PROYECTO
SABER
HACER

BACHILLERATO 2

Física

SERIE **INVESTIGA**

El libro Física, para segundo curso de Bachillerato, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:

Texto:
M.ª del Carmen Vidal Fernández
David Sánchez Gómez

Perfiles profesionales:
José M.ª Prada Carrillo

EDICIÓN
Laura Muñoz Ceballos

EDITOR EJECUTIVO
David Sánchez Gómez

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Antonio Brandi Fernández

Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

SANTILLANA

Esquema de las unidades

Página de introducción a la unidad

Al principio de cada unidad se ilustra para reflexionar alrededor de los contenidos y centrar la atención.

Contenidos de la unidad. Un esquema de la exposición de los contenidos y técnicas o procedimientos.

Ilustración. Una fotografía que acerca a los contenidos de la unidad.

Texto. Una reflexión introductoria sobre la importancia de los contenidos.

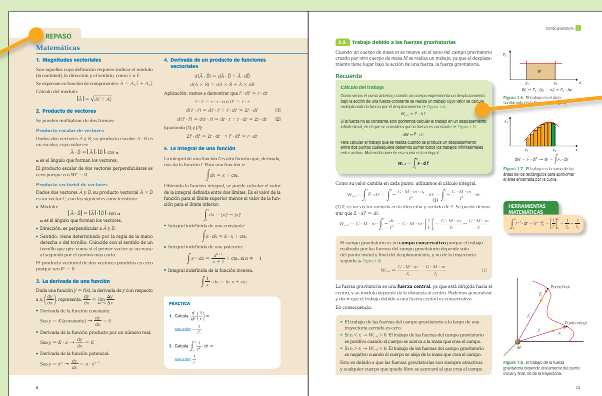
Título de la unidad.

Para comenzar. Algunas preguntas que abran la reflexión, o el debate, en relación con los contenidos que se van a estudiar.

Páginas de desarrollo de los contenidos

La estructura del desarrollo de los contenidos está compuesta por varios elementos.

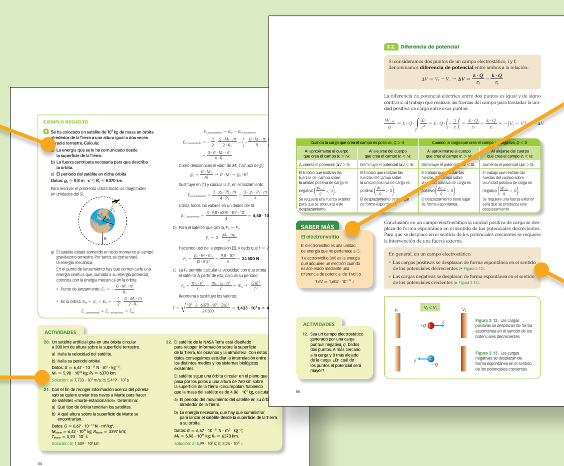
Repaso. Antes de tratar los contenidos de cada unidad se recuerdan contenidos de Matemáticas o Física y Química necesarios para abordar la unidad.



Recuerda. Aquí se incluyen contenidos de cursos anteriores o estudiados en unidades precedentes.

Ejemplos resueltos. A lo largo de toda la unidad se incluyen numerosos ejemplos resueltos, numéricos o no, que ayudan a poner en práctica los conceptos expuestos.

Actividades al pie. Recoge actividades que acompañan el trabajo de los contenidos próximas a donde se exponen.



Saber más. Se incluyen contenidos relacionados con la materia, pero que no son esenciales para el desarrollo de la unidad.

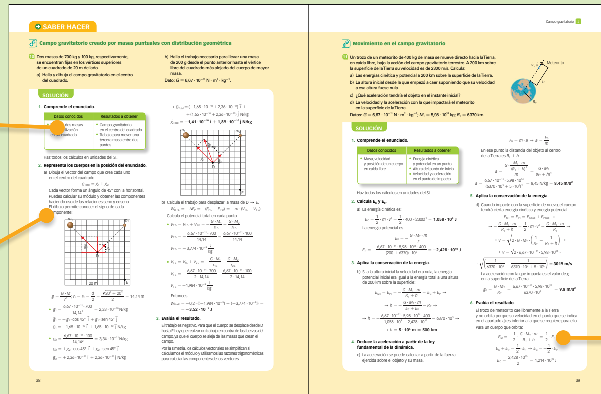
Destacados. Los contenidos y definiciones esenciales aparecen destacados con un fondo de color.

SABER HACER

Muestra procedimientos que deben dominarse para mostrar que están asimilados los contenidos de la unidad.

Comprende el enunciado. Con un sencillo esquema se invita a la lectura comprensiva de la actividad propuesta.

Desarrollo. Paso a paso se van dando las indicaciones de cómo desarrollar la actividad propuesta.



Evalúa el resultado. En cada caso se debe valorar el resultado conseguido, dentro del contexto de la actividad.

Actividades finales

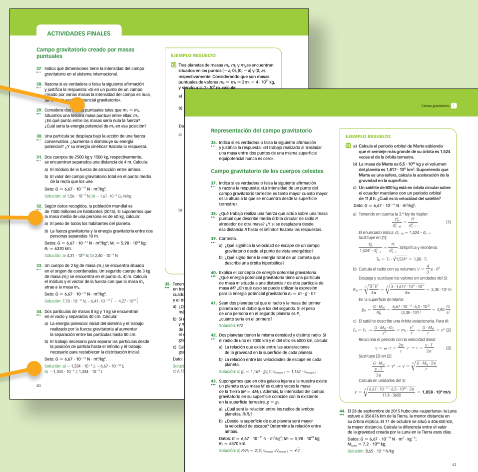
Colección de actividades que permiten asentar el aprendizaje.

Apartados. Las actividades están clasificadas según los contenidos de la unidad.

Nivel de dificultad. La dificultad de cada actividad se muestra según el código:

●●● Fácil ●●● Media ●●● Difícil

Solución. Hay una línea con el resultado para las actividades con solución numérica. Así, se facilita el trabajo personal del alumnado.



Resumen

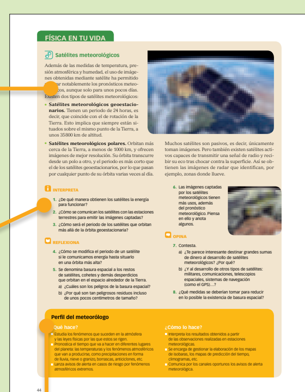
Un repaso de los contenidos más importantes recogidos en la unidad.

Física en tu vida

Cada unidad se cierra con material complementario.

Al final de cada unidad, en una página se expone algún aspecto, más o menos cotidiano, en relación con el contenido de la unidad.

Las actividades del pie de página invitan a la lectura comprensiva, despiertan la reflexión y la opinión y ayudan a poner en práctica las TIC.



Al final de cada unidad se señalan posibles salidas profesionales relacionadas

Competencias

A lo largo del libro, diferentes iconos señalan e identifican la competencia concreta que se trabaja en cada actividad o apartado.

- Competencia matemática, científica y tecnológica
- Comunicación lingüística
- Competencia social y cívica
- Competencia digital
- Conciencia y expresión artística
- Aprender a aprender
- Iniciativa y emprendimiento

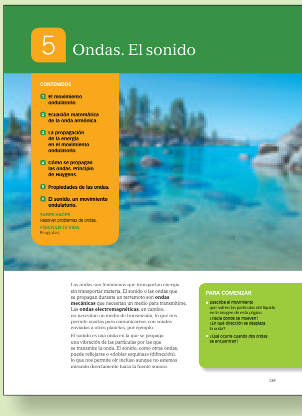
Índice


1 Campo gravitatorio
Pág. 7

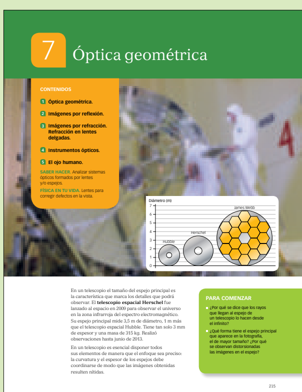

2 Campo eléctrico


3 Campo magnético


4 Inducción electromagnética


5
Ondas. El sonido


6
Ondas electromagnéticas

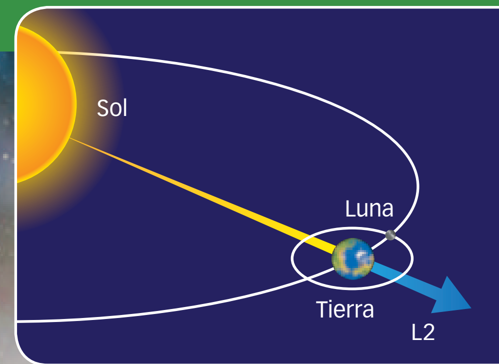

7
Óptica geométrica


8
Relatividad

Índice

Anexos

1 Campo gravitatorio

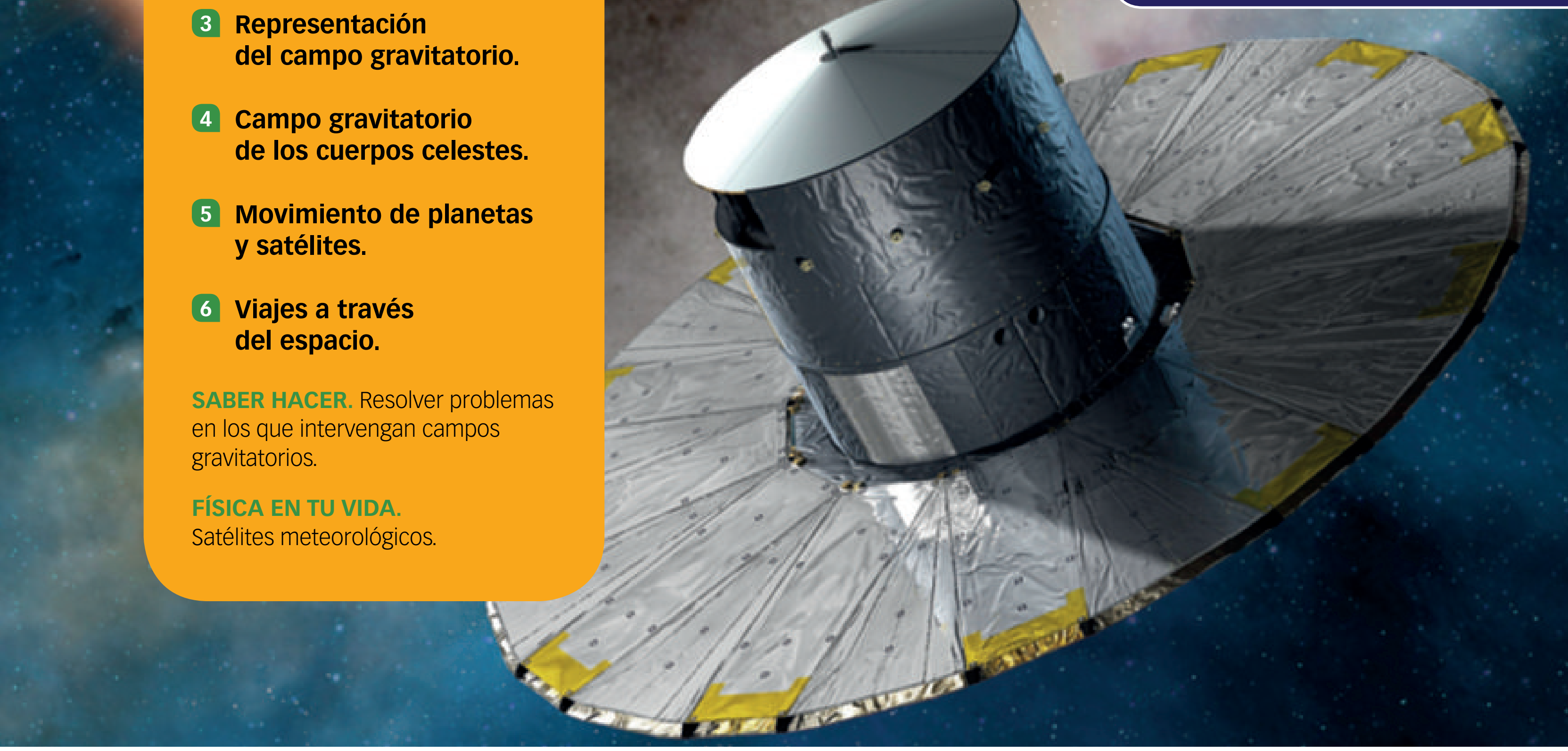


CONTENIDOS

1. El concepto de campo.
2. Campo gravitatorio creado por masas puntuales.
3. Representación del campo gravitatorio.
4. Campo gravitatorio de los cuerpos celestes.
5. Movimiento de planetas y satélites.
6. Viajes a través del espacio.

SABER HACER. Resolver problemas en los que intervengan campos gravitatorios.

FÍSICA EN TU VIDA. Satélites meteorológicos.



La **sonda Gaia** se lanzó al espacio en 2013 para estudiar miles de estrellas de nuestra galaxia, la Vía Láctea. Se situó en un punto del espacio conocido como punto de Lagrange L2, situado en la línea que une la Tierra y el Sol, más allá de la posición ocupada por la Tierra, a 1,5 millones de kilómetros de nuestro planeta. Al estar en ese punto, la sonda rota de manera sincronizada con la Tierra, de modo que permanece sobre el mismo punto del cielo.

La ventaja es que así es más sencillo calibrar el instrumento y, además, la sonda se encuentra protegida de la radiación solar, pues los instrumentos pueden permanecer siempre orientados en la dirección opuesta al Sol.

PARA COMENZAR

- ¿Se anula la fuerza gravitatoria ejercida por el Sol y la Tierra en el punto L2?
- ¿Y en algún punto situado en la línea que une el Sol y la Tierra?
- ¿Entonces, por qué permanecerá estacionaria la sonda Gaia en L2?

Matemáticas

1. Magnitudes vectoriales

Son aquellas cuya definición requiere indicar el módulo (la cantidad), la dirección y el sentido, como $\vec{v}$ o $\vec{F}$.

Se expresan en función de componentes: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$

Cálculo del módulo:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

2. Producto de vectores

Se pueden multiplicar de dos formas:

Producto escalar de vectores

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, su producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es un escalar, cuyo valor es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$$

α es el ángulo que forman los vectores.

El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero porque $\cos 90° = 0$.

Producto vectorial de vectores

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, su producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector $\vec{C}$, con las siguientes características:

- Módulo:

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

  α es el ángulo que forman los vectores.
- Dirección: es perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
- Sentido: viene determinado por la regla de la mano derecha o del tornillo. Coincide con el sentido de un tornillo que gire como si el primer vector se acercase al segundo por el camino más corto.

El producto vectorial de dos vectores paralelos es cero porque $\operatorname{sen} 0° = 0$.

3. La derivada de una función

Dada una función $y = f(x)$, la derivada de y con respecto a x, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, representa: $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Derivada de la función constante:

  Sea $y = K$ (constante) $\rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$
- Derivada de la función producto por un número real:

  Sea $y = K \cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = K$
- Derivada de la función potencial:

  Sea $y = x^n \rightarrow \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$

4. Derivada de un producto de funciones vectoriales

$$d(\vec{A} \cdot \vec{B}) = d\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot d\vec{B}$$

$$d(\vec{A} \times \vec{B}) = d\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times d\vec{B}$$

Aplicación: vamos a demostrar que $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r \cdot r \cdot \cos 0° = r \cdot r$$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot d\vec{r} = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} \qquad [1]$$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d(r \cdot r) = dr \cdot r + r \cdot dr = 2r \cdot dr \qquad [2]$$

Igualando [1] y [2]:

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2r \cdot dr \rightarrow \vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$$

5. La integral de una función

La integral de una función f es otra función que, derivada, nos da la función f. Para una función x:

$$\int dx = x + \text{cte.}$$

Obtenida la función integral, se puede calcular el valor de la integral definida entre dos límites. Es el valor de la función para el límite superior menos el valor de la función para el límite inferior:

$$\int_i^f dx = [x]^f - [x]^i$$

- Integral indefinida de una constante:

$$\int k \cdot dx = k \cdot x + \text{cte.}$$

- Integral indefinida de una potencia:

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cte., si } n \neq -1$$

- Integral indefinida de la función inversa:

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + \text{cte.}$$

PRACTICA

1. Calcula: $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) =$

Solución: $-\frac{1}{r^2}$

2. Calcula: $\int_r^\infty \frac{1}{r^2} \cdot dr =$

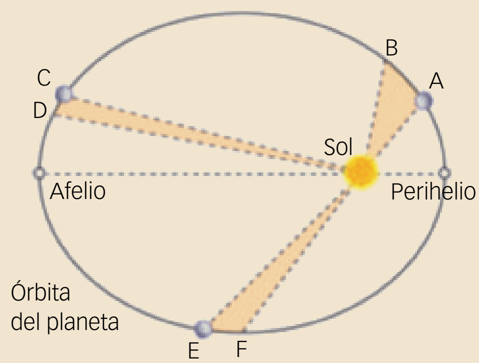
Solución: $\frac{1}{r}$

Física

1. Cinemática planetaria. Las leyes de Kepler

Kepler analizó las posiciones que ocupaban los cuerpos celestes y enunció las leyes que rigen su movimiento:

- **1.ª ley:** todos los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.
- **2.ª ley:** los planetas giran con velocidad areolar constante, esto es, la línea que une la posición del planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Como consecuencia de ello, los planetas se mueven con mayor velocidad lineal en el perihelio que en el afelio.



- **3.ª ley:** en su movimiento alrededor del Sol, los planetas cumplen que: $\frac{T^2}{d^3} = \text{constante}$. T: periodo de traslación; d: distancia media al Sol.

2. Dinámica de los cuerpos celestes. Ley de la gravitación universal

Newton determinó que la atracción gravitatoria era la causante del movimiento de los planetas alrededor del Sol y de los satélites alrededor de los planetas.

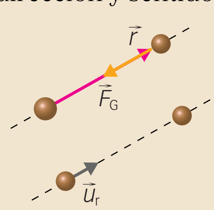
Estableció la ley de la gravitación universal, según la cual dos cuerpos de masa m_1 y m_2 se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. En su formulación vectorial:

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

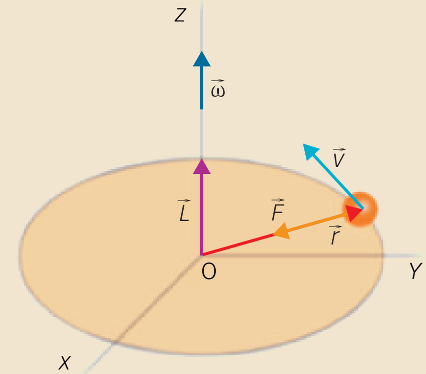
G es la constante de gravitación universal: $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

$\vec{u}_r$ es un vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector de posición $\vec{r}$.

El vector fuerza tiene sentido opuesto al vector de posición, debido a que es una fuerza de atracción.



3. Momento angular



El estado de movimiento de un cuerpo que se desplaza con movimiento curvilíneo se caracteriza por su momento angular $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$$

$\vec{r}$ es el vector de posición del cuerpo en movimiento.

$\vec{p} = (m \cdot \vec{v})$ es la cantidad de movimiento.

- Módulo: $|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |(m \cdot \vec{v})| \cdot \text{sen}\ \alpha$, donde α es el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{p}$.
- Dirección: perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$.
- Sentido: vendrá dado por la regla de la mano derecha o del tornillo.

De la segunda ley de Kepler se deduce que los planetas describen órbitas planas. Por tanto, $\vec{L}$ es constante.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{L} = \text{constante} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}_G$ tiene la dirección de $\vec{r}$.

La fuerza gravitatoria es una fuerza central.

PRACTICA

3. Una masa de 20 000 kg se encuentra a una distancia de 16 m de otra masa de 60 000 kg. Calcula la fuerza de atracción de dichas masas.

   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

   Solución: $3{,}13 \cdot 10^{-4}$ N

4. ¿En qué punto la velocidad de la Tierra es mayor, cuando se encuentra más cerca o más lejos del Sol? Justifica la respuesta.

   Solución: más cerca

5. Se conoce como satélites galileanos a las lunas más grandes de Júpiter descubiertas por Galileo Galilei en 1610. Ío, el satélite galileano más cercano a Júpiter, posee un periodo orbital de 1,8 días y el radio de su órbita es, aproximadamente, tres veces el diámetro de Júpiter. Asimismo, el periodo orbital de Calisto (el cuarto satélite galileano en cuanto a la distancia a Júpiter) es de 16,7 días. Con esos datos, suponiendo órbitas circulares y sabiendo que el radio de Júpiter es $7{,}15 \cdot 10^7$ m, calcula el radio de la órbita de Calisto.

