ i més petits o iguals que 7.
- Nombres més petits o iguals que 2 i més grans que -2.
- Nombres compresos entre els dos primers nombres parells, tots dos inclosos.
- Nombres inclosos entre $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

18. Escriu aquests intervals de la recta real de totes les maneres que coneguis:



19. Representa el conjunt $\{x: |x - 3| \leq 1\}$ de totes les maneres que coneguis.

5 Aproximacions i errors

5.1. Aproximacions

De vegades és impossible treballar amb alguns nombres, per exemple π ; $\sqrt{3}$; 2,737... En aquests casos utilitzem valors exactes que siguin pròxims al nombre i que simplifiquin els càlculs. Aquests valors s'anomenen **aproximacions**.

Aquests són els tipus més importants d'aproximacions:

- **Aproximació per defecte o truncament.** Consisteix a eliminar les xifres a partir de l'ordre considerat.
- **Aproximació per excés.** Eliminem les xifres a partir de l'ordre considerat i augmentem d'una unitat l'última xifra que deixem.

Arrodoniment: és la millor aproximació entre les dues anteriors.

EXEMPLE

6 Aproxima 3,258; $2,2\widehat{1}$ i $\sqrt{7}$ als centèsims.

	3,258	$2,2\widehat{1}$	$\sqrt{7} = 2,6457\dots$
Arrodoniment als centèsims	3,26	2,21	2,65
Truncament als centèsims	3,25	2,21	2,64

Calculadora

Amb la calculadora podem fixar la quantitat de decimals amb els quals treballem. Per exemple, si fixem 3 decimals, el resultat de fer $\sqrt{7} = 2,645751311\dots$ serà:

$\sqrt{\square}$ 7 = 2.645

5.2. Errors

L'**error absolut**, E_a , és la diferència en valor absolut entre el valor real i l'aproximació.

$$E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximat}}|$$

L'**error relatiu**, E_r , és el quocient entre l'error absolut i el valor real.

$$E_r = \left| \frac{E_a}{V_{\text{real}}} \right|$$

EXEMPLE

7 Calcula els errors que s'han comès en arrodonir 2,561 als centèsims.

$$2,561 \xrightarrow{\text{Arrodoniment}} 2,56 \quad E_a = |2,561 - 2,56| = 0,001 \quad E_r = \left| \frac{0,001}{2,561} \right| = 0,00039$$

ACTIVITATS

20. Amb una calculadora, escriu $\sqrt{3}$ en forma decimal i les aproximacions corresponents per excés i per defecte als deu mil·lèsims i als cent mil·lèsims.

21. Pensa en una situació en la qual dos mesuraments tinguin els mateixos errors absoluts però diferents errors relatius.

6 Acotació d'errors

Una **cota** és un valor que limita una quantitat desconeguda:

- Una cota de l'estatura és 2,8 m, perquè no existeixen persones de més altura.
- La cota d'edat màxima per gaudir dels avantatges del carnet jove és 30 anys, ja que a partir d'aquesta edat no es pot obtenir aquest carnet.

Quan arrodonim un nombre fins a un ordre n cometem un error absolut que compleix que:

$$E_{\text{absolut}} < \frac{1}{2 \cdot 10^n} \rightarrow \text{Cota d'error absolut}$$

EXEMPLE

8 Calcula una cota d'error absolut de l'arrodoniment del nombre π als centèsims.

$$\pi = 3,14159265... \xrightarrow{\text{Arrodoniment}} 3,14$$

$$E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximat}}| = |\pi - 3,14| < \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0,005$$

Una cota d'error absolut d'aquesta aproximació és 0,005.

Podem dir que l'error absolut és més petit que mitja unitat de l'ordre al qual hem aproximat el nombre.

$$\text{Aproximació als dècims} \longrightarrow E_a < 0,05$$

$$\text{Aproximació als centèsims} \rightarrow E_a < 0,005$$

...

Si ϵ és una cota d'error absolut, $E_{\text{absolut}} < \epsilon$, es compleix que:

$$E_{\text{relatiu}} < \frac{\epsilon}{V_{\text{aproximat}} - \epsilon} \rightarrow \text{Cota d'error relatiu}$$

EXEMPLE

9 Calcula una cota d'error relatiu de l'arrodoniment del nombre π als centèsims.

$$\pi = 3,14159265... \xrightarrow{\text{Arrodoniment}} 3,14 \rightarrow E_a < 0,005$$

$$\frac{\epsilon}{V_{\text{aproximat}} - \epsilon} = \frac{0,005}{3,14 - 0,005} = 0,0016 \rightarrow E_r < 0,0016$$

La cota d'error relatiu en tant per cent és del 0,16%.

ACTIVITATS

22. Indica dos exemples de mesurament i dóna'n les cotes d'error corresponents.

23. Calcula les cotes d'error absolut i relatiu quan arrodonim el nombre $\sqrt{2}$:

a) Als centèsims.

b) Als mil·lèsims.

24. Una localitat té 310 habitants, xifra arrodonida a les desenes. En pots indicar els errors? Sabries assenyalar les cotes d'error comès?

25. Calcula una cota d'error absolut quan trunquem un nombre als dècims. I si fos als centèsims?

7 Notació científica

Un nombre en notació científica té la forma $a \cdot 10^b$, en què $|a|$ és un decimal exacte de l'interval $[1, 10)$ i b és un nombre enter.

El terme a s'anomena **mantissa** del nombre i b és l'**ordre de magnitud**.

La notació científica s'utilitza per abreujar quantitats grans o petites.

→ SABER FER

Escriure un nombre en notació científica

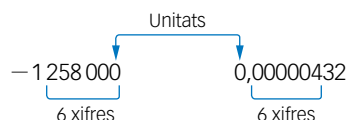
► Escribe $-1\,258\,000$ i $0,00000432$ en notació científica.

PRIMER. Si el nombre té la part entera diferent de zero, l'exponent de la potència de 10 serà positiu, i si la part entera és zero, l'exponent serà negatiu.

$-1\,258\,000 \rightarrow$ Exponent positiu

$0,00000432 \rightarrow$ Exponent negatiu

SEGON. Comptem les xifres que té el nombre des de la primera xifra diferent de zero fins a arribar a les unitats. La xifra de les unitats no es compta. El resultat, tret del signe, coincideix amb l'exponent de la potència de 10.



TERCER. Escriu el nombre amb una sola xifra entera, que no sigui zero, i la potència de 10 corresponent.

$$-1\,258\,000 = -1,258 \cdot 10^6$$

$$0,00000432 = 4,32 \cdot 10^{-6}$$

Calculadora

Per expressar un nombre en notació científica amb la calculadora utilitzem les tecles

$\times$, $x^{\square}$ i $(-)$.

Per introduir el nombre $7,352 \cdot 10^9$ teclegem:

7,352 $\times$ 10 $x^{\square}$ 9

I per introduir $8,64 \cdot 10^{-3}$ hem de teclejar:

8,64 $\times$ 10 $x^{\square}$ $(-)$ 9

Operacions amb nombres en notació científica

- Per sumar i restar, els nombres han de tenir el mateix ordre de magnitud.
- Per multiplicar i dividir, multipliquem o dividim les mantisses, d'una banda, i les potències de 10, de l'altra.

EXEMPLE

10 Efectua aquestes operacions:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3,24 \cdot 10^2 - 1,32 \cdot 10^3 + 9,2 \cdot 10^{-1} &= 0,324 \cdot 10^3 - 1,32 \cdot 10^3 + 0,00092 \cdot 10^3 = \\ &= (0,324 - 1,32 + 0,00092) \cdot 10^3 = \\ &= -0,99508 \cdot 10^3 = -9,9508 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2,3 \cdot 10^2) : (1,6 \cdot 10^{-2}) &= [(3,2 \cdot 2,3) : 1,6] \cdot [(10^{-3} \cdot 10^2) : 10^{-2}] = \\ &= 4,6 \cdot 10^{(-3+2-2)} = 4,6 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Fixa-t'hi

El resultat d'algunes sumes o restes pot ser un nombre que no està escrit en notació científica.

$$7,06 \cdot 10^{11} + 5,2 \cdot 10^{11} = 12,26 \cdot 10^{11}$$

$12,26 \cdot 10^{11} \rightarrow$ La part entera té dues xifres.

$$12,26 \cdot 10^{11} = 1,226 \cdot 10^{12}$$

ACTIVITATS

26. Escribe els nombres següents en notació científica:

- a) 0,0000085 c) 31 940 000 000
b) 5 000 000 000 000 d) 0,000000000479

27. Opera i expressa el resultat en notació científica.

- a) $(5,2 \cdot 10^3 + 4,75 \cdot 10^{-2}) : 8,05 \cdot 10^{-4}$
b) $3,79 \cdot 10^8 \cdot (7,73 \cdot 10^4 - 6,54 \cdot 10^{-2})$

8 Radicals

$$\begin{array}{c} \text{Índex} \\ \downarrow \\ \sqrt[n]{a} = b \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Radicand} \quad \text{Arrel} \end{array}$$

Donat un nombre real a , anomenem **arrel n -èsima** de a qualsevol nombre real b que verifiqui que $b^n = a$. Ho representem $\sqrt[n]{a} = b$.

El símbol $\sqrt[n]{a}$ s'anomena **radical d'índex n** de a .

La radicació és una operació relacionada amb la potenciació.

