PROYECTO SABER HACER

Dibujo Técnico

SERIE **PROYECTA**

El libro **Dibujo Técnico 2**, para segundo curso de Bachillerato, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
J. Miguel Marín Río
Manuel Pino León
Andrés Ruiz Munuera

EDICIÓN EJECUTIVA
Montserrat Herrero González

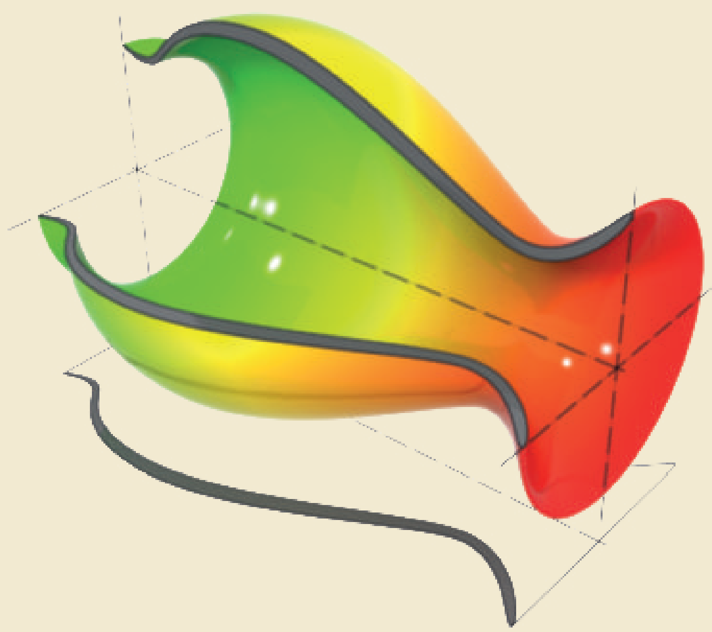
DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Lourdes Etxebarria Orella

Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

BACHILLERATO 2

SANTILLANA

Índice



Esquema del libro

Cada **bloque** comienza con tres páginas donde encontrarás:

Un **texto introductorio** que avanza una visión global de los contenidos que se tratan en el bloque.

Un índice de **contenidos**.

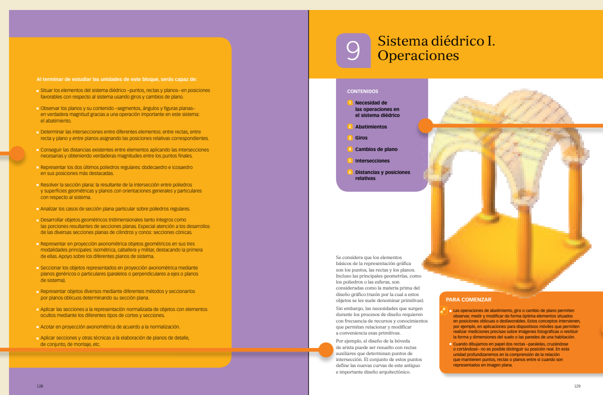
Una **imagen** relacionada con el contenido de las unidades del bloque.

Una **cita** de algún personaje histórico relacionado con el dibujo técnico o el arte.

En la página de inicio de la unidad encontrarás:

Objetivos que se deben haber alcanzado al finalizar el bloque.

Un breve **texto introductorio** y relacionado con la imagen central.

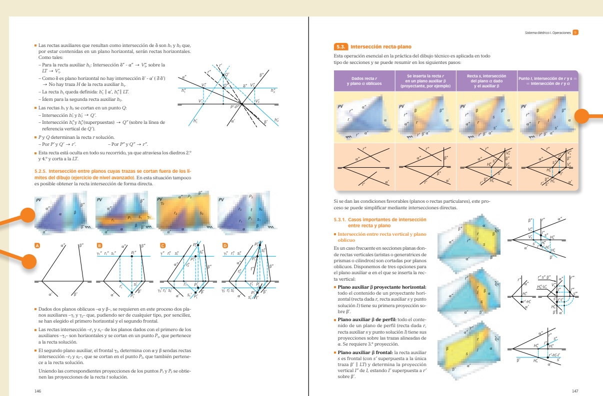


Un **resumen** de los contenidos.