   Solución: $1{,}89 \cdot 10^9$ m

1 El concepto de campo

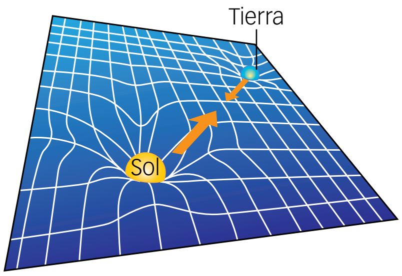


Figura 1.1. Según la teoría de Einstein, la masa del Sol y de la Tierra deforman el espacio que les rodea. Esta deformación hace que ambos cuerpos se atraigan y que atraigan a otros que se les aproximen.

Un cuerpo que se deja libre próximo a la superficie de la Tierra cae hacia ella. Decimos que la Tierra ejerce atracción gravitatoria sobre el cuerpo. Cuerpos cargados, separados una cierta distancia, se atraen o se repelen dependiendo del signo relativo de sus cargas. Los imanes se atraen o se repelen, según la orientación de sus polos.

Las interacciones gravitatoria, eléctrica y magnética se propagan a distancia. Los cuerpos implicados en la interacción no necesitan estar en contacto.

Para explicar formalmente esta interacción a distancia que se producía entre cuerpos que tenían una propiedad común, Michael Faraday (1791-1887) acuñó el concepto de **campo** en 1831. Lo aplicó a la interacción entre cuerpos cargados eléctricamente e ideó las **líneas de campo** para explicar cómo se transmitía la interacción entre uno de los cuerpos y los otros que se encontraban en distintos puntos del espacio.

Para explicar la acción a distancia los científicos supusieron la existencia de un *éter* que llenaba el espacio y que transmitía la interacción entre los cuerpos. La idea del éter se mantuvo vigente hasta que las experiencias realizadas por Albert A. Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923) en 1887 pusieron en duda su existencia, y fue el propio Albert Einstein (1879-1955) quien, en sus trabajos de 1905, demostró que su existencia no era necesaria. Einstein justificó que el cuerpo causante de la perturbación provocaba distorsiones espacio-temporales en la región circundante del espacio y son estas distorsiones las que propagan la perturbación (▶ Figura 1.1).

Desde entonces, el concepto de campo se ha generalizado para estudiar cualquier interacción que se extienda a una región del espacio.

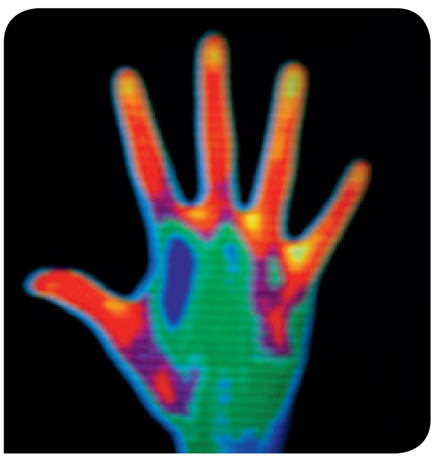


Figura 1.2. La termografía de la mano muestra la temperatura de cada punto de la misma. Es la representación de un **campo escalar**, ya que la temperatura es una magnitud escalar.

> Llamamos **campo** a una región del espacio en la que se aprecia el efecto de la perturbación provocada por un cuerpo que tiene una propiedad que le hace interaccionar con otros cuerpos que también tienen esa propiedad.
>
> El cuerpo que origina la perturbación crea distorsiones espacio-temporales que causan interacciones entre cuerpos que no están en contacto.

Un cuerpo que tiene masa interacciona con otros que también tienen masa. Un cuerpo que tiene carga interacciona con otros que también tienen carga, etc.

Para definir un campo se utilizan magnitudes que adquieren un valor concreto en cada punto del espacio y en el tiempo. Dependiendo de cómo sea la magnitud que define la perturbación tenemos:

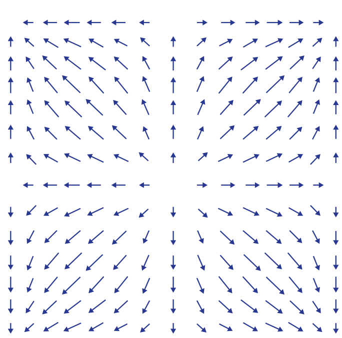


Figura 1.3. Representación del campo creado por una distribución de cargas eléctricas. Su valor en cada punto representa la fuerza que actúa sobre la unidad de carga en ese punto. Es un **campo vectorial**, ya que la fuerza es una magnitud vectorial.

- **Campos escalares.** Si la magnitud que mide la perturbación es escalar. Por ejemplo, un campo de temperaturas (▶ Figura 1.2) o de presiones, donde basta un número para determinar el valor del campo en un punto del mismo.
- **Campos vectoriales.** Si la magnitud que mide la perturbación es vectorial. Por ejemplo, un campo de fuerzas gravitatorias o eléctricas (▶ Figura 1.3). En este caso, el valor del campo viene determinado por un vector.

2 Campo gravitatorio creado por masas puntuales

Campo gravitatorio es la región del espacio en la que se aprecia la perturbación provocada por la masa de un cuerpo.

Para que se ponga de manifiesto es necesario introducir en el campo otro cuerpo con masa. La interacción que se origina es una fuerza de atracción gravitatoria entre el cuerpo que crea el campo y el que se introduce en él.

Comenzaremos este estudio calculando el campo gravitatorio creado por masas puntuales; es decir, supondremos que el o los cuerpos que crean el campo son puntos, sin dimensiones, que tienen una masa M.

También se puede aceptar esta aproximación cuando el tamaño de los cuerpos es mucho menor que el de la distancia entre ellos. Por ejemplo, los planetas se pueden considerar masas puntuales en su interacción con el Sol.

2.1. Intensidad del campo gravitatorio en un punto

Campo creado por una masa puntual *M*

Supongamos que en un punto del espacio existe un cuerpo de masa M. En otro punto, cuya posición respecto a M viene definida por el vector $\vec{r}$, existe otro cuerpo de masa m. Entre ambos cuerpos aparece una fuerza de atracción gravitatoria que podemos escribir como:

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

- G es la constante de gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
- $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$.

Llamamos **intensidad del campo gravitatorio** en un punto, $\vec{g}$, a la fuerza que una masa M ejerce sobre un cuerpo de masa unidad colocado en ese punto. Es una magnitud vectorial, cuyo valor es:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \frac{\dfrac{-G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r}{m} \rightarrow \boldsymbol{\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$

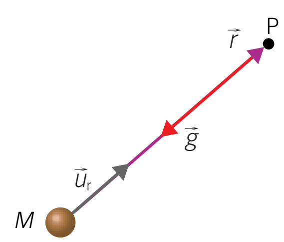


Figura 1.4. $\vec{g}$ y $\vec{r}$ ($\vec{u}_r$) tienen la misma dirección y sentidos opuestos, $\vec{r}$ (morado) va de la masa M al punto P, mientras que $\vec{g}$ (rojo) tiene su origen en P.

Como la fuerza gravitatoria es de atracción, $\vec{g}$ y $\vec{u}_r$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos (▸ Figura 1.4), de ahí el signo negativo en la fórmula. En el sistema internacional, $\vec{g}$ se mide en **N/kg** o en **m/s²**.

Con frecuencia llamamos peso a la fuerza de atracción gravitatoria. Un cuerpo que cae libremente bajo la acción de la fuerza peso se mueve con un movimiento uniformemente acelerado; el valor de su aceleración es $\vec{g}$.

De acuerdo con esto, la intensidad del campo gravitatorio en un punto, $\vec{g}$, es también la aceleración de caída libre de los cuerpos que se mueven bajo la acción de la fuerza gravitatoria.

$$\boldsymbol{\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}}$$

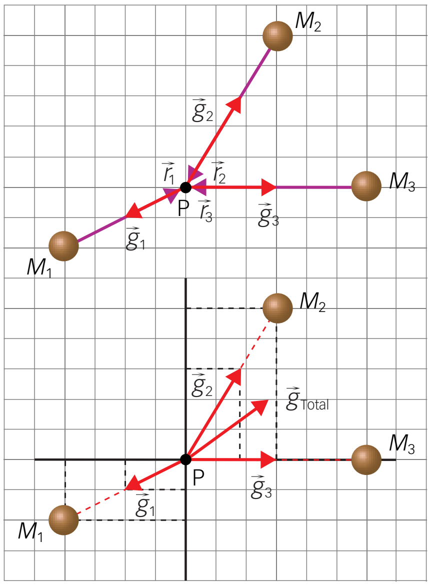


Figura 1.5. El campo total es la suma de los campos creados por cada masa.

Campo creado por una distribución de masas puntuales

Supongamos que en una determinada región del espacio se aprecia el efecto de varios puntos materiales de masa M_1, M_2, M_3, etc.

> La intensidad del campo gravitatorio creado por un conjunto de masas puntuales en un punto es la suma vectorial de los campos que crearía cada masa si solo estuviese ella en esa región del espacio. Esto se conoce como **principio de superposición**.
>
> $$\vec{\boldsymbol{g}}_{\text{Total}} = \sum_{\text{i}} \vec{\boldsymbol{g}}_{\text{i}} = \sum_{\text{i}} \left(-\frac{\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{M}_{\text{i}}}{\boldsymbol{r}_{\text{i}}^2} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_{\text{ri}}$$

En la figura 1.5 se representa el campo creado por los cuerpos de masa M_1, M_2 y M_3 en el punto P. El campo total es la suma de los campos creados por cada masa.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

$$\vec{g}_{\text{Total}} = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_{r3}$$

EJEMPLO RESUELTO

1 **Dos masas puntuales, $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 10$ kg, se encuentran en los puntos del plano XY (1, 3) m y (1, 9) m, respectivamente. Calcula la intensidad del campo gravitatorio debida a las dos masas en el punto (5, 6).**

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Puesto que conocemos las coordenadas de cada uno de los puntos, lo más sencillo es calcular cada campo teniendo en cuenta la definición de $\vec{g}$ y obteniendo, en cada caso, el vector unitario $\vec{u}_r = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|}$.

Utiliza unidades del SI para cada magnitud.

- Calcula $\vec{g}_1$:

  $\vec{r}_1$ es un vector con origen en el punto (1, 3) y extremo en (5, 6).

  $$\vec{r}_1 = (5-1)\,\vec{i} + (6-3)\,\vec{j} \rightarrow \vec{r}_1 = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$$

  $$\vec{u}_{r\,1} = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}}{5}$$

  Por tanto:

  $$\vec{g}_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r\,1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{5^2} \cdot \frac{4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}}{5}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

  $$\vec{g}_1 = -1{,}07 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 8{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- Calcula $\vec{g}_2$:

  $\vec{r}_2$ es un vector con origen en el punto (1, 9) y extremo en (5, 6).

  $$\vec{r}_2 = (5-1)\,\vec{i} + (6-9)\,\vec{j} \rightarrow \vec{r}_2 = 4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$$

  $$\vec{u}_{r\,2} = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}}{5}$$

  Por tanto:

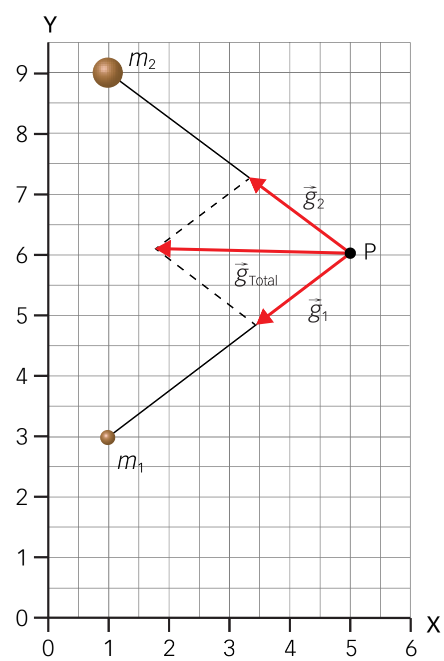
  $$\vec{g}_2 = -\frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r\,2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{5^2} \cdot \frac{4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}}{5}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

  $$\vec{g}_2 = -2{,}14 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 1{,}60 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Entonces:

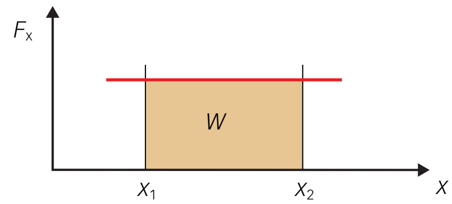
$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-1{,}07 \cdot 10^{-11} + (-2{,}14 \cdot 10^{-11}))\,\vec{i}\ +$$
$$+\,(-8{,}00 \cdot 10^{-12} + 1{,}60 \cdot 10^{-11})\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \boldsymbol{-3{,}21 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 8{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}}$$



2.2. Trabajo debido a las fuerzas gravitatorias

Cuando un cuerpo de masa m se mueve en el seno del campo gravitatorio creado por otro cuerpo de masa M se realiza un trabajo, ya que el desplazamiento tiene lugar bajo la acción de una fuerza, la fuerza gravitatoria.



$$W_F = F_x \cdot (x_2 - x_1) = F_x \cdot \Delta x$$

Figura 1.6. El trabajo es el área sombreada en la figura (rectángulo).

Recuerda

Cálculo del trabajo

Como vimos el curso anterior, cuando un cuerpo experimenta un desplazamiento bajo la acción de una fuerza constante se realiza un trabajo cuyo valor se calcula multiplicando la fuerza por el desplazamiento (▶ Figura 1.6):

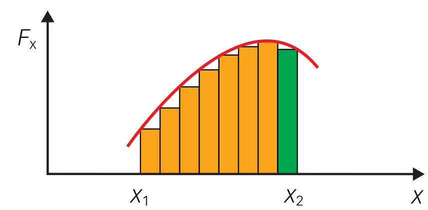
$$W_{i\to f} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Si la fuerza no es constante, solo podremos calcular el trabajo en un desplazamiento infinitesimal, en el que se considera que la fuerza es constante (▶ Figura 1.7):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para calcular el trabajo que se realiza cuando se produce un desplazamiento entre dos puntos cualesquiera debemos sumar todos los trabajos infinitesimales entre ambos. Matemáticamente esa suma es la integral:

$$\boldsymbol{W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \to W = \int F_x \cdot dx$$

Figura 1.7. El trabajo es la suma de las áreas de los rectángulos para aproximar el área encerrada por la curva.

Como su valor cambia en cada punto, utilizamos el cálculo integral:

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f -\frac{G \cdot M \cdot m \cdot \vec{u}_r}{r^2} \cdot d\vec{r} \underset{(1)}{=} \int_i^f -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot dr$$

(1) $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$. Se puede demostrar que $\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = dr$.

$$W_{i\to f} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_i^f -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_i^f = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i}$$

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

$$-\int_A^B r^{-2} \cdot dr = [r^{-1}]_A^B = \left[\frac{1}{r}\right]_A^B = \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}$$

El campo gravitatorio es un **campo conservativo** porque el trabajo realizado por las fuerzas del campo gravitatorio depende solo del punto inicial y final del desplazamiento, y no de la trayectoria seguida (▶ Figura 1.8).

$$W_{i\to f} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i} \qquad [1]$$

La fuerza gravitatoria es una **fuerza central**, ya que está dirigida hacia el centro, y su módulo depende de la distancia al centro. Podemos generalizar y decir que el trabajo debido a una fuerza central es conservativo.

En consecuencia:

- El trabajo de las fuerzas del campo gravitatorio a lo largo de una trayectoria cerrada es cero.
- Si $r_f < r_i \to W_{i\to f} > 0$. El trabajo de las fuerzas del campo gravitatorio es positivo cuando el cuerpo se acerca a la masa que crea el campo.
- Si $r_f > r_i \to W_{i\to f} < 0$. El trabajo de las fuerzas del campo gravitatorio es negativo cuando el cuerpo se aleja de la masa que crea el campo.

Esto es debido a que las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas y cualquier cuerpo que quede libre se acercará al que crea el campo.

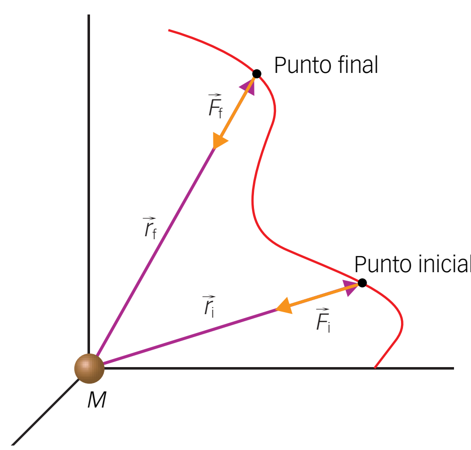


Figura 1.8. El trabajo de la fuerza gravitatoria depende únicamente del punto inicial y final; no de la trayectoria.

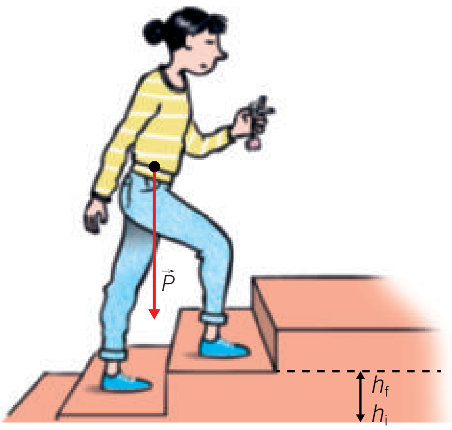
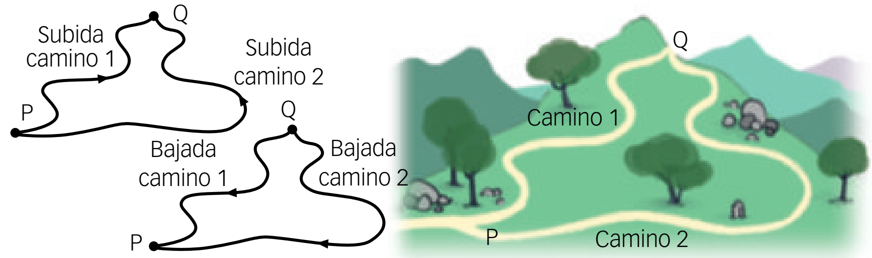


Figura 1.9. En cada paso se produce un desplazamiento en horizontal (Δx) y otro en altura (Δh). La fuerza peso es perpendicular al desplazamiento horizontal, por eso no realiza trabajo en ello. El trabajo de la fuerza peso depende solo del desplazamiento en altura.

Ejemplo de fuerza conservativa

Observa la figura. Podemos ir del punto P al Q por cualquiera de los dos caminos señalados. En ambos casos la diferencia de altura es la misma, pero el camino recorrido es distinto.



Para subir la diferencia de altura debemos realizar un trabajo en contra de nuestro propio peso, y para recorrer el camino debemos vencer el rozamiento con el suelo.

El peso es una fuerza conservativa, pues el trabajo necesario para vencerlo solo depende del punto inicial y el final, mientras que el rozamiento es una fuerza no conservativa, pues el trabajo necesario para vencerlo depende del camino.

Si completamos la ruta para volver al punto de partida P, el trabajo total debido a la fuerza peso es nulo. En cambio, el trabajo de la fuerza de rozamiento no es nulo, ya que debemos vencerla tanto en el paso de P a Q como en el inverso.

EJEMPLO RESUELTO

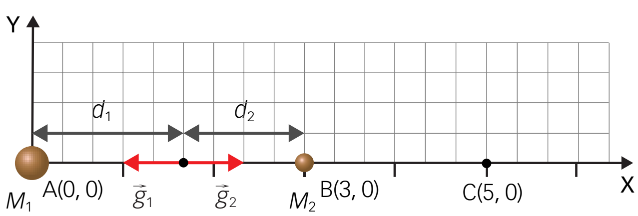
2 **Una masa de 50 kg está situada en el punto (0, 0) m y otra de 30 kg en el punto (3, 0) m.**

a) En qué punto (o puntos) del plano XY el campo gravitatorio resultante es nulo.

b) Calcula el trabajo necesario para trasladar la esfera de 30 kg hasta el punto (5, 0) m. Interpreta el resultado obtenido.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Representa el problema gráficamente:



a) Se trata de encontrar un punto en el que $\vec{g}_{\text{Total}} = 0$.