Potenciació	Radicació
Coneixem la base, b , i l'exponent, n , i calculem la potència. $b^n = a$	Coneixem la potència, a , i l'exponent, n , i calculem la base. $\sqrt[n]{a} = b$

8.1. Valor numèric d'un radical

Quan calculem el valor numèric d'un radical, hem de tenir en compte si l'índex és parell o senar i, també, el signe del radicand.

Anomenem **valor numèric del radical** $\sqrt[n]{a}$ qualsevol nombre real b tal que $b^n = a$.

Calculadora

La calculadora científica ens permet calcular arrels amb les tecles **SHIFT** i $\sqrt[n]{\square}$. Fixa't que, quan hi ha dues arrels, la calculadora només dona l'arrel positiva.

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{-4} \rightarrow \text{SHIFT } \sqrt[n]{\square} \text{ 3 } \blacktriangleright \\ \text{(-) 4 } = \text{-1.587401052} \\ \sqrt[4]{20} \rightarrow \text{SHIFT } \sqrt[n]{\square} \text{ 4 } \blacktriangleright \text{ 20 } \\ = \text{2.114742527} \end{array}$$

	Radicand	Índex	Nre. d'arrels reals
$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	n senar	1 arrel positiva
		n parell	2 arrels, una de positiva i la seva oposada
	$a = 0$	n parell o senar	1 arrel $\rightarrow \sqrt[n]{0} = 0$
	$a < 0$	n senar	1 arrel negativa
		n parell	Cap arrel

EXEMPLE

11 Donades les equivalències següents, dedueix la quantitat d'arrels:

a) $\left. \begin{array}{l} 5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5 \\ (-5)^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = -5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Diem que 25 té dues arrels quadrades.}$

b) $\left. \begin{array}{l} 5^3 = 125 \rightarrow \sqrt[3]{125} = 5 \\ (-5)^3 = -125 \rightarrow \sqrt[3]{125} = -5 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 125 \text{ té una arrel cúbica, } 5 \\ -125 \text{ té una arrel cúbica, } -5 \end{array}$

ACTIVITATS

28. Determina si les igualtats següents són certes. Justifica la resposta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$

c) $\sqrt[3]{1000000} = \pm 1000$

d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

29. Calcula el valor numèric, si existeix, dels radicals següents:

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-10000}$

d) $\sqrt[5]{243}$

8.2. Potències d'exponent fraccionari

Una **potència d'exponent fraccionari** $a^{\frac{m}{n}}$ és un radical d'índex n i radicand a^m , és a dir, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Dos **radicals** són **equivalents** quan, si els expressem en forma de potència com a exponent fraccionari, les seves bases són iguals i les fraccions dels seus exponents són equivalents.

$$a^{\frac{m}{n}} \text{ és equivalent a } a^{\frac{p}{q}} \text{ si } \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

EXEMPLES

12 Expressa en forma de potència amb exponent fraccionari.

$$\text{a) } \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}} \quad \text{b) } \sqrt[3]{-5} = (-5)^{\frac{1}{3}} \quad \text{c) } \sqrt{6^8} = 6^{\frac{8}{2}}$$

13 Expressa els radicals següents com a potència i calcula radicals equivalents:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[3]{4} &= 4^{\frac{1}{3}} & 4^{\frac{1}{3}} &= 4^{\frac{2}{6}} \rightarrow \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} \\ \text{b) } \sqrt[5]{(-3)^4} &= (-3)^{\frac{4}{5}} & (-3)^{\frac{4}{5}} &= (-3)^{\frac{8}{10}} \rightarrow \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[10]{(-3)^8} \end{aligned}$$

Fixa-t'hi

Quan calculem radicals equivalents, la quantitat d'arrels pot variar.

$\sqrt[3]{-1}$ i $\sqrt[6]{(-1)^2}$ són equivalents, però no tenen les mateixes arrels.

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[6]{(-1)^2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

8.3. Simplificació de radicals

Simplificar radicals consisteix a extreure de l'arrel tots els factors possibles.

→ SABER FER

Simplificar radicals

► Simplifica tant com puguis els radicals $\sqrt[6]{25}$ i $\sqrt[3]{81}$.

PRIMER. Expressem l'arrel com a potència d'exponent fraccionari.

$$\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} \quad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$$

SEGON. Calculem la fracció irreductible de l'exponent. Si és una fracció impròpia, la transformem en la suma d'un nombre enter i una fracció pròpia.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

TERCER. L'expressem com a producte de potències, si es pot, i la tornem a transformar en radical.

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \quad 3^{(1+\frac{1}{3})} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3 \sqrt[3]{3}$$

Recorda

Una fracció és impròpia quan el denominador és més petit que el numerador.

$$\frac{16}{3} \rightarrow \text{Fracció impròpia}$$

Qualsevol fracció impròpia es pot expressar com la suma d'un nombre enter i una fracció.

$$\frac{16}{3} \begin{array}{l} \overline{) 3} \rightarrow \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3} \\ \underline{15} \\ 1 \end{array}$$

ACTIVITATS

30. Transforma aquests radicals en potències, i viceversa:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3^{\frac{1}{4}} & \quad \text{c) } 2^{\frac{1}{6}} & \quad \text{e) } 10^{\frac{2}{7}} \\ \text{b) } 5^{\frac{2}{3}} & \quad \text{d) } 7^{\frac{3}{5}} & \quad \text{f) } \sqrt[4]{5^7} \end{aligned}$$

31. Indica si els radicals següents són equivalents:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[4]{3^6} \text{ i } \sqrt{3^3} & \quad \text{c) } \sqrt[4]{36} \text{ i } \sqrt{6} \\ \text{b) } \sqrt[5]{2^{10}} \text{ i } \sqrt{2} & \quad \text{d) } \sqrt[4]{5^{10}} \text{ i } \sqrt{5^4} \end{aligned}$$

9 Operacions amb radicals

9.1. Reducció de radicals a índex comú

Reduir radicals a índex comú consisteix a trobar altres radicals equivalents que tinguin el mateix índex.

→ SABER FER

Reduir radicals a índex comú

► Redueix a índex comú $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ i $\sqrt{3}$.

PRIMER. Expressem els radicals com a potències d'exponent fraccionari.

$$\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

SEGON. Reduïm els exponents a comú denominador i els tornem a expressar com a radical.

$$\text{m.c.m. } (2, 3, 5) = 30$$

$$2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{30}} = \sqrt[30]{2^6}$$

$$5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{10}{30}} = \sqrt[30]{5^{10}}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{15}{30}} = \sqrt[30]{3^{15}}$$

No te n'oblidis

- $\sqrt[n \cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{n \cdot p}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $b \sqrt[n]{a} + c \sqrt[n]{a} = (b + c) \sqrt[n]{a}$
- $b \sqrt[n]{a} - c \sqrt[n]{a} = (b - c) \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

9.2. Operacions amb radicals

- Per sumar o restar radicals, han de tenir el mateix índex i el mateix radicand.
- Per multiplicar o dividir radicals, han de tenir el mateix índex o bé el mateix radicand. Si els radicals no tenen el mateix índex, els reduïm a índex comú.
- Per calcular la potència o l'arrel d'un radical, transformem els radicals en potències i operem amb aquestes potències.

EXEMPLE

14 Efectua aquestes operacions:

Simplifiquem el radical

$$\text{a) } 5\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[15]{2^3} = 5\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[5]{2} = 6\sqrt[5]{2}$$

Quocient de potències de la mateixa base

$$\text{b) } (\sqrt[3]{3^2} : \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{2^2} = (3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{2}}) \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 3^{(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$$

Reduïm a comú denominador les fraccions dels exponents i les expressem com a potència d'un producte.

$$3^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{6}} = (3 \cdot 2^4)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3 \cdot 2^4} = \sqrt[6]{48}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{5 \cdot 3}} = 2^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{2}$$

ACTIVITATS

32. Efectua aquestes operacions:

$$\text{a) } \sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$$

$$\text{b) } 7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5}$$

33. Opera i simplifica.

$$\text{a) } 4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6} \quad \text{b) } \left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3 \quad \text{c) } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{d) } \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$$

10 Racionalització

La **racionalització** consisteix a transformar fraccions que tinguin radicals en el denominador en altres fraccions equivalents que no en tinguin.

10.1. Fraccions del tipus $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

Perquè desaparegui el radical del denominador en les fraccions del tipus $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$ multipliquem el numerador i el denominador per $\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

Fixa-t'hi

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

→ SABER FER

Racionalitzar expressions del tipus $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

► Racionalitza l'expressió $\frac{12}{\sqrt[5]{2^3}}$.

PRIMER. Multipliquem el numerador i el denominador per $\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

$$\frac{12}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{12 \sqrt[5]{(2^3)^4}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{(2^3)^4}} = \frac{12 \sqrt[5]{2^{12}}}{2^3}$$

SEGON. Simplifiquem l'expressió que en resulta.

$$\frac{12 \sqrt[5]{2^{12}}}{2^3} = \frac{12 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{2^3} = 6 \sqrt[5]{2^2}$$

10.2. Fraccions amb un binomi en el denominador

Els denominadors tenen sumands que contenen arrels quadrades.

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}}$$

$$\frac{a}{b - \sqrt{c}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$$

Per eliminar-les, multipliquem el numerador i el denominador pel conjugat del denominador.

→ SABER FER

Racionalitzar binomis amb arrels quadrades

► Racionalitza i simplifica $\frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

PRIMER. Multipliquem el numerador i el denominador pel conjugat del denominador.