El apartado **Para comenzar**, con cuestiones útiles para recordar conocimientos adquiridos con anterioridad.

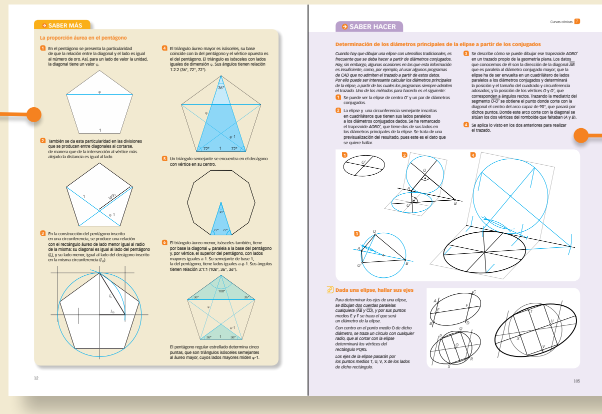
Cada unidad se estructura en **epígrafes y subepígrafes**. En ellos, se presentan de forma clara los contenidos fundamentales del tema.

A lo largo de todo el libro, las explicaciones están apoyadas en **ilustraciones** de dibujo vectorial y tridimensional.



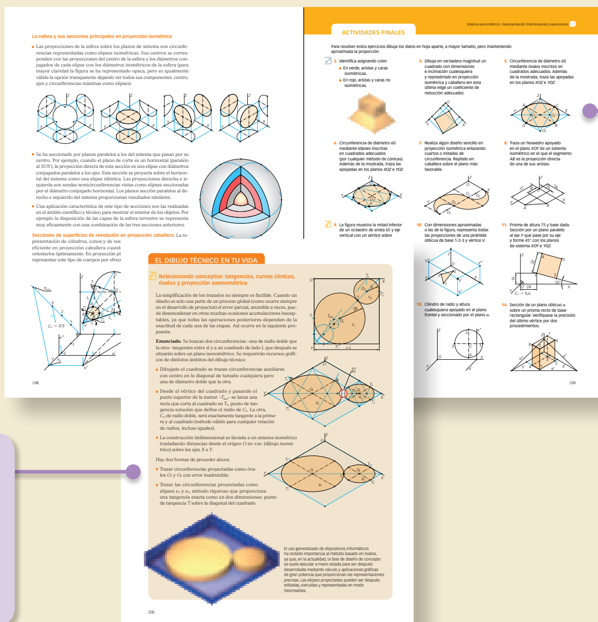
También hay **tablas** que contienen un resumen del contenido.

Hay también ejercicios destacados bajo la etiqueta **SABER MÁS**, que tratan un contenido más elevado que el resto.



En cada unidad encontrarás uno o varios apartados de **SABER HACER**, que contienen ejercicios resueltos.

Las **páginas finales** de la unidad contienen:



Una página de **ACTIVIDADES FINALES**, que sirven para tratar todos los contenidos vistos en la unidad.

Y una página denominada **El dibujo técnico en tu vida**, en la que podrás observar la aplicación de lo estudiado a la vida diaria.

Las competencias

Llamamos competencia a la capacidad que tenemos las personas para aplicar los conocimientos que hemos aprendido y así poder resolver problemas de nuestra vida diaria.

Este libro desarrolla las competencias cultural y artística y la matemática sobre todo. Además, las actividades y proyectos incluidos en él te ayudarán a desarrollar estas competencias:

- Comunicación lingüística
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
- Competencias sociales y cívicas
- Conciencia y expresiones culturales
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
- Competencia digital
- Aprender a aprender

BLOQUE I

Trazados de geometría plana

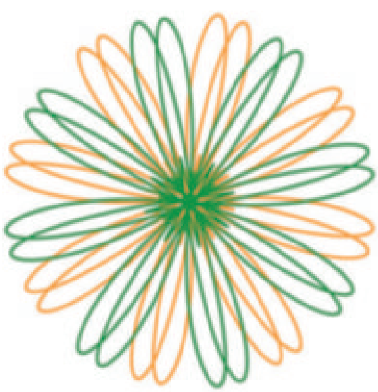
UNIDADES

La humanidad hace miles de años que habita la Tierra. En su devenir histórico debió adaptarse a diferentes medios y condiciones climáticas, desarrollando distintas tecnologías que nos han ayudado a mejorar las condiciones de vida.