De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$$

Analiza la representación, observa que el punto que buscas está en la línea que une M_1 y M_2.

El dibujo nos ayuda a expresar vectorialmente $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$.

No olvides expresar todas las magnitudes en unidades del sistema internacional.

- $\vec{g}_1 = -\dfrac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r\,1}$
- $\vec{g}_2 = -\dfrac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r\,2}$

$$\vec{g}_1 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{d_1^2}\,\vec{i} = -\frac{3{,}34 \cdot 10^{-9}}{d_1^2}\,\vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = +\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 30}{d_2^2}\,\vec{i} = +\frac{2{,}00 \cdot 10^{-9}}{d_2^2}\,\vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Resuelve teniendo en cuenta que:

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \rightarrow -\frac{3{,}34 \cdot 10^{-9}}{d_1^2}\,\vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} + \frac{2{,}00 \cdot 10^{-9}}{d_2^2}\,\vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0$$

$$1{,}67 = \frac{d_1^2}{d_2^2} \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{1{,}67} = 1{,}29 \rightarrow d_1 = 1{,}29 \cdot d_2$$

Como la distancia entre las dos masas es de 3 m, sustituye y calcula:

$$d_1 + d_2 = 3 \rightarrow 1{,}29 \cdot d_2 + d_2 = 3 \rightarrow d_2 = \mathbf{1{,}31\ m}$$
$$d_1 = 3 - 1{,}31 \rightarrow d_1 = \mathbf{1{,}69\ m}$$

b) Utiliza la expresión para calcular el trabajo en un campo gravitatorio.

$$W_{\text{i}\rightarrow\text{f}} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r_\text{f}} - \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r_\text{i}}$$

$$W_{\text{B}\rightarrow\text{C}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$W_{\text{B}\rightarrow\text{C}} = \mathbf{-1{,}33 \cdot 10^{-8}\ J}$$

Interpretación: el trabajo es negativo, es decir, para que el cuerpo M_2 se desplace de B a C hay que realizar un trabajo en contra de las fuerzas del campo.

C está más alejado de M_1 que B. Las fuerzas del campo acercarán M_2 a M_1.

2.3. Energía potencial gravitatoria

En el campo gravitatorio, como en todos los campos conservativos, se puede definir una energía potencial, de manera que:

$$W_{\text{conservativos}} = -\Delta E_{\mathrm{P}} \rightarrow W_{\mathrm{i}\rightarrow\mathrm{f}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{f}}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{i}}} = -(E_{\mathrm{P\,f}} - E_{\mathrm{P\,i}}) \quad [2]$$

Relacionando [1] (página 13) y [2] encontramos la expresión para la energía potencial gravitatoria.

La **energía potencial gravitatoria $\boldsymbol{E_{\mathrm{P}}}$** es aquella que posee una masa por encontrarse bajo la influencia gravitatoria de otra u otras masas.

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{P}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}}$$

La energía potencial es una magnitud escalar, y en el SI se mide en **julios (J)**.

Interpretación física: la energía potencial de un cuerpo en un punto coincide con el trabajo que tienen que realizar las fuerzas del campo para llevarlo desde ese punto hasta fuera del campo con velocidad constante. Matemáticamente, un punto fuera del campo está a una distancia infinita de la masa que crea el campo.

$$W_{\mathrm{i}\rightarrow\infty} = \int_{\mathrm{i}}^{\infty} \vec{F}_{\mathrm{G}} \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_{\mathrm{i}}^{\infty} -\frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_{\mathrm{i}}^{\infty} =$$

$$= \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\infty}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{i}}} \rightarrow W_{\mathrm{i}\rightarrow\infty} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{i}}} = E_{\mathrm{P\,i}}$$

Observa que, dentro del campo, la energía potencial de un cuerpo siempre es negativa. La razón está en que la fuerza gravitatoria es una fuerza atractiva, y hace falta una fuerza exterior para llevar el cuerpo desde un punto del campo hasta fuera del mismo.

Diferencia de energía potencial

Cuando un cuerpo de masa m está en el campo gravitatorio creado por otro de masa M, su energía potencial depende del punto donde se encuentre. Al desplazarse a otro punto, su energía potencial varía según la expresión:

$$E_{\mathrm{Pf}} - E_{\mathrm{Pi}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{f}}} - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{i}}}\right)$$

La diferencia de la energía potencial gravitatoria que experimenta el cuerpo de masa m es igual y de signo contrario al trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar el cuerpo entre esos puntos:

$$W_{\mathrm{i}\rightarrow\mathrm{f}} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} =$$

$$= \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{f}}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\mathrm{i}}} = -(E_{\mathrm{P\,f}} - E_{\mathrm{P\,i}})$$

- Si el cuerpo de masa m se acerca al cuerpo que crea el campo ($r_{\mathrm{i}} > r_{\mathrm{f}}$): el trabajo que realizan las fuerzas del campo es positivo y el cuerpo pierde energía potencial (▸ Figura 1.10A).
- Si el cuerpo de masa m se aleja del cuerpo que crea el campo ($r_{\mathrm{i}} < r_{\mathrm{f}}$): el trabajo que realizan las fuerzas del campo es negativo. Hace falta una fuerza exterior para que se produzca el desplazamiento y el cuerpo gana energía potencial (▸ Figura 1.10B).

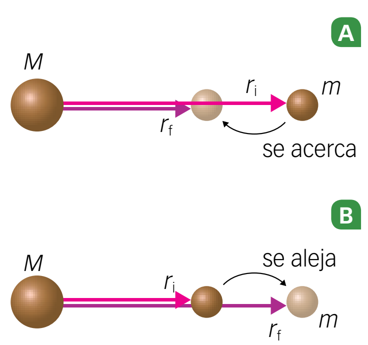


Figura 1.10. Si el cuerpo de masa m se acerca al cuerpo que crea el campo M: $r_{\mathrm{i}} > r_{\mathrm{f}}$. En cambio, si la masa m se aleja de la masa M: $r_{\mathrm{i}} < r_{\mathrm{f}}$.

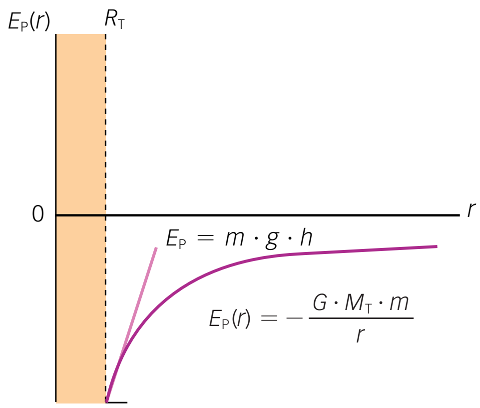


Figura 1.11. Para pequeñas distancias sobre la superficie de la Tierra se puede considerar que la E_P varía linealmente con la altura ($E_P = m \cdot g \cdot h$). A mayores distancias, la E_P varía con el inverso de la distancia r y se hace nula en el infinito.

¿De dónde viene $E_P = m \cdot g \cdot h$?

Hasta ahora, cuando un cuerpo se encontraba a una altura h de la superficie de la Tierra tenía una energía potencial $E_P = m \cdot g \cdot h$. ¿Qué relación tiene esta expresión con lo que acabamos de deducir para el campo gravitatorio?

Sea un cuerpo que se encuentra sobre la superficie de la Tierra y asciende a una altura h. La diferencia de energía potencial en ambos puntos es:

$$\Delta E_P = E_{Ph} - E_{P\text{suelo}} = \left(-G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{1}{R_T + h}\right) - \left(-G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{1}{R_T}\right) =$$

$$G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{(R_T + h) - R_T}{R_T \cdot (R_T + h)} = G \cdot M_T \cdot m \frac{h}{R_T \cdot (R_T + h)}$$

Si consideramos que el punto está próximo a la superficie de la Tierra:

$$h << R_T \text{ y } R_T + h \approx R_T;\ g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

La expresión se convierte en:

$$\Delta E_P = G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{h}{R_T^2} \xrightarrow{g} \Delta E_P = m \cdot g \cdot h$$ (▸ Figura 1.11)

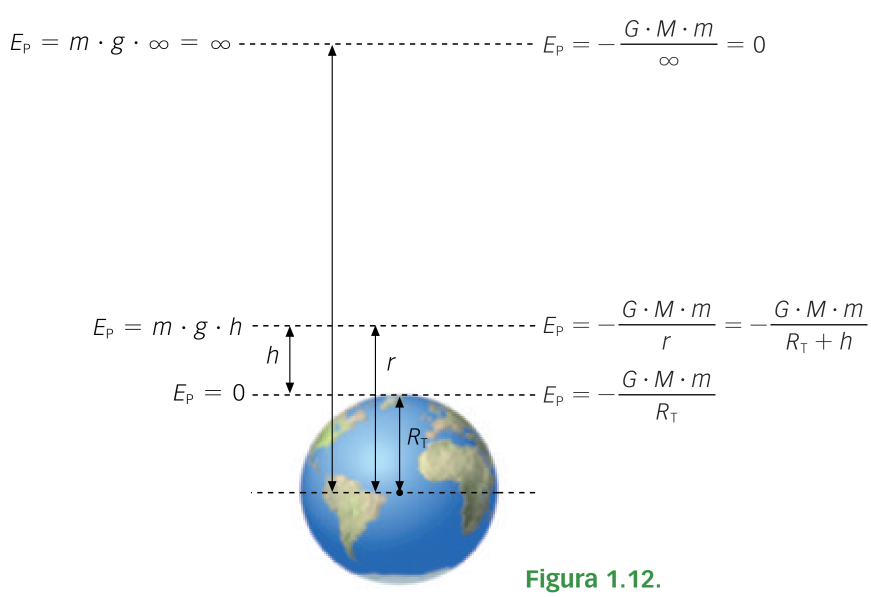


Figura 1.12.

En la figura 1.12 vemos la similitud entre ambas formas de expresar la energía potencial. La diferencia está en el punto que tomamos como referencia para considerar que un cuerpo tiene energía potencial cero.

- Si ese punto es la superficie de la Tierra, a medida que se aleja de ella el cuerpo tendrá una energía potencial cada vez mayor y positiva.
- Si ese punto es el infinito, el cuerpo tendrá siempre energía potencial negativa y de valor cada vez menor a medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra.

En cualquier caso, **el cuerpo gana energía potencial a medida que se aleja de la superficie de la Tierra**.

EJEMPLO RESUELTO

3 La estación espacial MIR orbitaba la Tierra a unos 400 km de su superficie. Calcula la variación de E_P que experimentó cuando pasó de estar preparada para su lanzamiento, a 10 m del suelo, a estar en el espacio.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $R_T = 6370$ km; $m = 2$ kg; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $g = 9{,}8$ m · s⁻².

Haz el cálculo con las dos expresiones estudiadas. Utiliza unidades del SI para cada magnitud.

	$E_P = m \cdot g \cdot h$	$E_P = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{(R_T + h)}$
A 10 m	$E_{PA} = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 196$ J	$E_{PA} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2}{(6370 \cdot 10^3 + 10)} = -125{,}23 \cdot 10^6$ J
A 400 km	$E_{PB} = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 400 \cdot 10^3 = 7{,}84 \cdot 10^6$ J	$E_{PB} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2}{(6370 + 400) \cdot 10^3} = -117{,}83 \cdot 10^6$ J
ΔE_P	$E_{PB} - E_{PA} = 7{,}84 \cdot 10^6 - 196 = \mathbf{7{,}84 \cdot 10^6}$ **J**	$E_{PB} - E_{PA} = -117{,}83 \cdot 10^3 - (-125{,}23 \cdot 10^6) = \mathbf{7{,}40 \cdot 10^6}$ **J**

Interpretación: observa que el cálculo de la izquierda tiene el error de suponer que $g = 9{,}8$ m · s⁻² a cualquier distancia, cuando en realidad g solo tiene ese valor en la superficie de la Tierra.

2.4. Conservación de la energía mecánica en un campo gravitatorio

El curso pasado veíamos el teorema de las fuerzas vivas, que nos dice que el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo provoca una variación en su energía cinética.

$$W_{i\to f} = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} \qquad [3]$$

Por trabajo total entendemos el trabajo de todas las fuerzas, tanto las fuerzas conservativas como las fuerzas no conservativas (por ejemplo, las fuerzas de rozamiento).

Si nuestro sistema se ve sometido solo a la acción de fuerzas conservativas (por ejemplo, a la acción de fuerzas gravitatorias):

$$W_{i\to f} = W_{\text{conservativas}} + W_{\text{no conservativas}} \rightarrow$$
$$\rightarrow W_{i\to f} = -\Delta E_P + 0 = E_{Pi} - E_{Pf} \qquad [4]$$

Relacionando las expresiones [3] y [4]:

$$E_{Cf} - E_{Ci} = E_{Pi} - E_{Pf}$$

Esta expresión es el teorema de conservación de la energía mecánica.

Teorema de conservación de la energía mecánica: cuando un sistema se ve sometido solo a la acción de fuerzas conservativas, su energía mecánica se conserva (▶ Figura 1.13).

$$E_{Cf} + E_{Pf} = E_{Ci} + E_{Pi} = E_M$$

Figura 1.13. Si no existiese rozamiento, el movimiento sería infinito, yendo de un lado a otro de la pista constantemente, ya que la energía potencial se estaría convirtiendo en cinética, y viceversa. La fuerza de rozamiento es una fuerza no conservativa.

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

Teorema de las fuerzas vivas

Cuando un cuerpo se desplaza bajo la acción de una o más fuerzas:

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f m\cdot\vec{a}\cdot d\vec{r} =$$
$$= \int_i^f m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$
$$W_{i\to f} = \int_i^f m\cdot\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int_i^f m\cdot v\cdot dv =$$
$$= \frac{1}{2}m\cdot v_f^2 - \frac{1}{2}m\cdot v_i^2$$

Fuerzas conservativas

Las fuerzas conservativas se llaman así porque, cuando son las únicas que actúan sobre un sistema, se conserva la energía mecánica del mismo.

EJEMPLO RESUELTO

4 **Un meteorito de 200 kg que se dirige en caída libre hacia la Tierra tiene una velocidad de 10 m/s a una altura $h = 750$ km sobre la superficie terrestre. Determina el peso del meteorito a dicha altura y la velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera.**

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Expresa todas las magnitudes en unidades del SI.

El peso coincide con el valor de la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre él:

$$P = F_G = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{(R_T+h)^2}$$

$$P = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{((6370+750)\cdot 10^3)^2} = \mathbf{1573{,}6\ N}$$

La energía mecánica del meteorito se conserva, ya que solo está sometido a la fuerza gravitatoria:

$$E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 200\cdot 10^2 - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{(6370+750)\cdot 10^3\ \text{m}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 200\cdot v^2 - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{6370\cdot 10^3} \rightarrow$$
$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{10^4 - 1{,}12\cdot 10^{10} + 1{,}25\cdot 10^{10}}{100}} = \mathbf{3632\ m/s}$$

2.5. Potencial gravitatorio en un punto

En las páginas anteriores hemos visto que una masa M origina un campo gravitatorio, y que, por ello, otra masa m adquiere cierta energía potencial debida a la posición que ocupa en dicho campo. Resulta muy útil considerar la energía potencial por unidad de masa, ya que así obtenemos una magnitud que solo depende de la masa M que crea el campo.

Se denomina **potencial en un punto**, $\boldsymbol{V}$, a la energía potencial por unidad de masa en ese punto:

$$\boldsymbol{V = \frac{E_P}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}}$$

El potencial es una magnitud escalar, y en el sistema internacional se mide en **J/kg**.

Interpretación física: el potencial en un punto es el trabajo que realizan las fuerzas del campo para llevar la unidad de masa desde ese punto hasta fuera del campo, con velocidad constante.

$$\frac{W_{i\rightarrow\infty}}{m} = \int_i^\infty \frac{\vec{F}_G}{m} \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot \int_i^\infty -\frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_i^\infty = \frac{G \cdot M}{r_\infty} - \frac{G \cdot M}{r_i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{W_{i\rightarrow\infty}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r_i} = V_i$$

El potencial en el infinito (fuera del campo) es cero, y en cualquier otro punto del campo es negativo, ya que la fuerza gravitatoria es atractiva.

Podemos decir que el potencial gravitatorio es un **campo escalar**, ya que permite estudiar la interacción gravitatoria como una función escalar de punto, es decir, en cada punto del campo el potencial tiene un valor.

Potencial en un punto debido a una distribución de masas puntuales

De acuerdo con el **principio de superposición**, si en una determinada región del espacio se aprecia el efecto de varios puntos materiales de masas M_1, M_2, M_3, etc., el potencial gravitatorio en un punto P es la suma de los potenciales que crearían cada uno de esos cuerpos si solo estuviese él en esa región del espacio (▸ Figura 1.14).

Como el potencial es un escalar, el potencial total resulta de la suma escalar de los potenciales creados por cada punto material.

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow V_T = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3}$$

En general, el potencial creado por un sistema de masas puntuales es:

$$\boldsymbol{V_T = \sum_i V_i = \sum_i -\frac{G \cdot M_i}{r_i}}$$

Conocido el potencial que crea un conjunto de masas puntuales en un punto, podremos conocer la energía de un cuerpo de masa m colocado en ese punto mediante la expresión:

$$E_{P\,\text{en}\,P} = m \cdot V_{T\,\text{en}\,P}$$

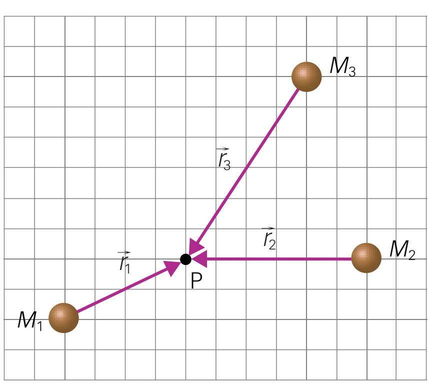


Figura 1.14. En P, $V_T = V_1 + V_2 + V_3$.

Diferencia de potencial

Si consideramos dos puntos de un campo gravitatorio, *i* y *f*, denominamos **diferencia de potencial** entre ambos a la relación $V_f - V_i$:

$$\Delta V = V_f - V_i \rightarrow \boldsymbol{\Delta V = -\frac{G \cdot M}{r_f} - \left(-\frac{G \cdot M}{r_i}\right)}$$

La diferencia de potencial gravitatorio entre dos puntos es igual y de signo contrario al trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar la unidad de masa entre esos puntos:

$$\frac{W_{i\to f}}{m} = \int_i^f \frac{\vec{F}_G}{m} \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot \int_i^f -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_i^f =$$

$$= \frac{G \cdot M}{r_f} - \frac{G \cdot M}{r_i} = -(V_f - V_i) = -\Delta V \rightarrow \frac{W_{i\to f}}{m} = -\Delta V$$

- Si $r_i > r_f$, $\Delta V < 0$. El potencial disminuye al acercarse al cuerpo que crea el campo.
- Si $r_i < r_f$, $\Delta V > 0$. El potencial aumenta al alejarse del cuerpo que crea el campo.

EJEMPLO RESUELTO

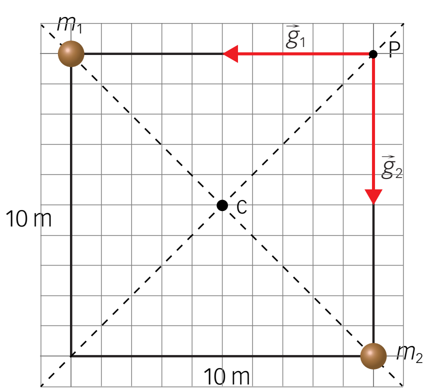
5 Dos masas puntuales de 300 kg cada una se encuentran situadas en los vértices opuestos de un cuadrado de 10 m de lado:

a) Dibuja y calcula el campo gravitatorio producido por estas dos masas en otro de los vértices del cuadrado.

b) Halla el potencial gravitatorio debido a las dos masas en el punto central del cuadrado.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Representa el problema gráficamente:



a) Calcula el campo en el punto P. De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

El dibujo te ayuda a expresar vectorialmente $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$.