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5})}{2 - 5}$$

SEGON. Simplifiquem l'expressió resultant, si és possible.

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5})}{2 - 5} = -(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

Recorda

El conjugat de $(a + b)$ és $(a - b)$ i, recíprocament, el conjugat de $(a - b)$ és $(a + b)$.

Per exemple:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Conjugat} & \\ 3 + \sqrt{4} & \rightarrow & 3 - \sqrt{4} \\ & \text{Conjugat} & \\ 2\sqrt{3} - \sqrt[4]{3} & \rightarrow & 2\sqrt{3} + \sqrt[4]{3} \end{array}$$

ACTIVITATS

34. Racionalitza les expressions següents:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$

c) $\frac{2 + \sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

35. Racionalitza i opera.

a) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 7}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{9 - \sqrt{5}}$

11 Logaritmes

Fixa-t'hi

Podem considerar que el logaritme és l'operació inversa de l'exponencial.

$$c \xrightleftharpoons[\log_a b]{a^c} b$$

Donats dos nombres reals positius a i b ($a \neq 1$), el **logaritme en base a de b** és l'exponent al qual hem d'eleva a perquè el resultat sigui b .

$$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$$

Quan els logaritmes són en base 10 s'anomenen **logaritmes decimals**, i no n'escriuim la base.

$$\log 100 = 2 \quad \text{perquè } 10^2 = 100$$

$$\log 1000 = 3 \quad \text{perquè } 10^3 = 1000$$

$$\log 0,1 = -1 \quad \text{perquè } 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\log 0,01 = -2 \quad \text{perquè } 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Si la base és el nombre $e = 2,7182\dots$, s'anomenen **logaritmes neperians** o logaritmes naturals, i s'escriu $\ln b$.

Calculadora

La calculadora científica ens permet obtenir logaritmes decimals amb la tecla **log** i logaritmes neperians o naturals amb la tecla **ln**.

EXEMPLE

15 Calcula els logaritmes que tens a continuació:

a) $\log_2 32$ b) $\log 0,0001$ c) $\ln e^6$ d) $\log_5 0,00032$

a) Si $\log_2 32 = x \rightarrow 2^x = 32$

Expressem 32 com a potència de 2.

$$32 = 2^5 \rightarrow 2^x = 2^5 \rightarrow x = 5$$

$$\log_2 32 = 5$$

b) Si $\log 0,0001 = x \rightarrow 10^x = 0,0001$

Expressem 0,0001 com a potència de 10.

$$0,0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \rightarrow 10^x = 10^{-4} \rightarrow x = -4$$

$$\log 0,0001 = -4$$

c) Si $\ln e^6 = x \rightarrow e^x = e^6 \rightarrow x = 6$

$$\ln e^6 = 6$$

d) Si $\log_5 0,00032 = x \rightarrow 5^x = 0,00032$

Expressem 0,00032 com a potència de 5.

$$0,00032 = \frac{32}{100\,000} = \frac{32}{10^5} = \frac{2^5}{10^5} = \frac{2^5}{2^5 \cdot 5^5} = 5^{-5}$$

$$\log_5 0,00032 = -5$$

ACTIVITATS

36. Calcula aquests logaritmes mitjançant la definició:

a) $\log_2 8$

e) $\ln e^{33}$

b) $\log_3 81$

f) $\ln e^{-4}$

c) $\log 1000$

g) $\log_4 16$

d) $\log 0,0001$

h) $\log_4 0,25$

37. Determina aquests logaritmes per mitjà de la definició:

a) $\log_3 243$

e) $\ln e^2$

b) $\log_9 81$

f) $\ln e^{-14}$

c) $\log 1\,000\,000$

g) $\log_7 343$

d) $\log 0,00001$

h) $\log_4 0,0625$

Propietats dels logaritmes

- El logaritme d'1 sempre és 0, i el logaritme de la base és 1.

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

- El **logaritme d'un producte** és la suma dels logaritmes dels factors.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

- El **logaritme d'un quocient** és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador.

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

- El **logaritme d'una potència** és igual a l'exponent multiplicat pel logaritme de la base de la potència.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

- Canvi de base** en els logaritmes.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

EXEMPLES

- 16** Resol aquestes operacions amb logaritmes:

a) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6 \cdot 1 = 6$

b) $\log 2,5 + \log 40 = \log (2,5 \cdot 40) = \log 100 = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2$

c) $\log_9 243 = \log_9 (9^2 \cdot 3) = \log_9 9^2 + \log_9 3 = 2 \cdot \log_9 9 + \log_9 3 =$
 $= 2 + \log_9 \sqrt{9} = 2 + \log_9 9^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2} \log_9 9 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

- 17** Amb l'ajuda de la calculadora, determina els logaritmes següents:

a) $\log 645$ b) $\log e^2$ c) $\log_2 10$ d) $\ln 10$

a) $\log 645 = 2,8095\dots$

b) $\log \text{SHIFT } e^2 = 0,8685\dots$

c) $\log_2 10 = 3,3219\dots$

d) $\ln 10 = 2,3025\dots$

- 18** Expressa $\log_3 100$ amb logaritmes decimals.

$$\log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} = \frac{2}{\log 3}$$

ACTIVITATS

- 38.** Calcula aquests logaritmes i deixa indicat el resultat:

- a) $\log_4 32$ d) $\log_5 32$
 b) $\log_2 32$ e) $\log_{32} 4$
 c) $\log_3 100$ f) $\log_2 304$

- 39.** Si sabem que $\log 2 = 0,3010$; $\log 3 = 0,4771$ i $\log 7 = 0,8451$, determina els logaritmes decimals dels 10 primers nombres naturals. Amb aquestes dades, sabries calcula

- 40.** Sense l'ajuda de la calculadora, determina, $\log_2 5$ i $\log_5 2$. Comprova que el seu producte és 1.

- 41.** Calcula el valor de x en les igualtats següents:

- a) $\log_x 256 = -8$ c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$
 b) $\log_3 x = \frac{2}{3}$ d) $\log_x 3 = 2$

- 42.** Calcula $\log_a b \cdot \log_b a$.

Nombres racionals

Operar amb nombres decimals periòdics

Calcula aquestes sumes de nombres decimals periòdics:

a) $2,4 + 6,5$

b) $10,3 - 7,25$

PRIMER. Expressem els nombres en forma de fracció.

a) $2,4 = \frac{24 - 2}{9} = \frac{22}{9}$ $6,5 = \frac{65 - 6}{9} = \frac{59}{9}$

b) $10,3 = \frac{103 - 10}{9} = \frac{93}{9}$ $7,25 = \frac{725 - 72}{90} = \frac{653}{90}$

SEGON. Efectuem les operacions indicades.

a) $2,4 + 6,5 = \frac{22}{9} + \frac{59}{9} = \frac{81}{9} = 9$

b) $10,3 - 7,25 = \frac{93}{9} - \frac{653}{90} = \frac{930 - 653}{90} = \frac{277}{90} = 3,07$

PRACTICA

43. Suma i resta.

a) $2,7 + 4,3$

c) $6,13 + 5,2$

e) $6,34 + 4,213$

b) $20,21 - 7,5$

d) $5,4 + 7,6$

f) $1,23 - 1,012$

44. Multiplica i divideix.

a) $1,2 \cdot 2,1$

c) $6,37 \cdot 8,4$

b) $1,2 : 2,1$

d) $6,37 : 8,4$

Nombres racionals

Efectuar operacions combinades amb potències

Efectua aquesta operació:

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{11}{4} - 2\right)^{-2}$$

PRIMER. Comencem amb les operacions que es troben dins dels parèntesis.

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{11}{4} - 2\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

SEGON. Continuem operant amb les potències.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = 16 \cdot (-3) - \frac{16}{9}$$

TERCER. Efectuem les operacions amb les fraccions; primer fem les multiplicacions i les divisions en l'ordre en què apareixen i, després, les sumes i les restes d'esquerra a dreta.

$$16 \cdot (-3) - \frac{16}{9} = -48 - \frac{16}{9} = \frac{-432 - 16}{9} = \frac{-448}{9}$$

PRACTICA

45. Fes les operacions següents:

a) $\left(\frac{5}{6} + \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

b) $\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

Nombres reals

Utilitzar la propietat distributiva per extreure factor comú

Extreu factor comú d'aquesta expressió:

$$\frac{15}{64} - \frac{45}{56} + \frac{135}{88}$$

PRIMER. Factoritzem, d'una banda, els numeradors i, de l'altra, els denominadors.

$$\begin{array}{lll} 15 = 3 \cdot 5 & 45 = 3^2 \cdot 5 & 135 = 3^3 \cdot 5 \\ 64 = 2^6 & 56 = 2^3 \cdot 7 & 88 = 2^3 \cdot 11 \end{array}$$

SEGON. Seleccionem en el numerador i en el denominador els factors que es repeteixen en tots els sumands elevats a l'exponent més petit amb què apareixen

$$\text{Numerador: } 3 \cdot 5 \quad \text{Denominador: } 2^3$$

TERCER. Extraïem com a factor comú la fracció que té el numerador i el denominador que acabem de calcular.

$$\begin{aligned} \frac{15}{64} - \frac{45}{56} + \frac{135}{88} &= \frac{3 \cdot 5}{2^6} - \frac{3^2 \cdot 5}{2^3 \cdot 7} + \frac{3^3 \cdot 5}{2^3 \cdot 11} = \\ &= \frac{3 \cdot 5}{2^3} \left(\frac{1}{2^3} - \frac{3}{7} + \frac{3^2}{11} \right) = \frac{15}{8} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{7} + \frac{9}{11} \right) \end{aligned}$$

PRACTICA

46. Factoritza aquestes expressions:

a) $\frac{6}{35} - \frac{30}{105} + \frac{54}{245}$

b) $\frac{9}{4} + \frac{45}{32} + \frac{81}{100}$

Intervals

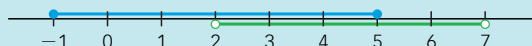
Efectuar la unió de dos intervals

Calcula les unions d'intervals següents:

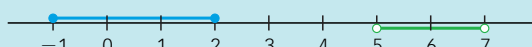
- a) $[-1, 5] \cup (2, 7)$
- b) $[-1, 2] \cup (5, 7)$
- c) $[-1, 7] \cup (2, 5)$

PRIMER. Dibuixem els dos intervals en la mateixa recta real.