- $\vec{g}_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r\,1}$
- $\vec{g}_2 = -\frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r\,2}$

$$\vec{g}_1 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 300\ \text{kg}}{10^2\ \text{m}^2}\,\vec{i} = -2{,}00 \cdot 10^{-10}\,\vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 300\ \text{kg}}{10^2\ \text{m}^2}\,\vec{j} = -2{,}00 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \mathbf{-2{,}00 \cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}}$$

b) Para calcular el potencial en el punto C utiliza el principio de superposición:

$$V_T = V_1 + V_2$$

Las dos masas se encuentran a una distancia de C igual a la mitad de la diagonal del cuadrado:

$$r = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{(10^2 + 10^2)}}{2} = 7{,}07\ \text{m}$$

$$V_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 300\ \text{kg}}{7{,}07\ \text{m}} = -2{,}83 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_T = V_1 + V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot (-2{,}83 \cdot 10^{-9})$$

$$V_T = \mathbf{-5{,}66 \cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}}$$

Interpretación: el potencial gravitatorio en un punto siempre es un número negativo.

En resumen

Existen dos magnitudes para describir el campo gravitatorio y otras dos magnitudes para describir la interacción del campo gravitatorio con una partícula.

Magnitudes que describen el campo gravitatorio		Magnitudes que describen la interacción gravitatoria	
Intensidad de campo (función vectorial de punto)	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$	Fuerza gravitatoria	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$
Potencial (función escalar de punto)	$V = \frac{E_P}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$	Energía potencial	$E_P = m \cdot V = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$

En cada caso podremos hacer una descripción dinámica, por medio de las magnitudes $\vec{g}$ y $\vec{F}_G$, o una descripción energética, por medio de las magnitudes V y E_P. Los detalles del problema que se nos presente nos llevarán a realizar el estudio mediante las magnitudes vectoriales o las escalares.

Además, partiendo de las magnitudes que describen la interacción gravitatoria se puede establecer una relación entre las dos magnitudes que describen el campo:

$$W_{i \to f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_{P\,f} - E_{P\,i}) \to \int_i^f \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r} = -\left(\frac{E_{p\,f}}{m} - \frac{E_{p\,i}}{m}\right) \to$$

$$\to \int_i^f \vec{g} \cdot d\vec{r} = -(V_f - V_i)$$

Podemos llegar a esta misma conclusión desarrollando la primera parte de la igualdad, teniendo en cuenta las definiciones y las herramientas matemáticas que empleamos en los apartados anteriores.

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{r} = -\int G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -G \cdot M \int \frac{1}{r^2} \cdot dr = \left[-G \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\right]_{r_i}^{r_f} =$$

$$= G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = -(V_f - V_i) \to \int \vec{g} \cdot d\vec{r} = -(V_f - V_i)$$

Campo creado por varias masas puntuales

Cuando en una región del espacio se superpone el campo creado por un conjunto de masas puntuales, M_1, M_2, M_3, lo más adecuado es calcular el campo total y el potencial total en un punto, y utilizar este valor para calcular la fuerza gravitatoria o la energía potencial que actúan sobre una partícula m colocada en ese punto.

Magnitudes que describen el campo gravitatorio	Magnitudes que describen la interacción gravitatoria	
$\vec{g}_{Total} = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_{r3}$	Fuerza gravitatoria	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}_{Total}$
$V_T = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3}$	Energía potencial	$E_P = m \cdot V_T$
	Trabajo en un desplazamiento	$W_{i \to f} = -(E_{P\,f} - E_{P\,i}) = -m \cdot (V_{T\,f} - V_{T\,i})$

EJEMPLO RESUELTO

6 En los tres vértices de un triángulo equilátero de 10 m de lado tenemos colocados cuerpos puntuales de masas 2, 3 y 0,5 kg. Calcula:

a) El valor del campo gravitatorio en el centro del triángulo.

b) La fuerza que se ejercerá sobre un cuerpo de 5 kg de masa que se sitúe en el centro del triángulo.

c) El trabajo que realiza el campo para llevar ese cuerpo desde el centro del triángulo hasta el punto medio del lado en que están las masas de 2 y 3 kg. Interpretar el signo del resultado.

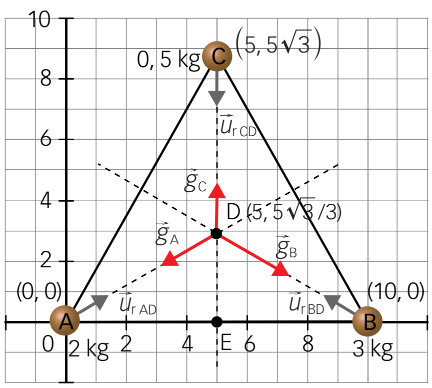
d) Suponiendo que la masa de 5 kg se deja en reposo en el centro del triángulo, ¿con qué velocidad llegará al punto medio del lado opuesto?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Establece un sistema de coordenadas para determinar la posición de cada uno de los cuerpos y el punto en donde se crea el campo.

El centro del triángulo (D) es el baricentro; dista de cada vértice 2/3 de la altura.

Representa el problema gráficamente:



a) Calcula el campo en el centro del triángulo:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_{\text{Total}} = -\frac{G \cdot M_A}{r^2_{AD}} \cdot \vec{u}_{r\,AD} - \frac{G \cdot M_B}{r^2_{BD}} \cdot \vec{u}_{r\,BD} - \frac{G \cdot M_A}{r^2_{CD}} \cdot \vec{u}_{r\,CD}$$

En el Saber hacer de la página 38 verás otra forma de resolver problemas en los que intervienen vectores aprovechando la simetría del caso.

- $\vec{r}_{AD}$ es un vector con origen en el punto (0, 0) y extremo en $\left(5, \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$\vec{r}_{AD} = 5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{r\,AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3}/3)^2}} =$$

$$= \frac{5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{10\sqrt{3}/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_A = -\frac{G \cdot M_A}{r^2_{AD}} \cdot \vec{u}_{r\,AD} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2\,\text{kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2\,\text{m}^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) =$$

$$= -3{,}47 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- $\vec{r}_{BD}$ es un vector con origen en el punto (10, 0) y extremo en $(5, 5\sqrt{3}/3)$.

$$r_{BD} = -5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{rBD} = \frac{\vec{r}_{BD}}{|\vec{r}_{BD}|} = \frac{-5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3}/3)^2}} =$$

$$= \frac{-5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{10\sqrt{3}/3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_B = -\frac{G \cdot M_B}{r^2_{BD}} \cdot \vec{u}_{r\,BD} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 3\,\text{kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2\,\text{m}^2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) =$$

$$= 5{,}20 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 3{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- $\vec{r}_{CD}$ es un vector con origen en el punto $(5, 5\sqrt{3})$ y extremo en $\left(5, \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$\vec{r}_{CD} = 0\,\vec{i} - 10\sqrt{3}/3\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{rCD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{|\vec{r}_{CD}|} = \frac{-10\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{\sqrt{(10\sqrt{3}/3)^2}} = -\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_C = -\frac{G \cdot M_C}{r^2_{CD}} \cdot \vec{u}_{rCD} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 0{,}5\,\text{kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2\,\text{m}^2} \cdot (-\vec{j}) =$$

$$= 1{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Por tanto:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = (-3{,}47 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}) +$$
$$+ (5{,}20 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 3{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}) +$$
$$+ 1{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_{\text{Total}} = \mathbf{1{,}73 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 4{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}}$$

b) Calcula la fuerza: $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}_{\text{Total}}$.

$$\vec{F}_G = 5\,\text{kg} \cdot (1{,}73 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 4{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j})\,\text{N/kg}$$

$$\vec{F}_G = \mathbf{0{,}8710^{-11}\,\vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \ N}$$

continúa

Nota

Observa que el resultado del problema cambia si colocas las masas en otra posición.

c) Utiliza las unidades del sistema internacional para todas las magnitudes.

$$W_{D \to E} = -\Delta E_P = -(E_{PE} - E_{PD}) = -m \cdot (V_{TE} - V_{TD})$$

Calcula el potencial total que las tres masas crean en cada uno de estos puntos:

$$V_{TD} = V_{AD} + V_{BD} + V_{CD} = -\frac{G \cdot m_A}{r_{AD}} - \frac{G \cdot m_B}{r_{BD}} - \frac{G \cdot m_C}{r_{CD}}$$

$$V_{TD} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{10\sqrt{3}/3} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{10\sqrt{3}/3} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}5}{10\sqrt{3}/3}$$

$$V_{TD} = -6{,}354 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_{TE} = V_{AE} + V_{BE} + V_{CE} = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AE}} - \frac{G \cdot M_B}{r_{BE}} - \frac{G \cdot M_C}{r_{CE}}$$

$$V_{TE} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{5} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{5} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}5}{5\sqrt{3}}$$

$$V_{TE} = -7{,}055 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$W_{D \to E} = -m \cdot (V_{TE} - V_{TD})$$

$$W_{D \to E} = -5 \cdot (-7{,}055 \cdot 10^{-11} - (-6{,}354 \cdot 10^{-11})) =$$

$$= \mathbf{+3{,}51 \cdot 10^{-11} \frac{J}{kg}}$$

Interpretación: $W_{D \to E} > 0$, lo que quiere decir que las fuerzas de campo desplazarán la masa de 5 kg desde el centro del triángulo al medio del vértice opuesto.

d) Supón que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son las fuerzas gravitatorias:

$$E_{CD} + E_{PD} = E_{CE} + E_{PE} \to$$

$$\to E_{CD} + m \cdot V_{TD} = E_{CE} + m \cdot V_{TE}$$

$$0 + 5 \cdot (-6{,}354 \cdot 10^{-11}) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot v_E^2 + 5 \cdot (-7{,}055 \cdot 10^{-11})$$

$$\to v_E = \mathbf{3{,}8 \cdot 10^{-6}\ m/s}$$

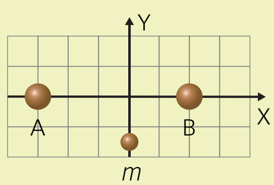
ACTIVIDADES

6. Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «El potencial gravitatorio es nulo en el punto medio del segmento que une dos masas iguales».

7. Si nos desplazamos desde un punto situado a gran altura en dirección hacia la superficie de la Tierra, ¿la energía potencial gravitatoria aumentará o disminuirá? Razónalo.

8. Al pie de una montaña un alpinista puede tomar dos rutas diferentes para escalar la misma montaña. Una de las pendientes es suave y la otra, en cambio, es mucho más pronunciada. ¿Crees que el valor del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo del montañero depende del camino elegido? Razona la respuesta.

9. En los puntos A (−30, 0) y B (+20, 0) se encuentran fijas dos masas puntuales de 10^5 kg cada una. En el punto (0, −15) se encuentra una pequeña esfera de 400 g de masa, que puede moverse libremente. Teniendo en cuenta que las distancias están expresadas en metros, halla:



a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera en su posición inicial.

b) La aceleración que experimentará la esfera justo cuando se encuentre en el punto (0, 0) entre los cuerpos A y B.

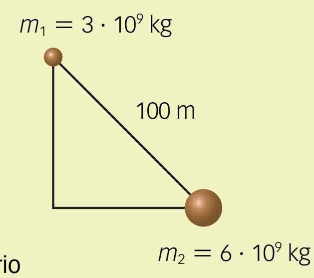
c) Enuncia el principio de superposición de campos.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solución: a) $1{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{i} + 3{,}62 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}$ N; $3{,}84 \cdot 10^{-9}$ N
b) $9{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{i}$ m/s²

10. Explica qué relación existe entre la «fuerza conservativa» y la «energía potencial».

11. Hay dos masas de $3 \cdot 10^9$ kg y $6 \cdot 10^9$ kg, respectivamente, en los extremos de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles.



a) Haz un esquema del campo gravitatorio de cada masa y del campo total en el vértice libre.

b) Si la hipotenusa del triángulo mide 100 m, calcula el módulo del campo gravitatorio en dicho vértice.

c) En qué punto del triángulo el campo gravitatorio será nulo.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solución: b) $8{,}95 \cdot 10^{-5}$ m/s²; c) $41{,}\overset{\frown}{42}$ m de la masa menor

12. Tenemos dos masas de 4000 y 10 000 kg, respectivamente. La masa 1 se encuentra en el origen de coordenadas, punto (0, 0). A 200 m y a su derecha se encuentra la masa 2, en el punto (200, 0).

a) Dibuja y calcula el valor del campo gravitatorio en el punto medio C entre ambos.

b) Halla el potencial gravitatorio en el punto C.

c) Halla el trabajo necesario para llevar una masa de 1 kg desde el punto C hasta una distancia de 40 m a la izquierda de la primera masa, punto (−40, 0).

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solución: a) $4 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}$ N/kg; b) $-9{,}34 \cdot 10^{-9}$ J/kg;
c) $1{,}11 \cdot 10^{-10}$ J

3 Representación del campo gravitatorio

El campo gravitatorio se puede representar gráficamente de dos formas, que se relacionan con las dos magnitudes que lo describen:

- Las **líneas de campo**.
- Las **superficies equipotenciales**.

3.1. Líneas de campo

Las líneas de campo son líneas tangentes al vector intensidad de campo en cada punto.

Se dibujan de tal manera que el número de líneas de campo que atraviesan una unidad de superficie perpendicular a las líneas es proporcional a la intensidad del campo en el punto.

- Si tenemos un campo creado por una única masa puntual, las líneas de campo tienen dirección radial y sentido hacia el cuerpo que crea el campo (▶ Figura 1.15).
- Si tenemos un campo creado por dos masas, en la zona intermedia las líneas de campo se deforman, indicando que hay un punto entre ambas masas donde el campo es nulo.

  Si las masas son iguales, el punto donde se anula el campo está en medio de las dos masas (▶ Figura 1.16).
- Si una de las masas es mayor que la otra, el punto donde se anula el campo está más próximo al cuerpo de menor masa (▶ Figura 1.17).

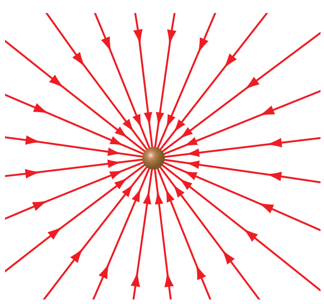


Figura 1.15. Líneas del campo creado por una masa puntual.

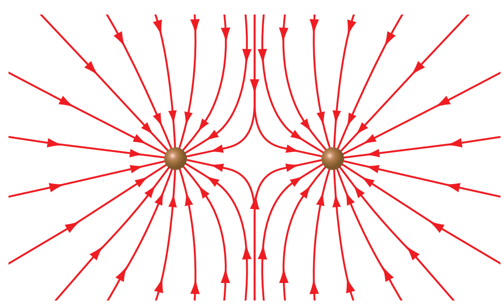


Figura 1.16. Líneas de campo creado por dos masas iguales.

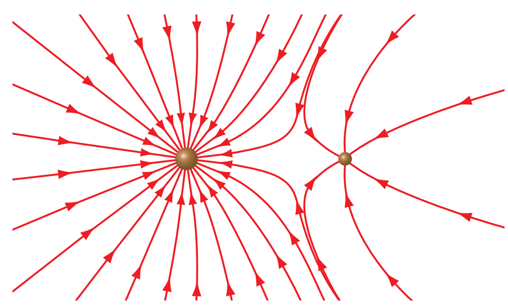


Figura 1.17. Líneas de campo creado por dos masas diferentes.

Propiedades de las líneas de campo

Las líneas de campo no se pueden cruzar.

Si se cruzasen dos líneas de campo, en el punto de corte habría dos valores para la intensidad del campo gravitatorio, lo cual es imposible, ya que, por el principio de superposición, la intensidad del campo tiene un valor único en cada punto.

Observa lo que ocurre en el punto P de la figura 1.18.

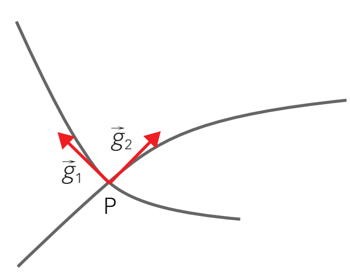


Figura 1.18. Las líneas de campo no se pueden cruzar.

3.2. Superficies equipotenciales

> Las superficies equipotenciales son regiones del espacio en las que el potencial gravitatorio tiene el mismo valor.

En consecuencia, **el trabajo necesario para desplazar una masa de un punto a otro de una misma superficie equipotencial es nulo**:

$$W_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = -(E_{\mathrm{Pf}} - E_{\mathrm{Pi}}) = -(m \cdot V_{\mathrm{f}} - m \cdot V_{\mathrm{i}}) = 0$$

- Si el campo está creado por una única masa puntual, las superficies equipotenciales son esferas, con centro en la masa puntual (▸ Figura 1.19).
- Si está creado por dos masas, las superficies equipotenciales se deforman en la zona donde se aprecia el efecto de ambas masas; la deformación es simétrica si ambas masas son iguales (▸ Figura 1.20).
- En el caso de dos masas, la deformación es asimétrica si una es mayor que la otra (▸ Figura 1.21).

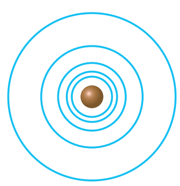


Figura 1.19. Superficies equipotenciales del campo creado por una sola masa.

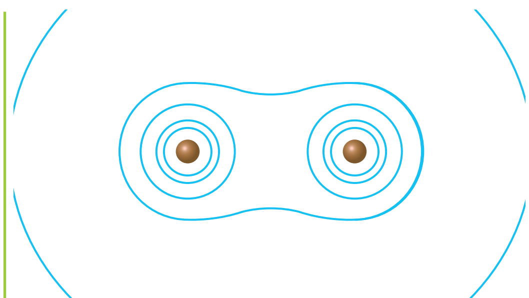


Figura 1.20. Superficies equipotenciales del campo creado por dos masas iguales.

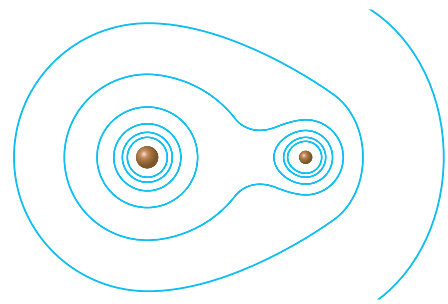


Figura 1.21. Superficies equipotenciales del campo creado por una masa que es el doble que la otra.

Propiedades de las superficies equipotenciales

> Las superficies equipotenciales no se pueden cortar.

Si lo hiciesen, el punto de corte tendría dos valores de potencial, lo cual es imposible porque el potencial tiene un valor único en cada punto.

Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.

Observa en las figuras 1.22, 1.23 y 1.24 el resultado de representar, en cada caso, las líneas de campo y las superficies equipotenciales:

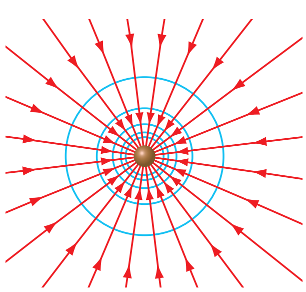


Figura 1.22. Líneas de campo y superficies equipotenciales del campo creado por una sola masa.

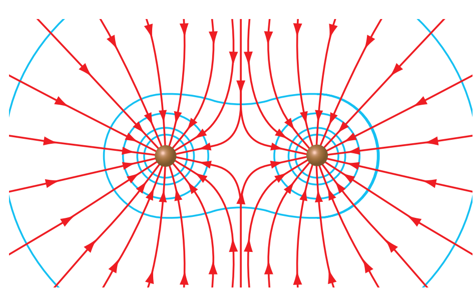


Figura 1.23. Líneas de campo y superficies equipotenciales del campo creado por dos masas iguales.

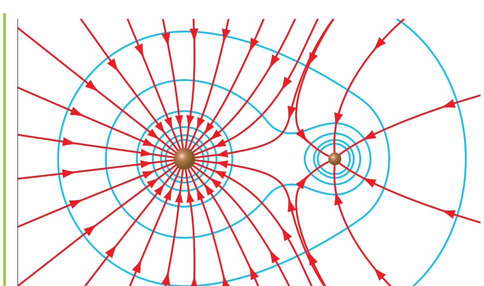


Figura 1.24. Líneas de campo y superficies equipotenciales del campo creado por dos masas, donde una masa es el doble que la otra.

4 Campo gravitatorio de los cuerpos celestes

En el universo existen cuerpos y sistemas con una gran masa, como galaxias, estrellas, planetas o satélites, y cada uno de ellos crea un campo gravitatorio. El movimiento de los satélites en torno a los planetas y de estos alrededor de una estrella, o la rotación galáctica son consecuencia de la fuerza de atracción gravitatoria que unos ejercen sobre otros.

Analizaremos el universo desde el punto de vista de la interacción gravitatoria para tratar de comprender su evolución. Relacionaremos la órbita que describen con su energía. En ocasiones, el análisis nos llevará a suponer la existencia de materia no visible, la denominada **materia oscura**, imprescindible para explicar el movimiento de las galaxias.

4.1. El campo gravitatorio de la Tierra y los planetas

La Tierra, y cualquiera de los planetas, son cuerpos que ejercen atracción gravitatoria sobre cualquier otro cuerpo que esté en sus proximidades. Esta fuerza, que habitualmente denominamos **peso**, es la responsable de que los cuerpos caigan libremente.

Consideremos un cuerpo de masa m que se encuentra a una distancia r de un planeta de masa M_P. Comparamos la expresión de la fuerza gravitatoria y la fuerza peso:

$$F_G = \frac{G \cdot M_P \cdot m}{r^2}; \qquad P = m \cdot g$$

Deducimos que el valor de g, la aceleración de la gravedad, depende de la masa del planeta y la distancia a la que se encuentre el cuerpo; g es menor cuanto mayor sea la distancia al centro del cuerpo.

$$F_G = P \rightarrow \frac{G \cdot M_P \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot g \rightarrow g = \frac{G \cdot M_P}{r^2}$$

Con frecuencia se denomina g_0 al valor de g en la superficie del planeta. En ese caso, r coincide con el radio del planeta (▸ Tabla 1.1).

Astro	Masa (kg)	Radio (m)	g (m/s²)
Tierra	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	9,81
Luna	$7{,}2 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	1,59
Marte	$6{,}5 \cdot 10^{23}$	$3{,}38 \cdot 10^{6}$	3,80

Tabla 1.1. Algunos valores del campo gravitatorio en la superficie de planetas o satélites.

ACTIVIDADES

13. Si una persona de 75 kg de masa se encuentra en un planeta cuya masa y radio son la cuarta parte de los de la Tierra, ¿cuál sería su peso en dicho planeta?

Dato: $g_{0\,\text{Tierra}} = 9{,}8$ m/s².

Solución: 2940 N

EJEMPLO RESUELTO

7 **Contesta.**

a) Calcula el peso de un objeto que se eleva desde el nivel del mar hasta una altura igual a dos veces el radio terrestre.

b) Júpiter tiene una densidad media de $1{,}34 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg^{-2}; $R_J = 7{,}18 \cdot 10^7$ m.

a) El valor de g a esa altura es:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{(3 \cdot R_T)^2} = \frac{G \cdot M_T}{9 \cdot R_T^2} = \frac{g_0}{9} \rightarrow P = m \cdot g = \frac{1}{9} \cdot m \cdot g$$

El peso, como el valor de g, **se reduce a la novena parte**.

b) El valor de g en la superficie de Júpiter es:

$$g = \frac{G \cdot M_J}{R_J^2} \qquad [1]$$

Relaciona la densidad con la masa y el volumen:

$$d = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_J^3}$$

Despeja M_J y sustitúyela en la expresión [1]:

$$g = \frac{G \cdot d \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_J^3}{R_J^2} = G \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot d \cdot R_J \rightarrow$$

Escribe todas las magnitudes en unidades del SI:

$$\rightarrow g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1{,}34 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 7{,}18 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$g = \mathbf{26{,}88\ N/kg}$$

4.2. El campo gravitatorio del Sol y el sistema solar

Podemos considerar el Sol como una gran masa de forma esférica a cuyo alrededor giran los planetas con órbitas elípticas. En la mayoría de los casos, la excentricidad de la elipse es pequeña, por lo que podemos suponer a órbitas esféricas.

Además, los planetas se encuentran a grandes distancias del Sol, de forma que todos ellos se pueden considerar como masas puntuales.

Podemos utilizar las expresiones deducidas para una masa puntual para calcular el campo gravitatorio creado por el Sol a una distancia r y la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce sobre un planeta colocado en ese punto:

$$\vec{g} = -\frac{G \cdot M_{\text{Sol}}}{r^2} \cdot \vec{u}_r \; ; \; \vec{F}_G = m_{\text{planeta}} \cdot \vec{g} = -\frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad [1]$$

El movimiento de los planetas

Tal y como enunció Newton, la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre los planetas es la fuerza centrípeta responsable de su movimiento circular (▸ Figura 1.25).

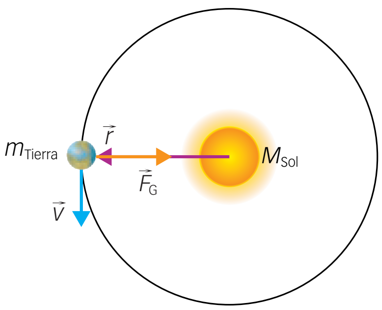


Figura 1.25. La fuerza gravitatoria con la que la Tierra es atraída por el Sol es la fuerza centrípeda responsable de su movimiento circular alrededor del Sol.

$$\vec{F}_C = m_{\text{planeta}} \cdot \vec{a}_C = -m_{\text{planeta}} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_r \qquad [2]$$

Relacionando las expresiones [1] y [2]:

$$\frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} = m_{\text{planeta}} \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Sol}}}{r}} \qquad [3]$$

Conclusión: los planetas giran a una velocidad menor cuanto mayor es su distancia al Sol. La velocidad a la que gira un planeta no depende de su masa; solo depende de la masa del Sol y de la distancia del planeta al Sol.

Si relacionamos la velocidad lineal del planeta con su periodo de revolución: $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$ y lo sustituimos en [3], obtenemos:

$$\frac{2\pi}{T} \cdot r = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Sol}}}{r}}$$

Elevando al cuadrado y reordenando, obtenemos:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{G \cdot M_{\text{Sol}}}$$

Conclusión: para cualquier planeta que gire alrededor del Sol, $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte.}$ Esta conclusión es la tercera ley de Kepler.

Otros sistemas planetarios

En el universo nos podemos encontrar con otros sistemas similares al descrito, en el que un cuerpo central de gran masa ejerce atracción gravitatoria sobre otros cuerpos de menos masa que giran a su alrededor.

Dentro del sistema solar hay planetas como la Tierra, Marte, Júpiter o Saturno que tienen varios satélites girando a su alrededor. Fuera de él hay estrellas con sus propios sistemas planetarios. En todos los casos se cumple:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_C ; \; v_{\text{cuerpo que gira}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{cuerpo central}}}{r}}$$

$\left(\frac{T^2}{r^3}\right)_{\text{cuerpo que gira}} = \text{cte.}$ El valor de la constante depende de $M_{\text{cuerpo central}}$.

4.3. La energía del cuerpo que gira

Los planetas que giran alrededor del Sol y los satélites que giran alrededor de los planetas tienen una energía cinética debida a su movimiento y una energía potencial debida a la posición que ocupan con respecto al cuerpo que crea el campo.

Sea M la masa del cuerpo central y m la masa del cuerpo que gira:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Para el cuerpo que orbita, $F_G = F_C$, de donde se deduce:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Esto nos permite obtener una forma más simplificada para su energía mecánica, E_M:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Conclusión: los cuerpos que orbitan en torno a otro cuerpo de masa mayor que les atrae tienen una energía mecánica negativa cuyo valor es inversamente proporcional a la distancia entre ellos.

La energía mecánica del cuerpo que gira se hace cero cuando se encuentra a una distancia infinita con respecto al cuerpo que crea el campo, es decir, cuando sale de su campo gravitatorio.

4.4. Velocidad de escape

Denominamos **velocidad de escape** a la velocidad que debe tener un cuerpo para liberarse de la atracción gravitatoria de otro cuerpo.

Según lo que se acaba de deducir, esa velocidad debe hacer que el cuerpo alcance una $E_M \geq 0$.

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \geq 0$$

Reordenando la expresión, la velocidad de escape debe ser:

$$v_{escape} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}}$$

Observa que la velocidad de escape no depende de la masa del cuerpo que gira, sino que depende de:

- La masa del cuerpo que crea el campo gravitatorio: M.
- La distancia a la que se encuentra del centro de ese cuerpo: r.

Con frecuencia se habla de la velocidad de escape de un planeta para referirse a la velocidad a la que se debe lanzar un cuerpo desde su superficie para que salga del campo gravitatorio que crea el planeta. En ese caso, M es la masa del planeta, y r, su radio.

Velocidad de escape para diversos cuerpos celestes

	Sol	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Radio (km)	695 000	2440	6052	6370	3397	71 492	60 268	25 560	24 746
Masa (kg)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$3{,}30 \cdot 10^{23}$	$4{,}87 \cdot 10^{24}$	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$5{,}69 \cdot 10^{26}$	$8{,}69 \cdot 10^{25}$	$1{,}02 \cdot 10^{26}$
v_{escape} (km/s)	618,02	4,25	10,36	11,21	5,02	59,56	35,49	21,29	23,50

EJEMPLO RESUELTO

8 CoRoT-7b, uno de los planetas extrasolares más pequeños conocidos, gira alrededor de la estrella CoRoT-7 en una órbita prácticamente circular de $2{,}58 \cdot 10^9$ m de radio y un periodo de 20,5 h. La masa del planeta es $2{,}90 \cdot 10^{25}$ kg y tiene un radio de $1{,}07 \cdot 10^7$ m. Calcula:

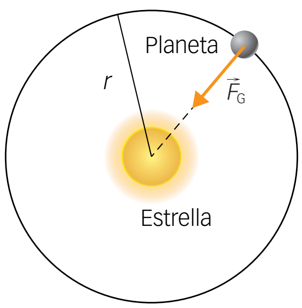
a) La masa de la estrella CoRoT-7.

b) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta CoRoT-7b.

c) La velocidad de escape de este planeta.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2}.

Para resolver el problema utiliza todas las magnitudes en unidades del SI.



a) Para el planeta que gira alrededor de su estrella:

$$F_C = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M_E \cdot m_P}{r^2} = \frac{m_P \cdot v^2}{r}$$

$$\rightarrow G \cdot \frac{M_E}{r} = v^2 \qquad [1]$$

Relaciona v con T:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$$

Sustituye en [1] y despeja la masa de la estrella:

$$M_E = \frac{(2\pi)^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

$$M_E = \frac{(2\pi)^2 \cdot (2{,}58 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (20{,}5 \cdot 3\,600)^2} = \mathbf{1{,}87 \cdot 10^{30}\ kg}$$

b) Calcula g en la superficie del planeta:

$$g = \frac{G \cdot m_P}{R_P^2}$$

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}90 \cdot 10^{25}}{(1{,}07 \cdot 10^7)^2} = \mathbf{16{,}89\ \frac{m}{s^2}}$$

c) La velocidad de escape en la superficie del planeta es aquella que hace que un cuerpo en ese punto tenga una $E_M \geq 0$.

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot m_P \cdot m}{r} \geq 0$$

$$v_{escape} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot m_P}{R_P}}$$

$$v_{escape} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}90 \cdot 10^{25}}{1{,}07 \cdot 10^7}} = \mathbf{1{,}90 \cdot 10^4\ m/s}$$

ACTIVIDADES

14. La luz del Sol tarda 8 min y 20 s en llegar a la Tierra, y 43 min y 20 s en llegar a Júpiter. Suponiendo que las órbitas son circulares, calcula:

a) El periodo de Júpiter orbitando alrededor del Sol.

b) La velocidad orbital de Júpiter.

c) La masa del Sol.

Datos: T_{Tierra} alrededor del Sol $= 3{,}15 \cdot 10^7$ s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2}.

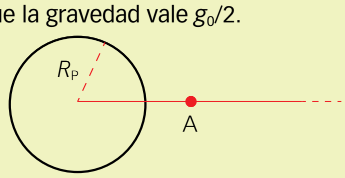
Solución: a) $3{,}735 \cdot 10^8$ s; b) $1{,}312 \cdot 10^4$ m/s; c) $2{,}013 \cdot 10^{30}$ kg

15. Se deja caer libremente un objeto desde una distancia «infinita» de un planeta de radio R_P. Calcula:

a) La masa del planeta si la intensidad de la gravedad en la superficie vale g_0.

b) La velocidad al llegar a la superficie del planeta.

c) La velocidad del objeto al pasar por un punto A en el que la gravedad vale $g_0/2$.



Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2 ; $g_0 = 9{,}8$ m/s^2; $R_P = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Solución: a) $5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg; b) $1{,}117 \cdot 10^4$ m/s; c) $9{,}396 \cdot 10^3$ m/s

16. Un planeta de 10^{25} kg de masa gira alrededor de una estrella siguiendo una órbita circular de radio $r = 10^8$ km y periodo $T = 2$ años terrestres. Calcula:

a) La masa M de la estrella.

b) La energía mecánica del planeta.

c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.

d) La velocidad angular de otro planeta más alejado de la estrella que describe una órbita circular de radio igual al doble del primero, $2r$.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2. Considera 1 año terrestre $= 365$ días.

Solución: a) $1{,}488 \cdot 10^{29}$ kg; b) $-4{,}962 \cdot 10^{32}$ J; c) $9{,}96 \cdot 10^{39}$ kg $\cdot$ m^2/s^2; d) $3{,}52 \cdot 10^{-8}$ rad/s

17. La masa de Marte, su radio y el radio de su órbita alrededor del Sol, referidos a las magnitudes de la Tierra, son, respectivamente: $M_{Marte} = 0{,}107 \cdot M_{Tierra}$, $R_{Marte} = 0{,}532 \cdot R_{Tierra}$, y $r_{Marte} = 1{,}524 \cdot r_{Tierra}$. Determina, en relación con la Tierra:

a) El periodo de rotación alrededor del Sol.

b) El valor de la gravedad y la velocidad de escape en la superficie de Marte en relación con las de la Tierra.

Solución: a) $T_{Marte} = 1{,}88 \cdot T_{Tierra}$; b) $g_M = 0{,}378 \cdot g_T$; $v_{escape\ M} = 0{,}448 \cdot v_{escape\ T}$

4.5. Energía y tipo de órbita

La energía de un cuerpo celeste determina el tipo de movimiento y, en su caso, la forma de la órbita que describe.

Supongamos un cuerpo de masa m que se encuentra en el campo creado por otro de masa M, a una distancia r del mismo. Para el cuerpo se cumple:

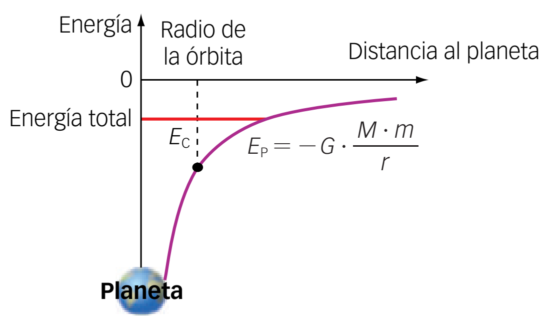
$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Se pueden dar los siguientes casos:

Primer caso. $E_M < 0$. Si $E_M = E_P$, $E_C = 0$.
El cuerpo ha alcanzado su altura máxima y cae por efecto de la atracción gravitatoria.

Segundo caso. $E_M < 0$. Si $E_C > 0$. El cuerpo describe una órbita cerrada. Se pueden dar dos tipos de órbitas cerradas: circular y elíptica.

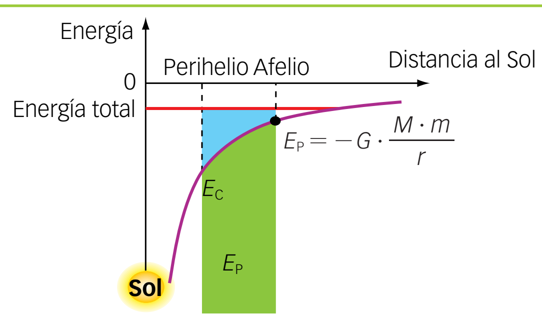
Órbita circular



Es propia de los satélites que giran en torno a un planeta. Se encuentran siempre a la misma distancia, por eso su E_C y su E_P tienen siempre un valor constante.

$$E_M = E_C + E_P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Órbita elíptica



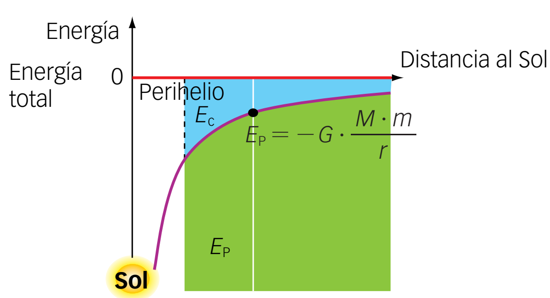
A lo largo de la órbita, la energía cinética y potencial cambian, pero la energía total se mantiene constante. En el perihelio, la velocidad es mayor. Por eso la E_C es mayor y la E_P es menor.

Tienen este tipo de órbitas los planetas que giran en torno al Sol y algunos satélites de comunicación.

Tercer caso. $E_M \geq 0$. El cuerpo describe una órbita abierta. Se pueden dar dos tipos de órbitas abiertas: parabólica e hiperbólica.

Órbita parabólica

$E_M = 0$



El cuerpo tiene velocidad suficiente para escapar del campo gravitatorio.

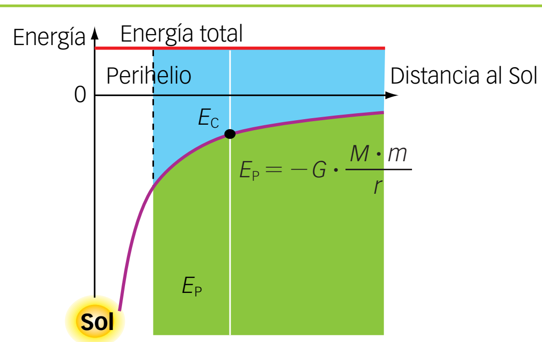
En todo momento $E_C = -E_P$.

Cuando salen del campo gravitatorio $E_P = 0$, lo que indica que $E_C = 0$ y su velocidad $v = 0$.

Describen este tipo de órbitas algunos cometas que llegan al sistema solar con una velocidad que les permite escapar de su campo gravitatorio.

Órbita hiperbólica

$E_M > 0$



El cuerpo escapará del campo gravitatorio y, cuando salga de él, su velocidad será mayor que cero.

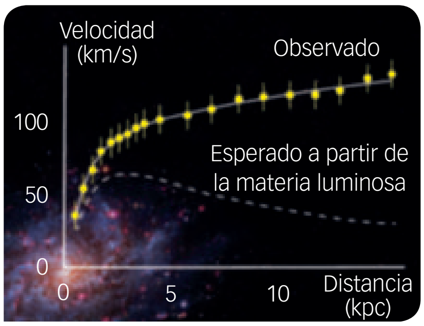
En todo momento su $E_C > -E_P$.

Describen este tipo de órbitas algunos asteroides que llegan de forma momentánea al sistema solar, pero salen rápidamente.

4.6. La rotación de las galaxias y la materia oscura

La mayor parte de los cuerpos celestes se agrupan en galaxias, que son aglomeraciones de estrellas, polvo y gas. En cada galaxia, millones de estrellas giran describiendo órbitas alrededor de un centro definido por la propia atracción gravitatoria.

Dependiendo de cómo se organicen sus componentes, las galaxias pueden tener distintas formas: elíptica, espiral o amorfa. En las **galaxias espirales** hay un disco central, denominado **bulbo**, del que emergen brazos que contienen estrellas girando según trayectorias circulares alrededor del disco. El Sol es una estrella que se encuentra en el brazo de Sagitario de la Vía Láctea, nuestra galaxia, que es una galaxia espiral.



1 kpc = 1000 pársecs = 3262 años luz.

Figura 1.26. Curva de rotación observada para la galaxia M 33. La diferencia entre las velocidades observadas y esperadas a partir de la materia luminosa se atribuye a la existencia de la materia oscura.

A su vez, y también como consecuencia de la atracción gravitatoria, las galaxias forman grupos denominados **cúmulos**, y estos se agrupan en **supercúmulos**. Nos encontramos en el Supercúmulo Local, que incluye el Grupo Local y otros como el cúmulo de Virgo. El Grupo Local es un pequeño grupo de galaxias al que pertenecen, entre otras, la Vía Láctea y Andrómeda.

Evaluando la masa de una galaxia por su luminosidad, las estrellas de sus brazos deberían girar con una velocidad menor cuanto mayor fuese su distancia al centro del bulbo. Pero las investigaciones iniciadas por Vera Rubin indican que estas velocidades permanecen constantes o incluso aumentan. Para explicarlo hubo que suponer que en el espacio hay más materia que la que resulta visible. Es una materia no detectable, por eso se denominó **materia oscura**, y parece que las galaxias están inmersas en grandes halos de ella.