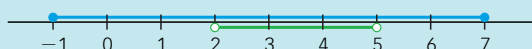
- a) $[-1, 5] \cup (2, 7)$



- b) $[-1, 2] \cup (5, 7)$

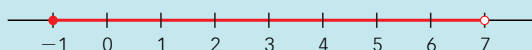


- c) $[-1, 7] \cup (2, 5)$

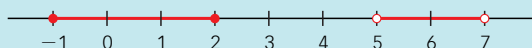


SEGON. Expressem gràficament la unió com un sol interval, si és possible.

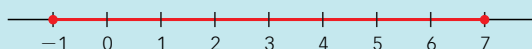
- a) $[-1, 5] \cup (2, 7)$



- b) $[-1, 2] \cup (5, 7)$



- c) $[-1, 7] \cup (2, 5)$



TERCER. Escrivim l'interval en forma algebàrica o numèrica, i ens fixem si els extrems pertanyen a la unió dels intervals.

- a) $[-1, 5] \cup (2, 7)$

Ho podem escriure com un interval ja que hi ha una sola línia ressaltada, l'extrem inferior pertany a l'interval i l'extrem superior no.

$$[-1, 5] \cup (2, 7) = [-1, 7)$$

- b) $[-1, 2] \cup (5, 7)$

No ho podem escriure com un interval i, per tant, ho deixem indicat.

$$[-1, 2] \cup (5, 7)$$

- c) $[-1, 7] \cup (2, 5)$

Ho podem escriure com un interval i tots dos extrems pertanyen a l'interval.

$$[-1, 7] \cup (2, 5) = [-1, 7]$$

PRACTICA

47. Calcula la unió d'aquests intervals:

- a) $(-4, -2] \cup (-3, 0)$
- b) $(2, 8] \cup [-2, 0)$

Intervals

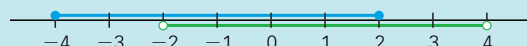
Efectuar la intersecció de dos intervals

Calcula les unions d'intervals següents:

- a) $[-4, 2] \cap (-2, 4)$
- b) $[1, 5] \cap (7, 9)$
- c) $[-1, 3] \cap (-3, 5)$

PRIMER. Dibuixem els dos intervals en la mateixa recta.

- a) $[-4, 2] \cap (-2, 4)$



- b) $[1, 5] \cap (7, 9)$

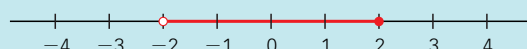


- c) $[-1, 3] \cap (-3, 5)$

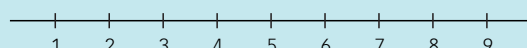


SEGON. Expressem gràficament la intersecció.

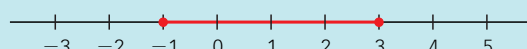
- a) $[-4, 2] \cap (-2, 4)$



- b) $[1, 5] \cap (7, 9)$



- c) $[-1, 3] \cap (-3, 5)$



TERCER. Escrivim l'interval en forma algebàrica o numèrica, i ens fixem si els extrems pertanyen a la intersecció dels intervals.

- a) $[-4, 2] \cap (-2, 4)$

L'extrem inferior no pertany a l'interval i l'extrem superior sí.

$$[-4, 2] \cap (-2, 4) = (-2, 2]$$

- b) $[1, 5] \cap (7, 9)$

La intersecció no conté cap punt de la recta real, per tant no té intersecció.

$$[1, 5] \cap (7, 9) = \emptyset$$

- c) $[-1, 3] \cap (-3, 5)$

Ho podem escriure com un interval i tots dos extrems pertanyen a l'interval.

$$[-1, 3] \cap (-3, 5) = [-1, 3]$$

PRACTICA

48. Calcula la intersecció dels intervals següents:

- a) $(-4, -2] \cap (-3, 0)$
- b) $(2, 8] \cap [-2, 0)$

Intervals

Calcular intervals encaixats que continguin un nombre irracional

Escriu els cinc primers intervals encaixats, els extrems dels quals són les aproximacions per defecte i per excés, on es troba $\sqrt{20}$, indica quin error comets en cada un.

PRIMER. Determinem amb la calculadora l'expressió decimal del nombre. $\sqrt{20} = 4,4721359\dots$

SEGON. Calculem els extrems dels intervals començant per les unitats, és a dir, les seves amplituds seran d'una unitat, un dècim, un centèsim, un mil·lèsim i un deumil·lèsim, respectivament.

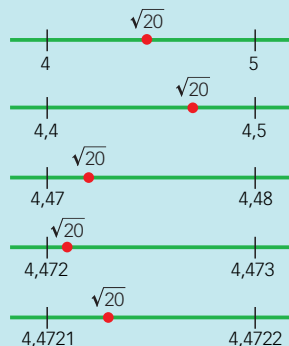
$$4 < \sqrt{20} < 5 \longrightarrow (4, 5)$$

$$4,4 < \sqrt{20} < 4,5 \longrightarrow (4,4; 4,5)$$

$$4,47 < \sqrt{20} < 4,48 \longrightarrow (4,47; 4,48)$$

$$4,472 < \sqrt{20} < 4,473 \longrightarrow (4,472; 4,473)$$

$$4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722 \longrightarrow (4,4721; 4,4722)$$



TERCER. L'error màxim, prenent com a aproximació un punt de l'interval, és més petit que la seva amplitud

$$(4, 5) \longrightarrow \text{Error} < 5 - 4 = 1$$

$$(4,4; 4,5) \longrightarrow \text{Error} < 4,5 - 4,4 = 0,1$$

$$(4,47; 4,48) \longrightarrow \text{Error} < 4,48 - 4,47 = 0,01$$

$$(4,472; 4,473) \longrightarrow \text{Error} < 4,473 - 4,472 = 0,001$$

$$(4,4721; 4,4722) \longrightarrow \text{Error} < 4,4722 - 4,4721 = 0,0001$$

No calculem l'error quan prenem com a aproximació qualsevol dels extrems, sinó la cota d'error comès.

La cota d'error comès és de l'ordre de l'aproximació, és a dir:

- Si els extrems de l'interval són aproximacions als dècims, la cota d'error és un dècim.
- Si són aproximacions als centèsims, la cota és un centèsim, i així successivament.

PRACTICA

49. Escriu els cinc primers intervals encaixats dels nombres $\sqrt{22}$, π i Φ .

Notació científica

Sumar i restar nombres en notació científica

Calcula $9,85 \cdot 10^2 - 1,91 \cdot 10^3 + 4,2 \cdot 10^{-1}$.

PRIMER. Igualet els ordres de magnitud. Per fer-ho, escollim l'exponent més gran i multipliquem o dividim la resta de sumands per potències de 10.

$$9,85 \cdot 10^2 = 0,985 \cdot 10^3$$

$$1,91 \cdot 10^3 = 1,91 \cdot 10^3$$

$$4,2 \cdot 10^{-1} = 0,00042 \cdot 10^3$$

$$9,85 \cdot 10^2 - 1,91 \cdot 10^3 + 4,2 \cdot 10^{-1} = 0,985 \cdot 10^3 - 1,91 \cdot 10^3 + 0,00042 \cdot 10^3$$

SEGON. Sumem o restem les mantisses i mantenim el mateix ordre de magnitud.

$$(0,985 - 1,91 + 0,00042) \cdot 10^3 = -0,92458 \cdot 10^3$$

TERCER. Transformem el resultat en notació científica.

$$-0,92458 \cdot 10^3 = -9,2458 \cdot 10^2$$

PRACTICA

50. Opera en notació científica. a) $6,4 \cdot 10^{-6} - 5,1 \cdot 10^{-4} + 9,3 \cdot 10^{-2}$

b) $5,1 \cdot 10^6 - 5,2 \cdot 10^4 + 5,3 \cdot 10^2$

Radicals

Escriure certes expressions mitjançant un sol radical

Opera amb aquestes expressions fins a convertir-les en un sol radical.

a) $2^{-\frac{5}{3}}$

b) $\sqrt[3]{7}$

PRIMER. Escrivim l'expressió com una potència d'exponent fraccionari, amb l'exponent de signe positiu.

a) $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}}$

b) $\sqrt[3]{7} = (\sqrt[3]{7})^{\frac{1}{2}} = (7^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{6}}$

SEGON. Expressem la potència d'exponent fraccionari com un radical.