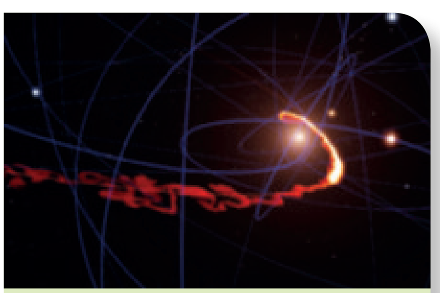
Llamamos **materia oscura** a aquella que no emite suficiente radiación electromagnética para ser detectada con los medios actuales, pero cuya existencia se deduce a partir de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible (▶ Figura 1.26).

Fue propuesta por el astrónomo suizo Fritz Zwicky en 1933. Se cree que la materia luminosa de las galaxias constituye solo un 10 % del total.

Materia oscura y agujeros negros

Por otra parte, en los agujeros negros la atracción gravitatoria que ejerce la materia oscura es tal que la velocidad de escape es superior a la velocidad de la luz. Esto quiere decir que los fotones no escapan a la atracción de un agujero negro.

Se cree que los agujeros negros son el resultado de un colapso gravitatorio, un desmoronamiento hacia adentro de un cuerpo estelar debido a su propia gravedad. Existen distintos tipos de agujeros negros: los hay desde supermasivos, con una masa equivalente a la de millones de soles, a microagujeros.



En el centro de la Vía Láctea se ha detectado un **agujero negro** supermasivo cuya masa es de 4,5 millones de veces mayor que la del Sol y mide unos 25 millones de kilómetros de diámetro. Se llama **Sagitario A***.

Se supuso su existencia al detectar estrellas con un movimiento muy rápido alrededor del centro galáctico.

ACTIVIDADES

18. Un agujero negro es un objeto tan masivo que tiene una velocidad de escape igual a la velocidad de la luz en el vacío. Determina el radio, denominado radio de Schwarzschild, para un agujero negro, a partir de la gravitación universal de Newton.

a) Con una masa 10 veces la del Sol. b) Con una masa de 1 kg.

Datos: $v_{\text{luz vacío}} = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{\text{Sol}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Solución: a) $2{,}95 \cdot 10^4$ m; b) $1{,}48 \cdot 10^{-27}$ m

5 Movimiento de planetas y satélites

Además de los cuerpos que pueblan el espacio de forma natural, las tecnologías más recientes han permitido al ser humano colocar en él satélites artificiales con el fin de conocer otros ámbitos del espacio exterior, como facilitar las comunicaciones o las predicciones meteorológicas. Muchos son satélites que orbitan a distintas alturas de la superficie de la Tierra.

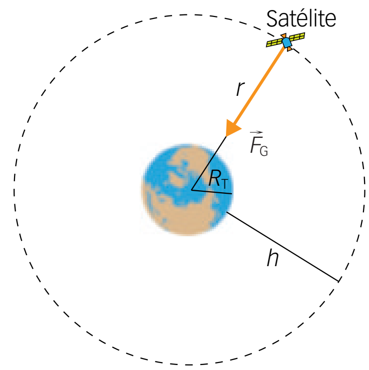


Figura 1.27. El movimiento de los satélites es similar al de los planetas que giran alrededor del Sol, describiendo órbitas circulares o elípticas, si bien nos centraremos en las órbitas circulares.

5.1. Satélites que orbitan a la Tierra

A continuación vamos a estudiar el movimiento de satélites que describen órbitas estacionarias alrededor de la Tierra (▸ Figura 1.27). Para todos ellos:

- La órbita es circular.
- La fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en movimiento.

Cálculo de la velocidad orbital

Para el satélite que gira a una altura h por encima de la superficie de la Tierra:

$$F_G = F_C \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_s}}{r^2} = \frac{\cancel{m_s} \cdot v^2}{r}$$

Así, la velocidad de un satélite que orbita a una altura h es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$$

- v es la velocidad orbital del cuerpo que gira.
- M_T es la masa de la Tierra ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg). R_T es el radio de la Tierra (6370 km).
- r es el radio de la órbita que describe el satélite.

$$r = R_T + h$$

h es la altura a la que se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

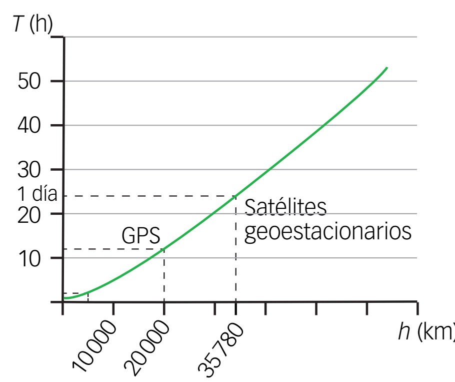


Figura 1.28. Los satélites que orbitan a mayor altura tienen un periodo mayor. Vemos, además, que T solo depende de h.

Cálculo del periodo de revolución

Para calcular el tiempo que tarda el satélite en completar su órbita haremos uso de la relación existente entre la velocidad orbital y su correspondiente velocidad angular. Siguiendo con el razonamiento anterior:

$$F_G = F_C \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_s}}{r^2} = \frac{\cancel{m_s} \cdot v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2 \qquad [1]$$

$$v = \omega \cdot r \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2 \qquad [2]$$

Relacionando [1] y [2] y reordenando, podemos obtener el periodo:

$$\frac{G \cdot M_T}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

El periodo de un satélite que orbita a una altura h es (▸ Figura 1.28):

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}$$

ACTIVIDADES

19. En febrero de 2013, la Agencia Espacial Europea colocó un nuevo satélite, Amazonas 3, en órbita circular alrededor de la Tierra.

Calcula la altura h a la que se encuentra desde la superficie terrestre (en kilómetros) y su periodo (en horas) si la velocidad del satélite es de 3074 m/s.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) 35 830 km; b) 23,96 h

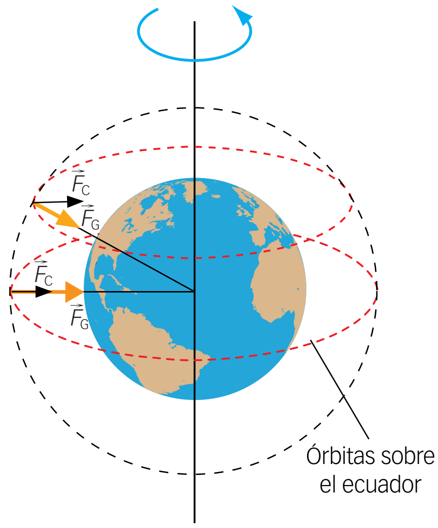


Figura 1.29. Los satélites geoestacionarios orbitan sobre el ecuador terrestre.

Satélites geoestacionarios

Se llaman **satélites geoestacionarios** o **geosíncronos** aquellos que orbitan en torno a la Tierra manteniéndose siempre encima de un mismo punto.

Para un observador terrestre estos satélites no cambian de posición con el tiempo, es decir, *parece* que no se mueven.

Para ello es necesario que su periodo de revolución sea el mismo que el de la Tierra (día sidéreo: 23 horas, 56 minutos y 3,5 segundos) y que orbiten en el **plano del ecuador terrestre** (▸ Figura 1.29). La razón está en que solo así se garantiza que el valor de la fuerza gravitatoria sea el mismo en todo su recorrido.

Por estas razones, un satélite geoestacionario orbita a una determinada altura sobre la superficie de la Tierra, que podemos calcular:

Obtenemos el radio de la órbita a partir de la expresión del periodo:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

Hacemos el cálculo para los datos de nuestro planeta:

- $R_T = 6370$ km
- $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²
- $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
- $T = 23$ horas, 56 minutos y 3,5 segundos $= 8616$ s

$$r = \sqrt[3]{\frac{(8616\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4\pi^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m}$$

La altura a la que orbita sobre la superficie terrestre es:

$$h = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = 3{,}58 \cdot 10^7\ \text{m} \simeq 35\,800\ \text{km}$$

Se puede calcular la velocidad de los satélites geoestacionarios:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4{,}22 \cdot 10^7}} = 3074\ \text{m/s}$$

En resumen: los satélites geoestacionarios se encuentran en un punto determinado sobre la superficie de la Tierra (▸ Figura 1.30). Para ello:

- Tienen un periodo de rotación igual al de la Tierra: 23 horas, 56 minutos y 3,5 segundos (8616 s).
- Su órbita está sobre el ecuador terrestre.
- Se encuentran a unos $3{,}58 \cdot 10^7$ m (35 800 km) por encima de la superficie de la Tierra.

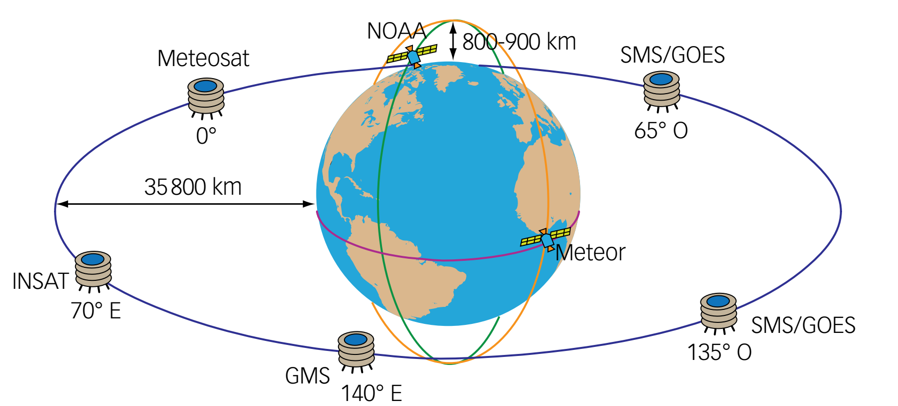


Figura 1.30. Ejemplos de satélites meteorológicos. Muchos de ellos son geoestacionarios.

Recuerda

1 día sidéreo:

23 h 56 min 3,5 s ≃ 23,98 h = 8 616 s

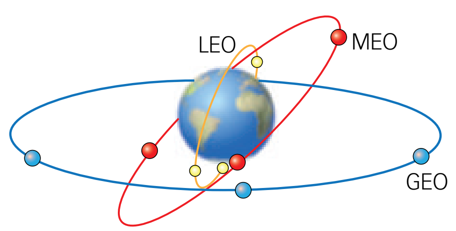


Figura 1.31. Dependiendo de su posición, los satélites que orbitan la Tierra se llaman:

- LEO: *Low Earth Orbit*. Ejemplo: el sistema Iridio, formado por 66 satélites de comunicaciones.
- GEO: *Geosynchronous Orbit*. Ejemplo: satélites meteorológicos Meteosat.
- MEO: *Mid Earth Orbit*. Ejemplo: los 24 satélites que ofrecen el servicio GPS.

5.2. Energía de los satélites

Los satélites que estudiamos están sometidos únicamente a la acción del campo gravitatorio, lo que nos permite calcular fácilmente su energía mecánica:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Para el satélite que orbita, $F_G = F_C$, de donde se deduce:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Esto permite obtener una forma más simplificada de la **energía mecánica** de un satélite:

$$E_M = \frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow \boldsymbol{E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}}$$

En estas circunstancias los satélites cumplen el principio de conservación de la energía mecánica, lo que permite calcular la velocidad que hay que proporcionarles en el punto de lanzamiento para que alcancen una órbita determinada.

Por extensión, también podremos calcular la energía que hay que comunicarles para que pasen de una órbita a otra, o la que les permitirá salir del campo gravitatorio en que se encuentran.

Recuerda

Se pueden establecer relaciones entre la E_M, la E_C y la E_P de un satélite que orbita en torno a un planeta:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot E_P; \ E_C = -\frac{1}{2} \cdot E_P$$

Velocidad de lanzamiento para poner un satélite en órbita

Supongamos que se lanza un satélite (▸ Figura 1.32) desde la superficie de la Tierra (posición 1) (▸ Figura 1.33) hasta alcanzar una órbita determinada (posición 2). Aplicamos el principio de conservación de la energía:

$$E_{M\,1} = E_{M\,2} \rightarrow E_{C\,1} + E_{P\,1} = E_{C\,2} + E_{P\,2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r}$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M}{r} \qquad [1]$$

En la posición 2, $F_G = F_C$:

$$\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} \cdot v_2^2}{\cancel{r}} \rightarrow \frac{G \cdot M}{r} = v_2^2 \qquad [2]$$

Relacionando las expresiones [1] y [2] simplificadas:

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M}{r} \rightarrow v_1^2 = 2 \cdot \left(\frac{G \cdot M}{R_T} - \frac{1}{2} \frac{G \cdot M}{r} \right)$$

La **velocidad de lanzamiento** necesaria para poner un satélite en órbita es:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r} \right)}$$

Recuerda que r es el radio de la órbita del satélite: $r = R_T + h$, y h es la altura a la que se encuentra por encima de la superficie de la Tierra.

Es decir, en función de la velocidad con que lo lanzamos, su órbita será más alta o más baja.

Figura 1.32. Lanzamiento de un satélite. Para ponerlo en órbita es necesario proporcionarle energía.

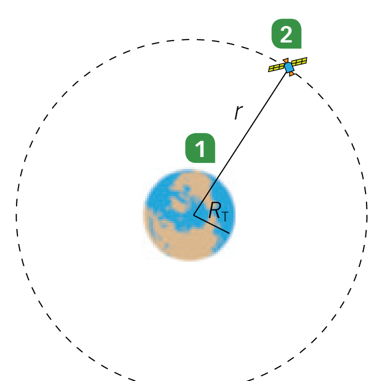


Figura 1.33. En el paso de la posición 1 a la 2 la energía se conserva.

EJEMPLO RESUELTO

9 Se ha colocado un satélite de 10^4 kg de masa en órbita alrededor de la Tierra a una altura igual a dos veces el radio terrestre. Calcula:

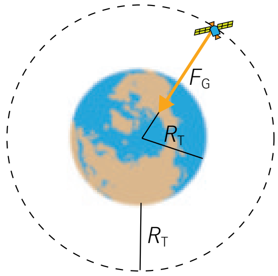
a) La energía que se le ha comunicado desde la superficie de la Tierra.

b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita.

c) El periodo del satélite en dicha órbita.

Datos: $g_0 = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $R_T = 6370$ km.

Para resolver el problema utiliza todas las magnitudes en unidades del SI.



a) El satélite estará sometido en todo momento al campo gravitatorio terrestre. Por tanto, se conservará la energía mecánica.

En el punto de lanzamiento hay que comunicarle una energía cinética que, sumada a su energía potencial, coincida con la energía mecánica en la órbita:

- Punto de lanzamiento: $E_P = -\dfrac{G\cdot M_T\cdot m}{R_T}$
- En la órbita: $E_M = E_C + E_P = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{G\cdot M_T\cdot m}{2\cdot R_T}$

$$E_{C\,\text{Lanzamiento}} + E_{P\,\text{Lanzamiento}} = E_M$$

$$E_{C\,\text{Lanzamiento}} = E_M - E_{P\,\text{Lanzamiento}}$$

$$E_{C\,\text{Lanzamiento}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{2\cdot R_T} - \left(-\frac{G\cdot M_T\cdot m}{R_T}\right) = $$

$$= \frac{3\cdot G\cdot M_T\cdot m}{4\cdot R_T} \qquad [1]$$

Como desconoces el valor de M_T, haz uso de g_0:

$$g_0 = \frac{G\cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G\cdot M_T = g_0\cdot R_T^2 \qquad [2]$$

Sustituye en [1] y calcula la E_c en el lanzamiento:

$$E_{C\,\text{Lanzamiento}} = \frac{3\cdot g_0\cdot R_T^2\cdot m}{4\cdot R_T} = \frac{3\cdot g_0\cdot R_T\cdot m}{4}$$

Utiliza todos los valores en unidades del SI:

$$E_{C\,\text{Lanzamiento}} = \frac{3\cdot 9{,}8\cdot 6370\cdot 10^3\cdot 10^4}{4} = \mathbf{4{,}68\cdot 10^{11}\ J}$$

b) Para el satélite que orbita, $F_C = F_G$.

$$F_C = G\cdot\frac{M_T\cdot m_S}{r^2}$$

Haciendo uso de la expresión [2], y dado que $r = 2\cdot R_T$:

$$F_C = \frac{g_0\cdot R_T^2\cdot m_S}{(2\cdot R_T)^2} = \frac{9{,}8\cdot 10^4}{4} = \mathbf{24\,500\ N}$$

c) La F_C permite calcular la velocidad con que orbita el satélite. A partir de ella, calcula su periodo:

$$F_C = \frac{m_S\cdot v^2}{r} = \frac{m_S\cdot(\omega\cdot r)^2}{r} = m_S\cdot r\cdot\frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

Reordena y sustituye los valores:

$$T = \sqrt{\frac{10^4\cdot 2\cdot 6370\cdot 10^3\cdot(2\pi)^2}{24\,500}} = \mathbf{1{,}433\cdot 10^4\ s \simeq 4\ h}$$

ACTIVIDADES

20. Un satélite artificial gira en una órbita circular a 300 km de altura sobre la superficie terrestre.

a) Halla la velocidad del satélite.

b) Halla su periodo orbital.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) $7{,}733\cdot 10^3$ m/s; b) $5{,}419\cdot 10^3$ s

21. Con el fin de recoger información acerca del *planeta rojo* se quiere enviar tres naves a Marte para hacer de satélites «marte-estacionarios». Determina:

a) Qué tipo de órbita tendrían los satélites.

b) A qué altura sobre la superficie de Marte se encontrarían.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_{Marte} = 6{,}42\cdot 10^{23}$ kg; $R_{Marte} = 3397$ km; $T_{Marte} = 5{,}93\cdot 10^7$ s

Solución: b) $1{,}559\cdot 10^6$ km

22. El satélite de la NASA Terra está diseñado para recoger información sobre la superficie de la Tierra, los océanos y la atmósfera. Con estos datos conseguimos estudiar la interrelación entre los distintos medios y los sistemas biológicos existentes.

El satélite sigue una órbita circular en el plano que pasa por los polos a una altura de 760 km sobre la superficie de la Tierra (circumpolar). Sabiendo que la masa del satélite es de $4{,}86\cdot 10^3$ kg, calcula:

a) El periodo del movimiento del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.

b) La energía necesaria, que hay que suministrar, para lanzar el satélite desde la superficie de la Tierra a su órbita.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) $5{,}99\cdot 10^3$ s; b) $3{,}24\cdot 10^{10}$ J

Cálculo de la energía para pasar de una órbita a otra

Supongamos ahora que queremos que nuestro satélite pase de la órbita 2 a la órbita 3 (▶ Figura 1.34). Tendremos que comunicarle una energía que sea la diferencia entre la que tiene el satélite en cada una de estas órbitas.

$$\Delta E = E_3 - E_2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{G \cdot M \cdot m}{r_3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{G \cdot M \cdot m}{r_2}\right)$$

Es decir:

La energía necesaria para pasar de una órbita de radio r_2 a otra de radio r_3, siendo $r_2 < r_3$, es:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$

Si $r_3 > r_2$, $\Delta E > 0$.

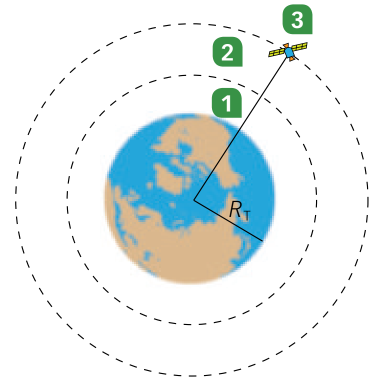


Figura 1.34. Para pasar de 2 a 3 hemos de comunicar energía al satélite.

Velocidad de escape

Para que un satélite escape del campo gravitatorio donde se encuentra debe tener $E_M \geq 0$.

Un satélite que orbita a una distancia h por encima de la superficie de un planeta escapará de su campo gravitatorio si:

$$E_M = E_C + E_P \geq 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{escape}}^2 - G \cdot \frac{M_P \cdot m}{R_P + h} \geq 0$$

La **velocidad de escape** de un satélite que se encuentra en el campo gravitatorio de un planeta, de masa M_P y radio R_P, es:

$$v_{\text{escape}} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P + h}}$$

h es la distancia a la que se encuentra el satélite sobre la superficie del planeta.

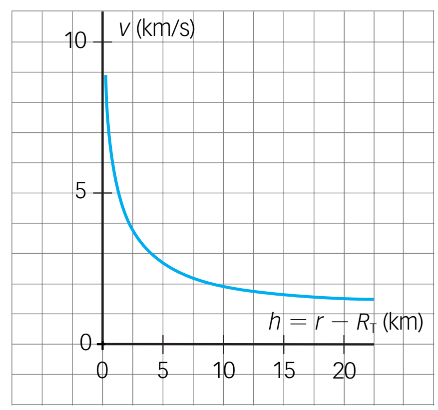


Figura 1.35. En la gráfica observamos que la velocidad de escape de un satélite es menor cuanto mayor sea la distancia que lo separa del cuerpo que crea el campo gravitatorio.