a) $\frac{1}{2^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2^2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$

b) $7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7}$

PRACTICA

51. Converteix les expressions següents en un sol radical:

a) $5^{-\frac{2}{3}}$

c) $(-5)^{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt[3]{4\sqrt{23}}$

b) $-5^{\frac{2}{3}}$

d) $(-5)^{-\frac{2}{3}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

Radicals

Introduir factors en un radical

Introdueix dins del signe radical tots els factors d'aquestes expressions:

a) $3ab\sqrt{2a}$

b) $2b\sqrt[3]{a^2b}$

c) $2a\sqrt[5]{5ab^3}$

PRIMER. Introduïm a l'arrel els factors que són fora, amb l'índex de l'arrel com a exponent.

a) $3ab\sqrt{2a} = \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot 2 \cdot a}$

b) $2b\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{2^3 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot b}$

c) $2a\sqrt[5]{5ab^3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot a^5 \cdot 5 \cdot a \cdot b^3}$

SEGON. Simplifiquem l'expressió que en resulta en el cas que sigui possible.

a) $\sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot 2 \cdot a} = \sqrt{18a^3b^2}$

b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot b^3 \cdot a^2 \cdot b} = \sqrt[3]{8a^2b^4}$

c) $\sqrt[5]{2^5 \cdot a^5 \cdot 5 \cdot a \cdot b^3} = \sqrt[5]{160a^6b^3}$

PRACTICA

52. Introdueix els factors de les expressions següents dins del signe radical:

a) $3x^2\sqrt[3]{3y}$

c) $2ab^2c\sqrt[4]{4}$

b) $8b\sqrt{8a^3b}$

d) $(2a-b)\sqrt{b}$

Racionalització

Racionalitzar fraccions amb un producte de radicals en el denominador

Racionalitza aquesta expressió:

$$\frac{3}{\sqrt[4]{3} \cdot (3 - \sqrt{8})}$$

PRIMER. Multipliquem el numerador i el denominador per les expressions necessàries per racionalitzar cadascun dels factors amb radicals que tingui el denominador.

$$\frac{3}{\sqrt[4]{3} \cdot (3 - \sqrt{8})} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot (3 + \sqrt{8})}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot (3 - \sqrt{8}) \cdot (3 + \sqrt{8})} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot (3 + \sqrt{8})}{3 \cdot (9 - 8)} = \frac{\cancel{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot (3 + \sqrt{8})}{\cancel{3} \cdot (9 - 8)} = 3 \cdot \sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt{8}$$

SEGON. Simplifiquem, si és possible, i resollem les operacions.

$$3 \cdot \sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt{8} = \sqrt[4]{3^7} + \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[4]{8^2} = \sqrt[4]{3^7} + \sqrt[4]{3^3 \cdot 8^2} = \sqrt[4]{2187} + \sqrt[4]{1728}$$

PRACTICA

53. Racionalitza les expressions següents:

a) $\frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{5}}$

b) $\frac{6}{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2 - \sqrt{5})}$

Nombres racionals i irracionals

54. Classifica aquestes fraccions en reductibles i irreductibles:

- a) $\frac{-5}{12}$ c) $\frac{15}{18}$ e) $-\frac{15}{28}$
b) $\frac{9}{6}$ d) $\frac{3}{8}$ f) $\frac{104}{-206}$

55. Calcula la fracció irreductible.

- a) $\frac{5}{200}$ c) $\frac{26}{130}$ e) $\frac{12}{400}$ g) $\frac{88}{176}$
b) $\frac{-1080}{432}$ d) $\frac{-702}{1053}$ f) $\frac{72}{243}$ h) $\frac{104}{216}$

56. Calcula x perquè les fraccions siguin equivalents..

- a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$ c) $\frac{x}{-3} = \frac{4}{6}$
b) $\frac{-5}{2} = \frac{x}{8}$ d) $\frac{4}{x} = -\frac{1}{3}$

57. Determina els valors de x perquè siguin irreductibles.

- a) La fracció pròpia $\frac{x}{18}$. b) La fracció impròpia $\frac{12}{x}$.

58. Efectua aquestes operacions amb fraccions:

- a) $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^2$ b) $\left(\frac{4}{3} : \frac{1}{6}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6}\right)^2$

59. Fes les operacions següents:

- a) $\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
b) $\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^2$

60. Expressa aquestes nombres en forma decimal:

- a) $\frac{22}{13}$ b) $\frac{43}{1000}$ c) $\frac{12}{1100}$ d) $\frac{42}{5}$

61. Indica de quin tipus són aquestes nombres decimals:

- a) 2,331 c) 6,2727... e) 4
b) 4,1234... d) 0,03131... f) -32,207

62. Determina la fracció generatriu dels nombres decimals següents:

- a) 0,2 d) 8,0002 g) 0,01
b) $3,\hat{5}$ e) $42,\widehat{78}$ h) $5,\widehat{902}$
c) 2,37 f) $10,\widehat{523}$ i) $0,01\widehat{57}$

63. Efectua per mitjà de les fraccions generatrius.

- a) $1,\hat{3} + 3,4$ c) $6,3\hat{4} + 2,\hat{5}$
b) $10,2\hat{5} - 5,\hat{7}$ d) $4,32 - 7,0\hat{2}$

64. Fes les operacions següents:

- a) $1,25 \cdot 2,\hat{5}$ c) $3,7\hat{6} \cdot 4,\hat{8}$
b) $0,0\hat{3} : 2,9\hat{2}$ d) $1,25 : 2,2\hat{5}$

65. Mitjançant les fraccions generatrius, comprova si aquestes igualtats són certes o falses:

- a) $1,\hat{9} = 2$ c) $1,8\hat{9} + 0,1\hat{1} = 2$
b) $1,\hat{3} : 3 = 0,\hat{4}$ d) $0,\hat{3} + 0,\hat{6} = 1$

66. Ordena aquests nombres decimals de més petit a més gran:

- a) $2,9\widehat{95}$ $2,\hat{9}$ $2,\widehat{95}$ $2,9\widehat{59}$ $2,9\hat{5}$
b) $4,75$ $4,\widehat{75}$ $4,7\hat{5}$ $4,775$ $4,757$ $4,7\widehat{57}$

67. Escriu un nombre racional i un d'irracional inclosos entre:

- a) $3,4$ i $3,400\widehat{23}$ c) 1 i 2 e) $-2,6\hat{8}$ i $-2,\widehat{68}$
b) $2,5\hat{2}$ i $2,\widehat{52}$ d) $5,6$ i $5,\widehat{68}$ f) $0,2$ i $0,25$

68. Sense fer operacions, escriu un nombre irracional comprès entre $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$.

69. Demostra que $2 \cdot \sqrt{5}$ és un nombre irracional.

70. Diferencia entre nombres racionals i irracionals.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{15}$ e) $\sqrt{16}$ f) $\sqrt{20}$

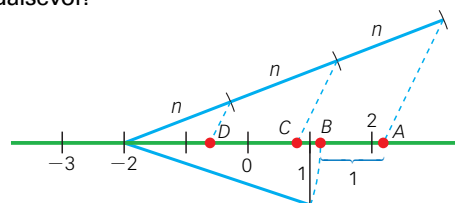
71. Dica els nombres que són irracionals.

- a) $2 + \sqrt{3}$ c) $\sqrt{12} - 2$ e) $1 - \sqrt{16}$
b) $2 \cdot \sqrt{9}$ d) $\sqrt{16} + \sqrt{2}$ f) $5\sqrt{19}$

SABER FER

Reconèixer nombres representats en la recta real

► Quins nombres representen A, B, C i D si n és un segment qualsevol?



PRIMER. Si el punt està determinat per la hipotenusa d'un triangle rectangle, en mesurem els catets i apliquem el teorema de Pitàgores.

$$1^2 + 2^2 = h^2 \rightarrow h = \sqrt{5}$$

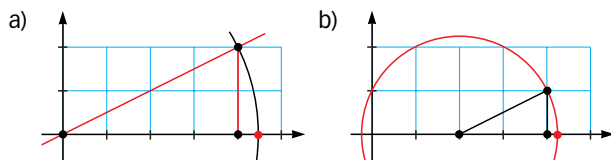
$$B = -2 + \sqrt{5} \rightarrow A = B + 1 = -1 + \sqrt{5}$$

SEGON. Si el punt està determinat per rectes paral·leles que divideixen un segment en parts iguals, els segments que es formen sobre la recta real també són iguals.

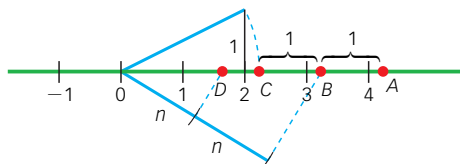
Els segments $-2D, DC$ i CA són iguals (teorema de Tales). Aquests segments divideixen en tres parts iguals la distància entre -2 i $A = 1 + \sqrt{5}$.

$$D = -2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{3} \quad C = -2 + 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{3}$$

- 72.** Quins nombres estan representats en les construccions següents?



- 73.** Quins nombres representen sobre aquesta recta numèrica els punts A, B, C i D, en què n és un segment qualsevol?



- 74.** Representa els nombres següents en la recta real:

- a) $\sqrt{10}$ c) $1 - \sqrt{2}$ e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
b) $-\sqrt{6}$ d) $\sqrt{3} - 1$ f) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

- 75.** Representa aquests nombres en la recta real:

- a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{18}}{5}$

- 76.** Ordena i representa els nombres següents en la recta real:

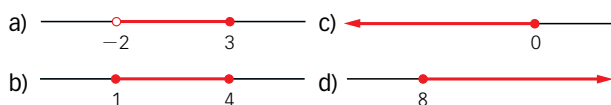
- a) 2,3 b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{9}{4}$

- 77.** Opera i classifica el tipus de nombre real.

- a) $\sqrt{2,7}$ b) $\sqrt{4,9}$ c) $\sqrt{\frac{1,3}{3}}$

Intervals

- 78.** Expressa mitjançant intervals de totes les maneres possibles.



- 79.** Descriu i representa els intervals següents:

- a) $(0, 10)$ d) $[2, 5]$ g) $(-\infty, 6]$
b) $(3, 7]$ e) $[5, 10)$ h) $(100, +\infty)$
c) $(-\infty, -2)$ f) $[-4, +\infty)$ i) $(-7, \sqrt{2})$

- 80.** Escriu l'interval que correspon a aquestes desigualtats:

- a) $1 < x < 3$ c) $5 \leq x < 9$
b) $6 < x \leq 7$ d) $10 \leq x \leq 12$

- 81.** Escriu l'interval corresponent.

- a) $x \leq -2$ c) $x > -3$ e) $x < -9$
b) $x < 5$ d) $x \geq 7$ f) $x \geq -6$

- 82.** Calcula les unions d'intervals següents:

- a) $(3, 16) \cup (-2, 5)$ c) $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{15}{2}, \frac{9}{5}\right]$
b) $[-2, 2) \cup [-11, 0]$ d) $[-\sqrt{7}, \sqrt{5}] \cup [-\sqrt{5}, \sqrt{7}]$

- 83.** Determina les interseccions d'aquests intervals:

- a) $(-1, 10) \cap (-3, 8)$
b) $\left[-\frac{4}{7}, 5\right) \cap \left[-\frac{5}{8}, 0\right]$
c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{3}\right] \cap \left[-\frac{15}{4}, \frac{9}{5}\right]$
d) $[-\sqrt{7}, \sqrt{5}] \cap [-\sqrt{5}, \sqrt{7}]$

- 84.** Donats els intervals següents, calcula:

- $A = [-4, -1]$ $B = [-3, 2]$ $C = (-2, 4)$
a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

- 85.** Donats aquests intervals, determina:

- $A = (-\infty, 1]$ $B = [0, 5)$ $C = [-1, 3]$
a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

- 86.** Expressa els intervals següents com una intersecció de dues semirectes:

- a) $\left(-1, \frac{13}{2}\right]$ e) $\left[-3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
b) $[5, 5\sqrt{3}]$ f) $\left(\frac{\sqrt{30}}{2}, \sqrt{90}\right)$
c) $\{x: 6 < x \leq \sqrt{40}\}$ g) $\left\{x: -\frac{7}{2} \leq x < -\sqrt{3}\right\}$
d) $\left\{x: -\frac{51}{4} \leq x \leq 3\right\}$ h) $\{x: -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$

- 87.** Escriu en forma d'interval i expressa-ho després com a intersecció de dues semirectes.



- a) La temperatura prevista per a demà variarà entre -1°C de mínima i 13°C de màxima.
b) Aquest jugador de futbol té menys de 27 anys.
c) L'aigua es manté en estat líquid entre 0°C i 100°C .
d) A partir dels 18 anys ja es pot votar.
e) El meu pressupost màxim per comprar un cotxe és d'11000 €.

Aproximació i errors

88. Opera i arrodoneix el resultat als dècims.

- a) $43,295 + 4,57 - 7,367$ c) $3,56 \cdot (7,4009 - 3,48)$
b) $5,32 + 4,05 \cdot 7,361$ d) $7,37 - 5,3519 : 2,1$

89. Al llarg de la història s'han utilitzat diferents aproximacions del nombre π (de valor 3,14159265...).

- A la Bíblia, el valor de π és 3.
- A l'antic Egipte s'estimava el valor en $\frac{256}{81}$, fracció que resulta de suposar que l'àrea d'un cercle coincideix amb la d'un quadrat que tingui de costat $\frac{8}{9}$ de la mida del seu diàmetre.
- A Mesopotàmia, el valor de π era $3 \cdot \frac{1}{8} = 3,125$.
- A l'antiga Xina, $\frac{355}{113}$.
- I, finalment, en els càlculs pràctics s'utilitza 3,14.

Calcula l'error absolut i relatiu de cada aproximació prenent com a valor exacte de $\pi = 3,14159265$.

90. Determina l'aproximació per arrodoniment fins als deumil·lèsims per a aquests casos:

- a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7}$ d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8}$

91. Calcula l'error absolut i l'error relatiu quan trunquem 5,73691 al centèsim.

92. Determina l'error absolut i relatiu quan arrodonim els nombres següents:

- a) $\frac{3}{11}$ al deumil·lèsim.
b) 4,3964 al centèsim.
c) $\frac{29}{4}$ al dècim.

93. Aproxima el nombre $\frac{1}{7}$ perquè l'error sigui més petit que un centèsim.

94. Aproxima el nombre 12,3456 de manera que l'error absolut sigui més petit que 0,001.

95. Determina per a quin nombre 5.432,723 seria una aproximació als mil·lèsims per defecte. És l'única resposta? Quantes respostes hi ha?

96. Calcula una aproximació als nombres següents:

- a) π amb una cota d'error inferior a un mil·lèsim.
b) $\sqrt{2}$ amb una cota d'error inferior a mig centèsim.
c) $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ amb una cota d'error més petita que 0,0001.
d) $\frac{22}{7}$ amb una cota d'error inferior a 0,00001.

Notació científica

97. Indica quins d'aquests nombres estan escrits en notació científica:

- a) 4,678 d) $9,34 \cdot 2^{10}$
b) $0,45 \cdot 10^5$ e) $4,62 \cdot 10^{-6}$
c) $3,001 \cdot 10^{17}$ f) $34,709 \cdot 10^5$

98. Escriu els nombres següents en notació científica i indica'n la mantissa i l'ordre de magnitud:

- a) 15 000 000 000 e) 4 598 000 000
b) 0,00000051 f) 0,0967254
c) 31 940 000 g) 329 000 000
d) 0,0000000009 h) 111 000

99. Efectua aquestes operacions amb nombres en notació científica:

- a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$

100. Calcula el resultat d'aquestes operacions:

- a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

101. Efectua les operacions següents:

- a) $7,3 \cdot 10^4 \cdot 5,25 \cdot 10^{-3}$
b) $8,91 \cdot 10^{-5} \cdot 5,7 \cdot 10^{14}$
c) $(8,3 \cdot 10^6) : (5,37 \cdot 10^2)$
d) $(9,5 \cdot 10^{-6}) : (3,2 \cdot 10^3)$

102. Simplifica el resultat d'aquestes operacions:

- a) $\frac{6,147 \cdot 10^{-2} \cdot 4,6 \cdot 10^3}{7,9 \cdot 10^8 \cdot 6,57 \cdot 10^{-5}}$
b) $\frac{3,92 \cdot 10^4 \cdot 5,86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9,2 \cdot 10^{13}}$

103. Donats els nombres següents escrits en notació científica, calcula:

$$A = 2,7 \cdot 10^8 \quad B = 5,4 \cdot 10^9 \quad C = 7,1 \cdot 10^{12}$$

- a) $A \cdot B : C$ c) $A + B \cdot C$
b) $B - A + C$ d) $(B + C) : A$

104. Donats els nombres següents en notació científica, calcula:

$$A = 3,2 \cdot 10^6 \quad B = 8,2 \cdot 10^{11} \quad C = 5,1 \cdot 10^{-6}$$

- a) $A \cdot B \cdot C$ c) $A + B \cdot C$
b) $(A : C) \cdot B$ d) $A \cdot C^2$

Radicals

- 105.** Calcula el valor numèric dels radicals que tens a continuació:

a) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt[5]{-100\,000}$ e) $\sqrt[4]{625}$
b) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[3]{-216}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

- 106.** Escribe dos radicals equivalents a cadascun dels següents:

a) $\sqrt[3]{2^5}$ c) $\sqrt[6]{5^3}$ e) $\sqrt[8]{2^6}$
b) $\sqrt[12]{7^4}$ d) $\sqrt[2]{2^3}$ f) $\sqrt[20]{3^{15}}$

- 107.** Simplifica els radicals que tens a continuació:

a) $\sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt{27}$ g) $\sqrt[6]{27}$
b) $\sqrt[3]{54}$ e) $\sqrt{75}$ h) $\sqrt[8]{625}$
c) $\sqrt[4]{32}$ f) $\sqrt[5]{128}$ i) $\sqrt[3]{343}$

- 108.** Escribe en cada cas si el desenvolupament de la igualtat és cert o fals. Si és fals, corregeix-lo.

a) $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[3]{8^3}$ c) $\sqrt[5]{25^{10}} = \sqrt{5^{10}} = \sqrt[3]{5^{12}}$
b) $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = \sqrt{3^8}$ d) $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^9}$

- 109.** Escribe aquestes potències d'exponent fraccionari com un radical:

a) $\frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{5}}}$ c) $\left(5 \cdot 5^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^3$
b) $3^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ d) $\frac{\left(7^{\frac{1}{5}} \cdot 7\right)^{-\frac{1}{2}}}{7^{\frac{4}{5}}}$