ACTIVIDADES

23. Una lanzadera espacial pasa de una órbita circular a 200 km a otra a 520 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Si la masa de la lanzadera es de 55 000 kg:

a) Calcula el periodo y la velocidad de la lanzadera en su órbita inicial.

b) ¿Qué energía necesita la lanzadera para desplazarse a la nueva órbita?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) 5298 s; 7792 m/s; b) $7{,}75 \cdot 10^{10}$ J

24. En un planeta esférico de radio 2200 km, la aceleración de la gravedad en la superficie es $g_0 = 5{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Determina la masa del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.

b) ¿A qué altura h debe orbitar un satélite de 400 kg de masa que describa una órbita circular en un día?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Solución: a) $3{,}77 \cdot 10^{23}$ kg; 4781,2 m/s; b) $1{,}46 \cdot 10^7$ m

25. Un proyectil es lanzado desde el nivel del mar hasta una altura de $1{,}2 \cdot 10^6$ m sobre la superficie de la Tierra. Si la masa del proyectil es de 600 kg, calcula:

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del proyectil.

b) Qué energía hay que suministrar al proyectil para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa altura.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) $5{,}976 \cdot 10^9$ J; b) $1{,}586 \cdot 10^{10}$ J

26. Responde las siguientes cuestiones. Justifica las respuestas.

a) ¿Cuál es la velocidad de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra? Deduce su expresión.

b) ¿Cómo varía la velocidad de escape de un cuerpo si cambia su altura sobre la superficie terrestre de $2R_T$ a $3R_T$?

6 Viajes a través del espacio

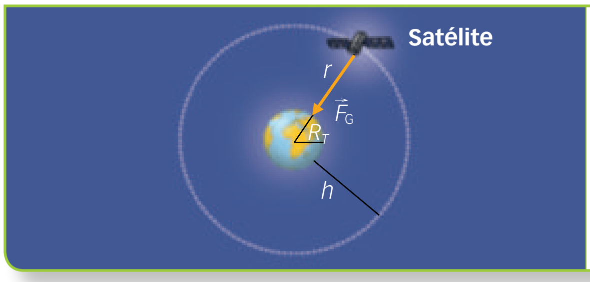
Desde mediados del siglo XX, diversos países y organismos internacionales envían naves al espacio, tripuladas o no, cuya misión es aumentar nuestro conocimiento del espacio exterior.

En el periplo, las naves salen del campo gravitatorio terrestre y entran en el campo lunar o de otros planetas. Para conocer su movimiento hay que estudiar el comportamiento de cuerpos sometidos a la acción de varios campos gravitatorios generados por cuerpos en movimiento.

6.1. El problema de los tres cuerpos. Puntos de Lagrange y caos determinista

La ley de la gravitación universal de Newton explica perfectamente el movimiento de dos cuerpos que se encuentran bajo la atracción gravitatoria mutua, como el Sol y la Tierra, la Tierra y la Luna o la Tierra y un satélite.

El cuerpo pequeño gira en torno al grande describiendo una órbita estacionaria (por simplicidad, la suponemos circular) y su periodo de rotación está relacionado con la distancia que separa los centros de ambos:



$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}}$$

El problema es mucho más difícil de abordar si pensamos en el movimiento de tres o más cuerpos bajo una acción gravitatoria mutua.

En 1772, los matemáticos Joseph-Louis Lagrange y Leonhard Euler estudiaron el problema de los tres cuerpos con algunas restricciones. Supusieron que un tercer cuerpo, de masa despreciable, se movía en el campo gravitatorio de los otros dos, de masas M_1 y M_2. M_2 era menor que M_1 y giraba en torno a él describiendo una órbita circular (o aproximada). Como ejemplos de esta situación imaginaron una mota de polvo que se mueve bajo la acción gravitatoria de la Tierra y la Luna, o del Sol y la Tierra.

Para estos sistemas Euler y Lagrange encontraron cinco puntos en los que la mota de polvo describía una órbita en torno a M_1 del mismo periodo que la rotación de M_2 (▶ Figura 1.36). Se denominan **puntos de Lagrange** o **puntos L**.

Trazando las superficies equipotenciales para el sistema encontraron que:

- Los puntos L_4 y L_5 eran de **equilibrio estable**. Si el tercer cuerpo se separaba un poco de su posición de equilibrio, acababa volviendo a ella.
- Los puntos L_1, L_2 y L_3 eran de **equilibrio inestable**. Cualquier desplazamiento del equilibrio genera fuerzas que lo alejan de esta posición.

En terminología actual, diríamos que es un fenómeno de **caos determinista**. El sistema está perfectamente determinado, pero un pequeño cambio en las condiciones de origen en L_1, L_2 y L_3 provoca un gran efecto que puede ser un gran desplazamiento por una superficie equipotencial.

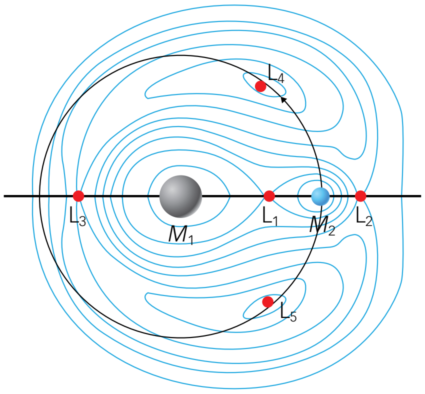


Figura 1.36. Los puntos señalados como puntos L giran en torno a M_1 con un periodo igual al de la órbita de giro de M_2.

Localización de los puntos de Lagrange

L_1, L_2 y L_3 están en la línea que une las masas M_1 y M_2.

Un cuerpo entre M_1 y M_2 estará sometido a una fuerza gravitatoria neta menor que la ejercida por M_1 solo. El tercer cuerpo de masa despreciable situado en un punto de esa línea describirá una órbita de mayor periodo que el que le correspondería a un cuerpo sometido solo a la acción de M_1. Existe un punto L_1 para el cual el periodo del tercer cuerpo coincide con el de rotación de M_2 en torno a M_1.

Razonamientos similares permiten localizar L_2 y L_3. Este último está más cerca de la órbita de M_2 porque el cuerpo pequeño contribuye poco a la fuerza neta que actúa sobre el tercer cuerpo en L_3.

L_4 y L_5 están prácticamente en la órbita de M_2. La línea que los une con M_1 forma un ángulo de 60° con la línea que une M_1 y M_2. Su cálculo es menos intuitivo.

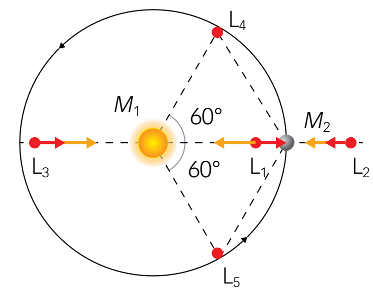


Figura 1.37. Localización de los puntos de Lagrange.

6.2. Utilidad de los puntos de Lagrange

A partir del último cuarto del siglo XX, el gran desarrollo de la potencia de cálculo de los ordenadores ha propiciado la posibilidad de utilizar los puntos de Lagrange para llevar a cabo misiones espaciales.

Para los sistemas Sol-Tierra o Tierra-Luna, una nave espacial hará el papel de tercer cuerpo de masa despreciable. Si se sitúa en uno de los cinco puntos L, podrá realizar observaciones en posición de equilibrio.

En la tabla siguiente se recogen las naves que han ido o que están realizando misiones en los puntos L_1 y L_2 del sistema Sol-Tierra, ambos a 1,5 millones de kilómetros de la Tierra. El punto L_3 aún no se ha utilizado para ello. La mayoría son misiones de la NASA o la ESA (Agencia Espacial Europea).

Punto L_1 del sistema Sol-Tierra	Punto L_2 del sistema Sol-Tierra
• Entre diciembre de 2001 y abril de 2004, la sonda Génesis de la NASA recogió partículas de viento solar. Actualmente se encuentran allí: • WIND, satélite de la NASA dedicado a medir el viento solar y el campo magnético. • SOHO (*Solar and Heliospheric Observatory*), conjunto de instrumentos destinados a observar el Sol o sus partes. Es una misión conjunta de la ESA y la NASA. • ACE (*Advanced Composition Explorer*), satélite de la NASA que analiza la composición del viento solar.	• Entre 2001 y 2010, la sonda WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) de la NASA estudió la radiación de fondo de microondas remanente del *big bang*. • El Observatorio Espacial Herschel observó objetos distantes poco conocidos. En junio de 2013 la falta de helio en sus depósitos obligó a lanzarla fuera. • Actualmente se encuentran allí el observatorio espacial Planck y la sonda Gaia, cuya misión es completar un catálogo 3D de mil millones de objetos astronómicos. Las tres últimas son misiones de la ESA.

6.3. Autopistas espaciales

Se denominan así las vías que pueden seguir las naves espaciales para desplazarse de un lugar a otro del espacio utilizando la menor cantidad posible de combustible.

Se aprovechan los puntos L de equilibrio inestable. Una pequeña desviación de la posición de equilibrio desplaza la nave a puntos alejados sin apenas gasto energético. Se cree que así han circulado por el sistema solar cometas y asteroides que han traído a la Tierra elementos necesarios para la vida y que la han modificado drásticamente, como el asteroide que provocó la desaparición de los dinosaurios.

El físico y matemático de la NASA **Martin Lo** diseñó, sobre esta base, la trayectoria de vuelo de la misión Génesis, que culminó con éxito en 2004.

SABER HACER

Campo gravitatorio creado por masas puntuales con distribución geométrica

10 Dos masas de 700 kg y 100 kg, respectivamente, se encuentran fijas en los vértices superiores de un cuadrado de 20 m de lado.

a) Halla y dibuja el campo gravitatorio en el centro del cuadrado.

b) Halla el trabajo necesario para llevar una masa de 200 g desde el punto anterior hasta el vértice libre del cuadrado más alejado del cuerpo de mayor masa.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

SOLUCIÓN

1. Comprende el enunciado.

Datos conocidos	Resultados a obtener
• Valor de dos masas y su localización en un cuadrado.	• Campo gravitatorio en el centro del cuadrado. • Trabajo para mover una tercera masa entre dos puntos.

Haz todos los cálculos en unidades del SI.

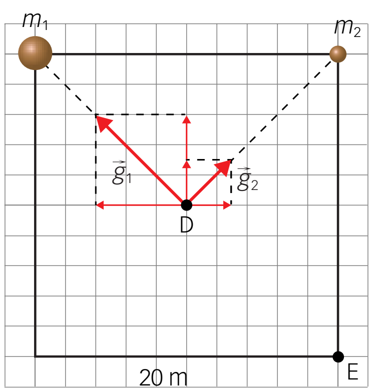
2. Representa los cuerpos en la posición del enunciado.

a) Dibuja el vector del campo que crea cada uno en el centro del cuadrado:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Cada vector forma un ángulo de 45° con la horizontal.

Puedes calcular su módulo y obtener las componentes haciendo uso de las relaciones seno y coseno. El dibujo permite conocer el signo de cada componente:



$$g = \frac{G \cdot M}{r^2};\ r_1 = r_2 = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{20^2 + 20^2}}{2} = 14{,}14\ \text{m}$$

- $g_1 = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{14{,}14^2} = 2{,}33 \cdot 10^{-10}\ \text{N/kg}$

$\vec{g}_1 = -g_1 \cdot \cos 45°\ \vec{i} + g_1 \cdot \text{sen } 45°\ \vec{j}$

$\vec{g}_1 = -1{,}65 \cdot 10^{-10}\ \vec{i} + 1{,}65 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ \text{N/kg}$

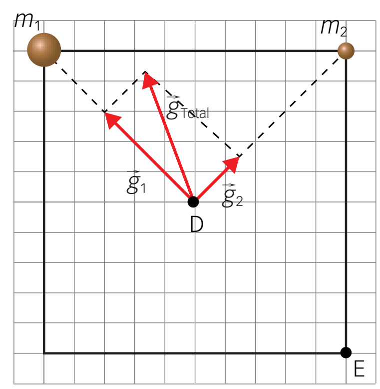
- $g_2 = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{14{,}14^2} = 3{,}34 \cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$

$g_2 = +g_2 \cdot \cos 45°\ \vec{i} + g_2 \cdot \text{sen } 45°\ \vec{j}$

$g_2 = +2{,}36 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} + 2{,}36 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}\ \text{N/kg}$

$\rightarrow \vec{g}_{\text{Total}} = (-1{,}65 \cdot 10^{-10} + 2{,}36 \cdot 10^{-11})\ \vec{i}\ +$
$+ (1{,}65 \cdot 10^{-10} + 2{,}36 \cdot 10^{-11})\ \vec{j}\ \text{N/kg}$

$\vec{g}_{\text{Total}} = \mathbf{-1{,}41 \cdot 10^{-10}\ \vec{i} + 1{,}89 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ N/kg}$



b) Calcula el trabajo para desplazar la masa de D → E.

$$W_{D \to E} = -\Delta E_P = -(E_{P\,E} - E_{P\,D}) = -m \cdot (V_{T\,E} - V_{T\,D})$$

Calcula el potencial total en cada punto:

- $V_{T\,D} = V_{1\,D} + V_{2\,D} = -\dfrac{G \cdot M_1}{r_{1\,D}} - \dfrac{G \cdot M_2}{r_{2\,D}}$

$$V_{T\,D} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{14{,}14} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{14{,}14}$$

$$V_{T\,D} = -3{,}774 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

- $V_{T\,E} = V_{1\,E} + V_{2\,E} = -\dfrac{G \cdot M_1}{r_{1\,E}} - \dfrac{G \cdot M_2}{r_{2\,E}}$

$$V_{T\,E} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{2 \cdot 14{,}14} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{2 \cdot 14{,}14}$$

$$V_{T\,E} = -1{,}984 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Entonces:

$$W_{D \to E} = -0{,}2 \cdot ((-1{,}984 \cdot 10^{-9}) - (-3{,}774 \cdot 10^{-9})) =$$
$$= \mathbf{-3{,}52 \cdot 10^{-9}\ J}$$

3. Evalúa el resultado.

El trabajo es negativo. Para que el cuerpo se desplace desde D hasta E hay que realizar un trabajo en contra de las fuerzas del campo, ya que el cuerpo se aleja de las masas que crean el campo.

Por la simetría, los cálculos vectoriales se simplifican si calculamos el módulo y utilizamos las razones trigonométricas para calcular las componentes de los vectores.

Movimiento en el campo gravitatorio

11 Un trozo de un meteorito de 400 kg de masa se mueve directo hacia la Tierra, en caída libre, bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. A 200 km sobre la superficie de la Tierra su velocidad es de 2300 m/s. Calcula:

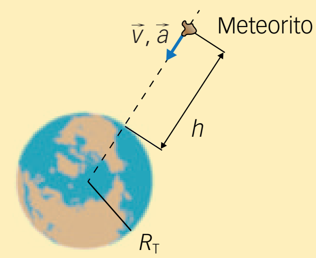
a) Las energías cinética y potencial a 200 km sobre la superficie de la Tierra.

b) La altura inicial desde la que empezó a caer suponiendo que su velocidad a esa altura fuese nula.

c) ¿Qué aceleración tendría el objeto en el instante inicial?

d) La velocidad y la aceleración con la que impactará el meteorito en la superficie de la Tierra.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.



SOLUCIÓN

1. Comprende el enunciado.

Datos conocidos	Resultados a obtener
• Masa, velocidad y posición de un cuerpo en caída libre.	• Energía cinética y potencial en un punto. • Altura del punto de inicio. • Velocidad y aceleración en el punto de impacto.

Haz todos los cálculos en unidades del SI.

2. Calcula E_C y E_P.

a) La energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot (2300)^2 = \mathbf{1{,}058 \cdot 10^9\ J}$$

La energía potencial es:

$$E_P = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

$$E_P = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 400}{(200 + 6370) \cdot 10^3} = \mathbf{-2{,}428 \cdot 10^{10}\ J}$$

3. Aplica la conservación de la energía.

b) Si a la altura inicial la velocidad era nula, la energía potencial inicial era igual a la energía total a una altura de 200 km sobre la superficie:

$$E_{M\,i} = E_{P\,i} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = E_C + E_P \rightarrow$$

$$\rightarrow h = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{E_C + E_P} - R_T \rightarrow$$

$$\rightarrow h = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 400}{1{,}058 \cdot 10^9 - 2{,}428 \cdot 10^{10}} - 6370 \cdot 10^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \mathbf{5 \cdot 10^5\ m = 500\ km}$$

4. Deduce la aceleración a partir de la ley fundamental de la dinámica.

c) La aceleración se puede calcular a partir de la fuerza ejercida sobre el objeto y su masa.

$$F_G = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F_G}{m}$$

En ese punto la distancia del objeto al centro de la Tierra es $R_T + h$.

$$a = \frac{G \cdot \dfrac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}}{m} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$a = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5)^2} = 8{,}45\ \text{N/kg} = \mathbf{8{,}45\ m/s^2}$$

5. Aplica la conservación de la energía.

d) Cuando impacte con la superficie de nuevo, el cuerpo tendrá cierta energía cinética y energía potencial:

$$E_{M\,i} = E_{P\,i} = E_{C\,Sup} + E_{P\,Sup} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{1}{6370 \cdot 10^3} - \frac{1}{6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5}\right)} = \mathbf{3019\ m/s}$$

La aceleración con la que impacta es el valor de g en la superficie de la Tierra:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3} = \mathbf{9{,}8\ m/s^2}$$

6. Evalúa el resultado.

El trozo de meteorito cae libremente a la Tierra y no orbita porque su velocidad en el punto que se indica en el apartado a) es inferior a la que se requiere para ello.

Para un cuerpo que orbita:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = \frac{1}{2} \cdot E_P$$

$$E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot E_P \rightarrow E_C = -\frac{1}{2} \cdot E_P$$

$$E_C = \frac{2{,}428 \cdot 10^{10}}{2} = 1{,}214 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Campo gravitatorio creado por masas puntuales

27. Indica qué dimensiones tiene la intensidad del campo gravitatorio en el sistema internacional.

28. Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifica la respuesta: «Si en un punto de un campo creado por varias masas la intensidad del campo es nula, también lo será el potencial gravitatorio».

29. Considera dos masas puntuales tales que $m_1 = m_2$. Situamos una tercera masa puntual entre ellas: m_3. ¿En qué punto entre las masas sería nula la fuerza? ¿Cuál sería la energía potencial de m_3 en esa posición?

30. Una partícula se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y su energía cinética? Razona la respuesta.

31. Dos cuerpos de 2500 kg y 1500 kg, respectivamente, se encuentran separados una distancia de 4 m. Calcula:

a) El módulo de la fuerza de atracción entre ambos.

b) El valor del campo gravitatorio total en el punto medio de la recta que los une.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solución: a) $1{,}56 \cdot 10^{-5}$ N; b) $-1{,}67 \cdot 10^{-8}\ \vec{u}_{rA}$ N/kg

32. Según datos recogidos, la población mundial es de 7300 millones de habitantes (2015). Si suponemos que la masa media de una persona es de 60 kg, calcula:

a) El peso de todos los habitantes del planeta.

b) La fuerza gravitatoria y la energía gravitatoria entre dos personas separadas 10 m.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) $4{,}31 \cdot 10^{12}$ N; b) $2{,}40 \cdot 10^{-9}$ N

33. Un cuerpo de 2 kg de masa (m_1) se encuentra situado en el origen de coordenadas. Un segundo cuerpo de 3 kg de masa (m_2) se encuentra en el punto (6, 4) m. Calcula el módulo y el vector de la fuerza con que la masa m_1 atrae a la masa m_2.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solución: $7{,}70 \cdot 10^{-12}$ N; $-6{,}41 \cdot 10^{-12}\ \vec{i} - 4{,}27 \cdot 10^{12}\ \vec{j}$

34. Dos partículas de masas 8 kg y 1 kg se encuentran en el vacío y separadas 40 cm. Calcula:

a) La energía potencial inicial del sistema y el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al aumentar la separación entre las partículas hasta 80 cm.

b) El trabajo necesario para separar las partículas desde la posición de partida hasta el infinito y el trabajo necesario para restablecer la distribución inicial.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solución: a) $-1{,}334 \cdot 10^{-9}$ J; $-6{,}67 \cdot 10^{-10}$ J; b) $-1{,}334 \cdot 10^{-9}$ J; $1{,}334 \cdot 10^{-9}$ J

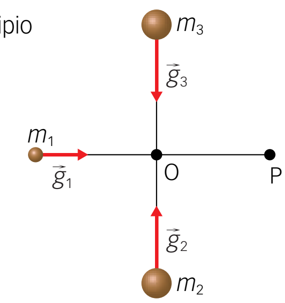
EJEMPLO RESUELTO

12 Tres planetas de masas m_1, m_2 y m_3 se encuentran situados en los puntos $(-a, 0)$, $(0, -a)$ y $(0, a)$, respectivamente. Considerando que son masas puntuales de valores $m_2 = m_3 = 2m_1 = 4 \cdot 10^{21}$ kg, y siendo $a = 2 \cdot 10^5$ m, calcula:

a) El vector campo gravitatorio originado por los tres planetas en el punto O(0, 0) m.

b) El potencial gravitatorio (energía potencial por unidad de masa) originado por los tres planetas en el punto P(a, 0) m.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².



a) De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Como se observa en el dibujo, $\vec{g}_2 = -\vec{g}_3$, por tanto, $\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1$.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \frac{G \cdot m_1}{a^2}\ \vec{i}$$

Sustituye los valores utilizando las unidades del SI:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^{10}}\ \vec{i} = \mathbf{3{,}335\ \vec{i}\ \frac{N}{kg}}$$

b) El potencial es una magnitud escalar. Por el principio de superposición:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3$$

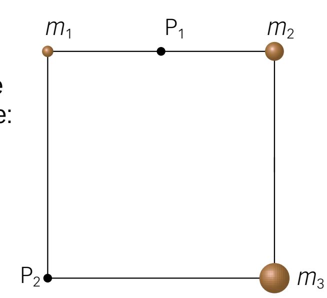
$$V_T = -\frac{G \cdot m_1}{d_1} - \frac{G \cdot m_2}{d_2} - \frac{G \cdot m_3}{d_3}$$

Observando el dibujo: $d_2 = d_3 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Además, $V_2 = V_3$. La distancia de P a m, es $2 \cdot a$

$$V_T = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^5} - 2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{21}}{2 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{2}}$$

$$V_T = \mathbf{-2{,}22 \cdot 10^6\ J/kg}$$

35. Tenemos tres masas puntuales en tres de los vértices de un cuadrado. Si m_2 y m_3 son el doble y el triple de m_1, respectivamente:



a) ¿Qué masa crea el campo más grande en el punto P_1?

b) Si el lado mide 100 m y $m_1 = 2{,}5$ Mt (millones de toneladas), ¿cuál es el valor del potencial gravitatorio creado por las tres masas en el punto P_1?

c) Calcula y representa gráficamente el campo gravitatorio total en el punto P_2.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solución: b) $-1{,}45 \cdot 10^{-2}$ N · m; c) $6{,}181 \cdot 10^{-5}\ \vec{i} + 2{,}847 \cdot 10^{-5}\ \vec{j}$ N/kg

Representación del campo gravitatorio

36. Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifica la respuesta: «El trabajo realizado al trasladar una masa entre dos puntos de una misma superficie equipotencial nunca es cero».

Campo gravitatorio de los cuerpos celestes

37. Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y razona la respuesta: «La intensidad de un punto del campo gravitatorio terrestre es tanto mayor cuanto mayor es la altura a la que se encuentra desde la superficie terrestre».

38. ¿Qué trabajo realiza una fuerza que actúa sobre una masa puntual que describe media órbita circular de radio R alrededor de otra masa? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito? Razona las respuestas.

39. Contesta.

a) ¿Qué significa la velocidad de escape de un campo gravitatorio desde el punto de vista energético?

b) ¿Qué signo tiene la energía total de un cometa que describe una órbita hiperbólica?

40. Explica el concepto de *energía potencial gravitatoria*. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa m situada a una distancia r de otra partícula de masa M? ¿En qué caso se puede utilizar la expresión para la energía potencial gravitatoria $E_P = m \cdot g \cdot h$?

41. Sean dos planetas tal que el radio y la masa del primer planeta son el doble que los del segundo. Si el peso de una persona en el segundo planeta es P, ¿cuánto sería en el primero?

Solución: $P/2$

42. Dos planetas tienen la misma densidad y distinto radio. Si el radio de uno es 7000 km y el del otro es 6000 km, calcula:

a) La relación que existe entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de cada planeta.

b) La relación entre las velocidades de escape en cada planeta.

Solución: a) $g_1 = 1{,}167 \cdot g_2$; b) $v_{\text{escape 1}} = 1{,}167 \cdot v_{\text{escape 2}}$

43. Supongamos que en otra galaxia lejana existe un planeta cuya masa M es cuatro veces la masa de la Tierra ($M = 4M_T$). Además, la intensidad del campo gravitatorio en su superficie coincide con la existente en la superficie terrestre, $g = g_T$.

a) ¿Cuál será la relación entre los radios de ambos planetas, R/R_T?

b) ¿Desde la superficie de qué planeta será mayor la velocidad de escape? Determina la relación entre ambas.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) $R/R_T = 2$; b) $v_{\text{escape P}}/v_{\text{escape T}} = \sqrt{2}$

EJEMPLO RESUELTO

13 a) Calcula el periodo orbital de Marte sabiendo que el semieje más grande de su órbita es 1,524 veces el de la órbita terrestre.

b) La masa de Marte es $6{,}5 \cdot 10^{23}$ kg y el volumen del planeta es $1{,}617 \cdot 10^{11}$ km³. Suponiendo que Marte es una esfera, calcula la aceleración de la gravedad en la superficie.

c) Un satélite de 600 kg está en órbita circular sobre el ecuador marciano con un periodo orbital de 11,8 h. ¿Cuál es la velocidad del satélite?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) Teniendo en cuenta la 3.ª ley de Kepler:

$$\frac{T_M^2}{d_{S-M}^3} = \frac{T_T^2}{d_{S-T}^3} \qquad [1]$$

El enunciado indica: $d_{S-M} = 1{,}524 \cdot d_{S-T}$.
Sustituye en [1]:

$$\frac{T_M^2}{1{,}524^3 \cdot d_{S-T}^3} = \frac{T_T^2}{d_{S-T}^3}.$$ Simplifica y reordena:

$$T_M = T_T \cdot \sqrt{1{,}524^3} = 1{,}88 \cdot T_T$$

b) Calcula el radio con su volumen, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$

Despeja y sustituye los valores en unidades del SI:

$$R_M = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1{,}617 \cdot 10^{11} \cdot 10^9}{4\pi}} = 3{,}38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

En la superficie de Marte:

$$g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{23}}{(3{,}38 \cdot 10^6)^2} = 3{,}80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) El satélite describe una órbita estacionaria. Para él:

$$F_G = F_C \rightarrow \frac{G \cdot M_M \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{G \cdot M_M}{r} = v^2 \qquad [2]$$

Relaciona el periodo con la velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{r} \cdot r \rightarrow r = \frac{v \cdot T}{2\pi} \qquad [3]$$

Sustituye [3] en [2]:

$$\frac{G \cdot M_M}{\frac{v \cdot T}{2\pi}} = v^2 \rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_M \cdot 2\pi}{r}}$$

Calcula en unidades del SI:

$$v = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 2\pi}{11{,}8 \cdot 3600}} = \mathbf{1{,}858 \cdot 10^3\ m/s}$$

44. El 28 de septiembre de 2015 hubo una «superluna»: la Luna estuvo a 356 876 km de la Tierra, la menor distancia en su órbita elíptica. El 11 de octubre se situó a 406 450 km, la mayor distancia. Calcula la diferencia entre el valor de la gravedad creada por la Luna en la Tierra esos días.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_{Luna} = 7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg.

Solución: $8{,}65 \cdot 10^{-6}$ N/kg

El movimiento de satélites

45. Un satélite artificial de 200 kg orbita a una altura *h* sobre la superficie terrestre donde el valor de la gravedad es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra.

a) ¿Se realiza trabajo para mantener el satélite en órbita?

b) Calcula el radio, el periodo de la órbita y la energía mecánica del satélite.

Datos: $g_0 = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Solución: b) $1{,}103 \cdot 10^7$ m; $1{,}15 \cdot 10^4$ s; $-3{,}61 \cdot 10^9$ J

46. El satélite *Astra 2C*, empleado para emitir señales de televisión, es un satélite en órbita circular geoestacionaria.

a) Calcula la altura a la que orbita respecto de la superficie de la Tierra y su velocidad.

b) Calcula la energía invertida para llevar el satélite desde la superficie de la Tierra hasta su órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $R_T = 6370$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; masa del satélite, $m = 4500$ kg.

Solución: a) $3{,}58 \cdot 10^7$ m; 3072,6 m/s b) $2{,}61 \cdot 10^{11}$ J

47. La luna Ío de Júpiter tiene una masa de $8{,}94 \cdot 10^{22}$ kg y una gravedad en su superficie de 1,81 m/s^2.

a) Calcula el radio en kilómetros de Ío y su volumen.

b) Una sonda está en caída libre hacia la superficie de Ío. A 5000 km del centro de la luna la velocidad de la sonda es de 1250 m/s. ¿Qué velocidad tendrá la sonda a 2000 km del centro?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Solución: a) 1815 km; $2{,}5 \cdot 10^{19}$ m^3; b) 2267,2 m/s

48. En 1969 Michael Collins tripulaba el módulo del mando *Columbia*, de la misión Apollo 11, mientras Neil Armstrong y Edwin Aldrin caminaban sobre la Luna. La nave orbitaba a 100 km de altura sobre la superficie de la Luna con un periodo de 118 min. Calcula:

a) La masa de la Luna y la intensidad del campo gravitatorio en la superficie lunar.

b) La velocidad de escape desde la superficie lunar.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $R_{Luna} = 1{,}74 \cdot 10^3$ km.

Solución: a) $7{,}356 \cdot 10^{22}$ kg; 1,62 m/s^2; b) 2375,743 m/s

49. La Estación Espacial Internacional, de 280 000 kg de masa, gira a una altura media de 360 km sobre la superficie de la Tierra siguiendo una órbita circular. Debido al rozamiento con la alta atmósfera, su altura disminuye continuamente. Por este motivo, la estación ha descendido hasta una órbita circular de 340 km de altura. Calcula:

a) Las velocidades orbitales a 340 km y 360 km de altura.

b) La energía necesaria para recuperar la órbita inicial.

c) La diferencia en el periodo de las órbitas.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

Solución: a) 7698,5 m/s; 7710,0 m/s; b) $2{,}47 \cdot 10^{10}$ J; c) 24,47 s

EJEMPLO RESUELTO

14 a) *SAC-D Aquarious* es un satélite de observación climática y oceanográfica. Fue lanzado en junio de 2011 por un cohete que lo colocó en una órbita circular sobre la superficie de la Tierra a una altura $h = 660$ km. Calcula la velocidad orbital del *Aquarious* y el periodo de su órbita.

b) Determina el trabajo mínimo que deberían realizar los motores del satélite si fuese necesario pasar a otra órbita más alejada, el doble de la primera: $2h$.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_{Aquarious} = 1350$ kg.

a) Para el satélite que orbita:

$$F_G = F_C \rightarrow \frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{(R_T + h)^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{R_T + h}$$

Simplifica y calcula utilizando las unidades del SI:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3}} =$$
$$= \mathbf{7520{,}8\ m/s}$$

Relaciona T con la velocidad orbital del satélite:

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot (R_T + h) \rightarrow T = \frac{2\pi}{v} \cdot (R_T + h)$$

$$T = \frac{2\pi}{7520{,}8} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3) = 5881{,}5\ \text{s}$$

b) Los motores deberían realizar un trabajo igual a la diferencia de energía entre las órbitas:

$$W_{i\to f} = E_{Mf} - E_{Mi} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{(R_T + 2 \cdot h)} - \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{(R_T + h)}\right)$$

$$W_{i\to f} = G \cdot M_T \cdot m \left(\frac{1}{(R_T + h)} - \frac{1}{(R_T + 2 \cdot h)}\right)$$

$$W_{i\to f} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot$$
$$\cdot 1350 \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3} - \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 660 \cdot 10^3}\right)$$
$$W_{i\to f} = \mathbf{6{,}55 \cdot 10^9\ J}$$

50. Prepara una presentación acerca de los distintos tipos de satélites, LEO, MEO y GEO. Incluye su aplicación, las características de las naves, órbita, periodo, etc.

51. Los puntos de Lagrange son los cinco puntos en los que un cuerpo de masa despreciable, en el campo gravitatorio creado por otros dos cuerpos de masa M_1 y M_2, siendo $M_1 > M_2$, tiene una órbita síncrona a la que describe M_2 al girar en torno a M_1. Tres de estos puntos, L_1, L_2 y L_3, están en la línea que une M_1 y M_2. Localízalos en un diagrama y razona por qué la distancia que separa L_1 de M_1 es la menor, y la que separa L_2 de M_1 es la mayor.

RESUMEN

1 EL CONCEPTO DE CAMPO

Llamamos **campo** a una región del espacio en la que se aprecia el efecto de la perturbación provocada por un cuerpo que tiene una propiedad que le hace interaccionar con otros cuerpos que también tienen esa propiedad.

El cuerpo que origina la perturbación crea distorsiones espacio-temporales que causan interacciones entre cuerpos que no están en contacto.

2 CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR MASAS PUNTUALES

Campo gravitatorio es la región del espacio en la que se aprecia la perturbación provocada por la masa de un cuerpo.

Intensidad del campo gravitatorio en un punto

Campo creado por una masa puntual de masa *M*:

$$\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Campo creado por una distribución de masas puntuales (principio de superposición):

$$\vec{g}_{Total} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i \left(-\frac{G \cdot M_i}{r_i^2}\right) \cdot \vec{u}_{r\,i}$$

Trabajo debido a las fuerzas gravitatorias

El campo gravitatorio es un **campo conservativo** porque el trabajo realizado por las fuerzas del campo gravitatorio depende solo del punto inicial y final del desplazamiento, y no de la trayectoria seguida.

$$W_{i \to f} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i}$$

Energía potencial gravitatoria

La **energía potencial gravitatoria E_P** es aquella que posee una masa por encontrarse bajo la influencia gravitatoria de otra u otras masas.

$$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

La energía potencial es una magnitud escalar, y en el SI se mide en **julios (J)**.

Conservación de la energía mecánica en un campo gravitatorio

Teorema de conservación de la energía mecánica: cuando un sistema se ve sometido solo a la acción de fuerzas conservativas, su energía mecánica se conserva.

$$E_{C\,f} + E_{P\,f} = E_{C\,i} + E_{P\,i} = E_M$$

Potencial gravitatorio en un punto

Se denomina **potencial en un punto *V*** a la energía potencial por unidad de masa en ese punto:

$$V = \frac{E_P}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

El potencial es una magnitud escalar y, en el sistema internacional, se mide en **J/kg**.

Potencial en un punto debido a una **distribución** de **masas puntuales**:

$$V_T = \sum_i V_i = \sum_i -\frac{G \cdot M_i}{r_i}$$

Si consideramos dos puntos de un campo gravitatorio, *i* y *f*, denominamos **diferencia de potencial** entre ambos a la relación $V_f - V_i$:

$$\Delta V = V_f - V_i \rightarrow \Delta V = -\frac{G \cdot M}{r_f} - \left(-\frac{G \cdot M}{r_i}\right)$$

3 REPRESENTACIÓN DEL CAMPO GRAVITATORIO

Las líneas de campo son líneas tangentes al vector intensidad de campo en cada punto.

Las líneas de campo no se pueden cruzar.

Las superficies equipotenciales son regiones del espacio en las que el potencial gravitatorio tiene el mismo valor.

Las superficies equipotenciales no se pueden cruzar.

4 CAMPO GRAVITATORIO DE LOS CUERPOS CELESTES

Denominamos **velocidad de escape** a la velocidad que debe tener un cuerpo para liberarse de la atracción gravitatoria de otro cuerpo.

Llamamos **materia oscura** a aquella que no emite suficiente radiación electromagnética para ser detectada con los medios actuales, pero cuya existencia se deduce a partir de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible.

5 MOVIMIENTO DE PLANETAS Y SATÉLITES

Satélites que orbitan a la Tierra

Para el satélite que gira a una altura *h* por encima de la superficie de la Tierra:

- $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$
- $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}$

Se llaman **satélites geoestacionarios** o **geosíncronos** aquellos que orbitan en torno a la Tierra manteniéndose siempre encima de un mismo punto.

Energía de los satélites

La **energía mecánica** de un satélite es:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

La **velocidad de lanzamiento** necesaria para poner un satélite en órbita es:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r}\right)}$$

La energía necesaria para pasar de una órbita de radio r_2 a otra de radio r_3, siendo $r_2 < r_3$ es:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$

La velocidad de escape de un satélite que se encuentra en el campo gravitatorio de un planeta, de masa M_P y radio R_P, es:

$$v_{escape} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P + h}}$$

h es la distancia a la que se encuentra el satélite sobre la superficie del planeta.

FÍSICA EN TU VIDA

Satélites meteorológicos

Además de las medidas de temperatura, presión atmosférica y humedad, el uso de imágenes obtenidas mediante satélite ha permitido mejorar notablemente los pronósticos meteorológicos, aunque solo para unos pocos días. Existen dos tipos de satélites meteorológicos:

- **Satélites meteorológicos geoestacionarios.** Tienen un periodo de 24 horas, es decir, que coincide con el de rotación de la Tierra. Esto implica que siempre están situados sobre el mismo punto de la Tierra, a unos 35 800 km de altitud.
- **Satélites meteorológicos polares.** Orbitan más cerca de la Tierra, a menos de 1000 km, y ofrecen imágenes de mejor resolución. Su órbita transcurre desde un polo a otro, y el periodo es más corto que el de los satélites geoestacionarios, por lo que pasan por cualquier punto de su órbita varias veces al día.

Muchos satélites son pasivos, es decir, únicamente toman imágenes. Pero también existen satélites activos capaces de transmitir una señal de radio y recibir su eco tras chocar contra la superficie. Así se obtienen las imágenes de radar que identifican, por ejemplo, zonas donde llueve.

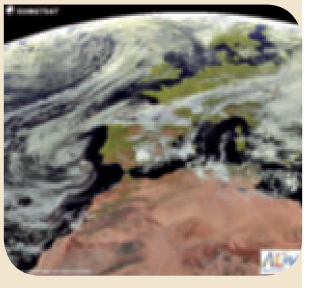
INTERPRETA

1. ¿De qué manera obtienen los satélites la energía para funcionar?
2. ¿Cómo se comunican los satélites con las estaciones terrestres para emitir las imágenes captadas?
3. ¿Cómo será el periodo de los satélites que orbitan más allá de la órbita geoestacionaria?

REFLEXIONA

4. ¿Cómo se modifica el periodo de un satélite si le comunicamos energía hasta situarlo en una órbita más alta?
5. Se denomina basura espacial a los restos de satélites, cohetes y demás desperdicios que orbitan en el espacio alrededor de la Tierra.
   a) ¿Cuáles son los peligros de la basura espacial?
   b) ¿Por qué son tan peligrosos residuos incluso de unos pocos centímetros de tamaño?

6. Las imágenes captadas por los satélites meteorológicos tienen más usos, además del pronóstico meteorológico. Piensa en ello y anota algunos.



OPINA

7. Contesta.
   a) ¿Te parece interesante destinar grandes sumas de dinero al desarrollo de satélites meteorológicos? ¿Por qué?
   b) ¿Y al desarrollo de otros tipos de satélites: militares, comunicaciones, telescopios espaciales, sistemas de navegación (como el GPS)…?
8. ¿Qué medidas se deberían tomar para reducir en lo posible la existencia de basura espacial?

Perfil del meteorólogo

¿Qué hace?

- Estudia los fenómenos que suceden en la atmósfera y las leyes físicas por las que estos se rigen.
- Pronostica el tiempo que va a hacer en diferentes lugares del planeta: las temperaturas y los fenómenos atmosféricos que van a producirse, como precipitaciones en forma de lluvia, nieve o granizo, borrascas, anticiclones, etc.
- Lanza avisos de alerta en casos de riesgo por fenómenos atmosféricos extremos.

¿Cómo lo hace?

- Interpreta los resultados obtenidos a partir de las observaciones realizadas en estaciones meteorológicas.
- Se encarga de gestionar la elaboración de los mapas de isobaras, los mapas de predicción del tiempo, climogramas, etc.
- Comunica por los canales oportunos los avisos de alerta meteorológica.