- 110.** Escribe aquests radicals com a potències d'exponent fraccionari:

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ g) $(\sqrt{a})^3$
b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$
c) $\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt{\frac{1}{a}}}$

- 111.** Expressa mitjançant un sol radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$
b) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$ f) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{3}}}$ i) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{256}}}}$

- 112.** Extreu tots els factors possibles dels radicals següents:

a) $\sqrt{a^3b^4}$ c) $\sqrt[3]{a^3b^2c^7}$ e) $\sqrt[3]{a^3b^3 + c^3}$
b) $\sqrt{a^2b^5c^3}$ d) $\sqrt{a^3b^4 + a^2b^2}$ f) $\sqrt{a^4c^2 + a^4b^2}$

- 113.** Extreu els factors que puguis d'aquests radicals:

a) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{250}$ g) $\sqrt[4]{224}$
b) $\sqrt{80}$ e) $\sqrt[3]{1080}$ h) $\sqrt[5]{-486}$
c) $\sqrt[3]{189}$ f) $\sqrt[4]{720}$ i) $\sqrt[3]{528}$

- 114.** Aquesta expressió amb radicals és un nombre enter. Calcula aquest nombre.

$$2\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{25} \cdot \sqrt[6]{8}$$

- 115.** Extreu factors dels radicals següents:

a) $\sqrt{32x^3y^2}$ d) $\sqrt[4]{256x^3y^{15}}$
b) $\sqrt[3]{5^5x^6}$ e) $\sqrt[4]{x^{12}y^9z^{19}}$
c) $\sqrt[3]{125x^7y^2}$ f) $\sqrt[5]{729x^4y^{22}z^{15}}$

- 116.** L'expressió $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ és un nombre enter. Determina'l.

- 117.** Simplifica les expressions següents:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^{12}}{a^{18}}}}$ d) $\frac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}}$
b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}}$ e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}}$
c) $\sqrt[3]{\frac{8a^4}{81b^3}}$ f) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

- 118.** Copia i completa les potències que falten.

a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^{\square} \cdot 5}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{2^{\square} \cdot 7}{3^{\square}}}$
b) $3^{\square}\sqrt{2} = \sqrt{3^6 \cdot 2}$ e) $3^{\square}\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{3^6 \cdot 2}{5}}$
c) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\frac{5}{2^{\square}}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{5}}{3^2} = \sqrt[3]{\frac{5}{3^{\square}}}$

- 119.** Efectua les sumes i restes de radicals següents:

a) $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98}$
b) $5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{108}$
c) $\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - \frac{2}{3}\sqrt{54} - \sqrt{18}$
d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{3}$

- 120.** Introdueix els factors dins del radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$
b) $4\sqrt[4]{20}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$
c) $3\sqrt[5]{15}$ f) $2\sqrt[3]{7}$

- 121.** Introdueix els factors en el radical.

a) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

122. Introdueix els factors dins del radical si és possible.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a \cdot \sqrt{\frac{4a-1}{2a}} & \text{c)} -2ab^2\sqrt[3]{ab} & \text{e)} 5 + \sqrt{2} \\ \text{b)} \frac{4ab}{c} \cdot \sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}} & \text{d)} \frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}} & \text{f)} -a^2\sqrt[3]{a} \end{array}$$

123. Efectua les operacions següents i simplifica:

$$\begin{array}{l} \text{a)} (5\sqrt{2} + 3) \cdot (2 + \sqrt{2}) \\ \text{b)} (1 - 2\sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{2}) \\ \text{c)} (-\sqrt{3} + 5) \cdot (5 - 2\sqrt{3}) \\ \text{d)} (\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{2}) \\ \text{e)} (\sqrt{2} - 5) \cdot (4\sqrt{2} - 3) \\ \text{f)} (-2\sqrt{7} - 5) \cdot (\sqrt{7} - 3\sqrt{5}) \end{array}$$

124. Expressa amb un sol radical el resultat de les operacions següents:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt{5^3} \\ \text{b)} (\sqrt[3]{7^2} \cdot 8 \cdot \sqrt[4]{8^5}) : \sqrt{7 \cdot 8^3} \\ \text{c)} \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 4^2} \cdot \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^3} \\ \text{d)} \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 5} : (\sqrt{2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3}) \end{array}$$

125. Efectua aquestes operacions amb radicals:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^4} & \text{c)} \sqrt[5]{2a^3b^4} : \sqrt[3]{4ab^2} \\ \text{b)} \sqrt[3]{3a^2b} \cdot \sqrt{2ab^3} & \text{d)} \sqrt[3]{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{a^3b} \end{array}$$

126. Calcula el resultat d'aquests productes:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}} \\ \text{b)} \sqrt[3]{5\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3}+1} \\ \text{c)} \sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ \text{d)} \sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \end{array}$$

127. Efectua les operacions que tens a continuació i simplifica:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{\sqrt[4]{2^3} \cdot 2^{-4} \cdot \sqrt[3]{2}}{2^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{5}{2}}} & \text{c)} \left(\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \text{b)} \left(81^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \right) : \sqrt{3} & \text{d)} \sqrt{6 + \sqrt[3]{20 + \sqrt{47 + \sqrt[4]{16}}}} \end{array}$$

128. Efectua les operacions amb radicals que tens a continuació:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}} \right)^{-2} & \text{c)} \left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{2a} \right)^2 \\ \text{b)} \left(\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{2a}{5}} \right)^{-4} & \text{d)} \left(\sqrt{6a} + \sqrt{\frac{2a}{3}} \right)^2 \end{array}$$

129. Simplifica els radicals següents:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{a^2 + 4 - 4a} & \text{b)} \sqrt{\frac{1}{2} + 2a^2 + 2a} \end{array}$$

Racionalització

130. Racionalitza les expressions següents i simplifica'n el resultat:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{3}{4\sqrt{3}} & \text{c)} \frac{12}{\sqrt[3]{9}} & \text{e)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} \\ \text{b)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{12}} & \text{d)} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3}} & \text{f)} \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3}} \end{array}$$

131. Racionalitza aquestes expressions i simplifica'n el resultat:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} & \text{c)} \frac{3\sqrt{5} - 2}{\sqrt[4]{5^3}} \\ \text{b)} \frac{7\sqrt{7} - 7}{\sqrt[3]{7}} & \text{d)} \frac{3\sqrt{5} - 1}{\sqrt[5]{-5^3}} \end{array}$$

132. Elimina les arrels del denominador.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{\sqrt{2} + 1} & \text{d)} \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ \text{b)} \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} & \text{e)} \frac{7}{\sqrt{11} - 3} \\ \text{c)} \frac{-5}{\sqrt{3} - 2} & \text{f)} \frac{-5}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} \end{array}$$

133. Racionalitza les expressions següents:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{2}{\sqrt{3} - 2} & \text{e)} \frac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 1} \\ \text{b)} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} & \text{f)} \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} \\ \text{c)} \frac{-3}{\sqrt{2} - 2} & \text{g)} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}} \\ \text{d)} \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - \sqrt{6}} & \text{h)} \frac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5} - \sqrt{3}} \end{array}$$

134. Elimina arrels del denominador de les expressions que tens a continuació:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{\sqrt[3]{5}}{1 - 2\sqrt{5}} & \text{d)} \frac{\sqrt{8}(5 - \sqrt{18})}{\sqrt{2}(\sqrt{8} - 2)} \\ \text{b)} \frac{\sqrt[5]{2}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 5\sqrt{3}} & \text{e)} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{27}(\sqrt{5} + 2)} \\ \text{c)} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt{2} - 3\sqrt{5}} & \text{f)} \frac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{5}} \end{array}$$

135. Racionalitza les expressions següents i simplifica'n el resultat:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} & \text{c)} \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}} \\ \text{b)} \frac{1}{1 - \sqrt{5} + \sqrt{7}} & \text{d)} \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{12}} \end{array}$$

136. Racionalitza aquestes expressions:

a) $\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$ b) $\frac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

137. Racionalitza les expressions següents:

a) $\frac{3}{(3\sqrt{2} - 5) \cdot (4\sqrt{2} - 3)}$ c) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt{125} + 2)}$
 b) $\frac{-2}{\sqrt[3]{4} \cdot (5\sqrt{3} - 1)}$ d) $\frac{-4}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$

138. Efectua aquestes operacions:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

→ SABER FER

Resoldre operacions entre fraccions amb radicals

► Resol $\frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}.$

PRIMER. Racionalitzem cadascuna de les fraccions amb radicals en el denominador.

$$\frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} &= \frac{3 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \\ &= \frac{3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}{5 - 2} = \sqrt{5} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

SEGON. Operem amb les fraccions racionalitzades.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1 - 2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

139. Efectua aquestes operacions:

a) $\frac{2}{3 - 2\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[6]{5}}$
 b) $\frac{2}{1 + \sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3} - 7}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{2} - 5} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

140. Calcula l'expressió següent:

$$\frac{\sqrt{128} + 2\sqrt{8} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} - 4\sqrt{2}$$

Logaritmes

141. Calcula, a partir de la definició, els logaritmes següents:

a) $\log_3 243$ e) $\ln e^2$
 b) $\log_9 81$ f) $\ln e^{-14}$
 c) $\log 1\,000\,000$ g) $\log_7 343$
 d) $\log 0,00001$ h) $\log_4 0,0625$

142. Utilitzant la definició, calcula els logaritmes següents:

a) $\log_9 243$ c) $\log_{32} 4$
 b) $\log_{25} 125$ d) $\log_4 512$

143. Determina quines de les igualtats següents són certes i corregeix les que no ho siguin:

a) $\log(a + b) = \log a + \log b$
 b) $\log 0 = 1$
 c) $\log(a : b) = \log a - \log b$
 d) $\log(a^b) = \log b \cdot \log a$

144. Calcula el resultat d'aquestes expressions aplicant les propietats dels logaritmes:

a) $2 \log_4 16 + \log_2 32 - 3 \log_7 49$
 b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$
 c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

145. Si sabem que $\log 7 = 0,8451$ calcula aplicant les propietats dels logaritmes:

$$\log 28 + \log 15 - \log 6$$

146. Calcula els logaritmes següents utilitzant la calculadora:

a) $\log_5 36^2$ c) $\log_6 100$
 b) $\log_2 \sqrt{31}$ d) $\log_4 31^5$

147. Si $\log e = 0,4343$; quant val $\ln 10$? I $\ln 0,1$?

148. Si sabem que $\log 4 = 0,6021$ calcula els logaritmes següents:

a) $\log 2$ c) $\log 0,2$
 b) $\log \frac{1}{4}$ d) $\log 4\,000$

149. Si sabem que $\ln a = 0,6$ i que $\ln b = 2,2$ calcula els logaritmes següents:

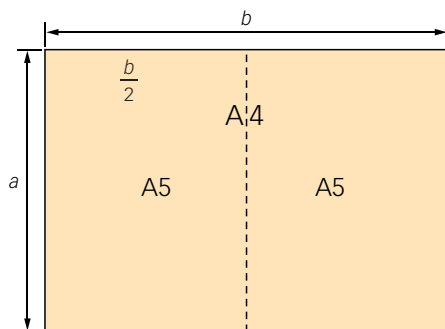
a) $\ln \sqrt{a}$ c) $\ln \sqrt[4]{\frac{ab}{e^2}}$
 b) $\ln \sqrt[3]{b}$ d) $\ln \frac{\sqrt{a^{-5}}}{\sqrt[3]{b}}$

150. Calcula el valor de x.

a) $\log_3 x = 5$ e) $\log_3 x = -5$
 b) $\log_5 x = 3$ f) $\log_5 x = -3$
 c) $\log_2 x = -1$ g) $\log_2 x = 0$
 d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$ h) $\log_{23} x = 4$

Problemes amb nombres reals

- [illegible]



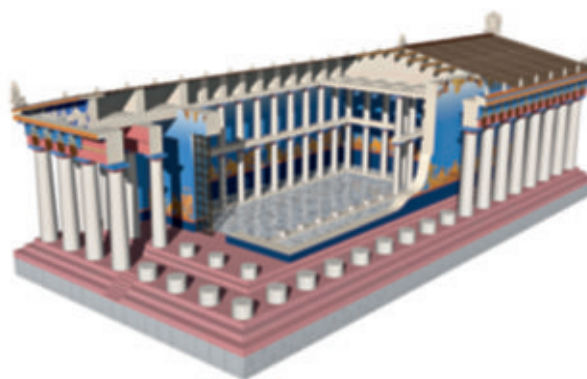
- Quina relació hi ha entre els costats dels rectangles?
- Se sap que un rectangle de format DIN A0 té una àrea d' 1 m^2 . Determina quines són les dimensions del full de format DIN A4.

- 155.** La distància entre la Terra i Júpiter és de $6,32 \cdot 10^6$ km. Una nau que fes el viatge entre els dos planetes en un any, a quina velocitat hauria d'anar?
- 156.** Des de l'antiguitat apareix sovint el nombre d'or, Φ , en proporcions de la natura però també en obres d'art o bé en construccions com, per exemple, el Partenó grec.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Comprova la propietat següent de l'invers del nombre d'or:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$



- 157.** Quin tipus de decimal obtenim de la fracció $\frac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, en què a és un nombre enter?
- 158.** Existeix algun cas en el qual l'aproximació per excés i per defecte coincideixin?
- Si considerem l'arrodoniment, determina si aquesta aproximació pot coincidir amb l'aproximació per excés o per defecte.
- 159.** Comprova cadascuna de les igualtats que tens a continuació:
- a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{ab}$
- b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$
- c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
- d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$
- e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$
- f) $a\sqrt{b+c} = \sqrt{ab+ac}$
- g) $\sqrt[4]{a^8b^2} = a\sqrt{b}$
- h) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$
- 160.** Escriu el nombre 2^{500} en notació científica.

- Sabent que $\log 2 = 0,3010$ i que $\sqrt{10} = 3,1622$.
- Ho podries fer amb una calculadora científica?
- Expressa 5^{500} en notació científica tenint en compte el primer apartat.

Amplia

Reflexiona sobre la teoria

161. Escull la resposta adequada.

Si $\log_x y + \log_y x = 7$, $(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2$ és igual a:	40	43	45	47	49
Quin nombre dels següents és $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$?	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	$3\sqrt{3}$	-6
Quants nombres formats per tres xifres consecutives (no necessàriament ordenades) tenen un nombre senar de divisors?	1	2	3	4	5
En quin interval es troba el nombre $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{3})} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3})}$?	$(-2, -1)$	$(1, 2)$	$(-3, -2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$
Si $y = \frac{x}{x + \frac{x}{x+y}}$, per a quins valors de x resulta que y no és un nombre real?	-6	-3	1	3	6

162. Si una fracció $\frac{a}{b}$ és irreductible, digues si les fraccions $\frac{a+b}{a \cdot b}$ i $\frac{a-b}{a \cdot b}$ també són irreductibles.

163. Explica com es racionalitzen les fraccions del tipus:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$$

Pensa una mica més

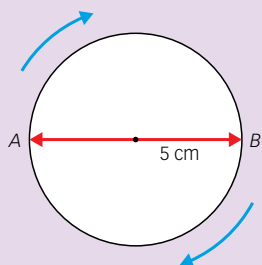
164. Dues peces mòbils d'una màquina es desplacen a la mateixa velocitat. La primera peça descriu una circumferència de 5 cm de radi i la segona es desplaça d'un extrem a l'altre del diàmetre d'aquesta circumferència.



Si les dues peces surten d'un mateix punt, coincidiran en algun moment?

CLAU

Has de tenir en compte l'esquema següent:



A més, recorda que el nombre π és irracional.

Olimpíades matemàtiques

165. Demostra la igualtat següent:

$$\sum_{k=1}^{99} \log \sqrt{\frac{1+k}{k}} = 1$$

166. Demostra que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$, expressat en forma decimal, és un nombre mixt per a qualsevol valor de n .

167. Apilen en capes un munt de taronges, de manera que en el forat de 4 taronges d'una capa en col·loquen una altra de la capa superior.

La primera capa, comptant per sota, té m files i n columnes, i l'última capa té només una fila; si m és el nombre de diagonals d'un decàgon i n és el nombre més petit que dividit entre 4 dóna residu 3, entre 5 dóna residu 4 i entre 6 dóna residu 5, quantes taronges hi ha?



PER A QUÈ SERVEIXEN ELS NOMBRES REALS?

Per determinar la velocitat en un accident de trànsit

Quan un cotxe frena bruscament, a una velocitat considerable, produeix marques a la carretera a causa d'una transferència de pes a les rodes davanteres. Gràcies a aquestes marques és possible calcular la velocitat a la qual anava un automòbil abans de frenar, en el cas d'un accident de trànsit.

En general, la velocitat inicial d'un automòbil en un accident s'estima a partir de la longitud de les marques de frenada x per mitjà de l'expressió:

$$v = \sqrt{-2ax}$$

Però si un cotxe frena bloquejant les quatre rodes, s'atura molt abans que si frena bloquejant només dues rodes. Per determinar correctament la velocitat inicial d'un accident cal tenir en compte el repartiment de càrrega entre les rodes. Si les quatre rodes es bloquegen, l'acceleració a compleix que $a = -\mu g$, en què g és la gravetat, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, i μ és el coeficient de fregament de la carretera.

Així, si substituïm en l'expressió anterior, la velocitat inicial en m/s respecte de la distància de frenada x l'obtenim per mitjà de l'expressió següent:

$$v = \sqrt{2\mu gx}$$



Els coeficients de fregament més comuns per a vehicles, d'acord amb el tipus de paviment, són:

Tipus de paviment	Asfalt	Ciment	Neu	Grava
Coeficient de fregament μ	0,75	0,9	0,3	0,5



LLEGEIX I COMPRÈN

1. Contesta.
 - a) Per què es fan marques a la carretera quan un cotxe frena bruscament?
 - b) Quin és el valor de la gravetat g ?
2. Consulta què és el coeficient de fregament d'una superfície.



INTERPRETA

3. Quines magnituds representen les variables μ , g i x en l'expressió de la velocitat inicial respecte de la distància de frenada?



REFLEXIONA

4. És correcta aquesta igualtat?

$$v = \sqrt{2\mu gx} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$$

5. Quin és l'índex de l'expressió radical?



APLICA

6. Calcula la velocitat d'un automòbil si sabem que ha frenat bruscament i ha deixat una marca de frenada de 30 m en una carretera d'asfalt.
7. Esbrina quines són les campanyes dels responsables de trànsit de Catalunya per evitar accidents.