Evidentemente, el desarrollo de la tecnología agrícola supuso un avance espectacular, pero a su vez dicha etapa permitió la acumulación de excedentes alimenticios cuyo control hizo posible destinar determinados recursos al pensamiento y a la cultura. Los avances en el estudio de las formas permitieron ya a los griegos destacar en el ámbito de la geometría, y hasta hoy han llegado los fantásticos planteamientos, entre otros, de Pitágoras, Euclides o Apolonio.

Muchos de los teoremas de estos matemáticos son el origen de múltiples trabajos de otros científicos posteriores, y en dichos descubrimientos se ha ido perfeccionando el estudio de las formas geométricas, tanto en el plano como en el espacio.

En este bloque se avanza en el estudio de algunas de las estrategias que facilitan la construcción geométrica, que a su vez son la base del desarrollo tecnológico contemporáneo.



Puente Luis I, 1886, Oporto.

Pavillon. Max Bill, 1983, Zúrich.

«Donde hay materia, hay geometría».

Johannes Kepler (1571-1630), *Gesammelte Werke*,vol. 4. Beck, Múnich, 1941.

Al terminar de estudiar los temas de este bloque, serás capaz de:

- Conocer la proporcionalidad áurea y su aplicación en la construcción del rectángulo áureo.
- Determinar gráficamente la raíz cuadrada de un segmento, aplicando la media proporcional.
- Construir triángulos aplicando los conocimientos de arco capaz, así como las características de las rectas y puntos notables de los mismos, a partir de diferentes datos conocidos.
- Construir determinados cuadriláteros a partir de ciertos datos.
- Construir polígonos regulares conocido el valor del lado.
- Construir figuras geométricas equivalentes.
- Determinar figuras homólogas o afines a otras dadas.
- Conocer los principios de inversión y potencia.
- Trazar mediante inversión y/o potencia rectas o circunferencias tangentes a otras rectas y a circunferencias, o a circunferencias.
- Conocer el trazado de curvas cicloides, epicicloides, hipocicloides, evolvente a circunferencia y hélices.
- Trazar elipses, parábolas e hipérbolas, así como las rectas tangentes a dichas curvas.

1 Proporcionalidad

CONTENIDOS

El desarrollo tecnológico ha ido parejo con el estudio pormenorizado de fenómenos físicos y de la realidad natural, pero también de la aplicación y del uso de la medida.

De los primeros objetos utilizados por el ser humano desde el Paleolítico se pasó a la creación de otros mucho más complejos. También se empezó a desarrollar la técnica de la construcción arquitectónica. En este ámbito destaca el uso de la proporción aplicada a determinar medidas en las dos dimensiones del plano.

PARA COMENZAR

Observa la imagen y responde:

- ¿Cómo usaron los griegos las proporciones?
- ¿Qué proporción aplicaron concretamente al Partenón?
- ¿Qué era el número de oro?

1 Introducción

En esta unidad se aborda la determinación de la media proporcional a través de la aplicación de los teoremas de la altura y del cateto. Se trata de nuevo la proporción áurea aplicada a la construcción de rectángulos áureos. También, se presenta la determinación gráfica de la raíz cuadrada.

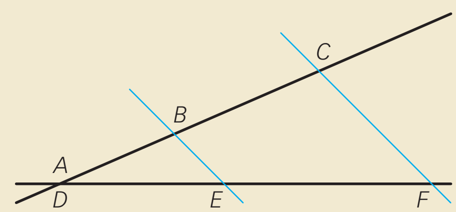
2 Proporcionalidad

2.1. Proporción áurea

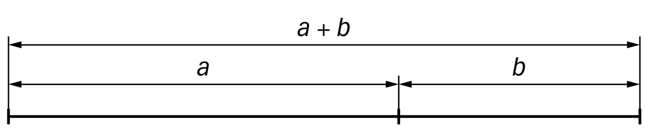
REPASO

En el **teorema de Tales** se plantea que los segmentos de dos rectas concurrentes, que se determinan al trazar rectas paralelas que las cortan, son proporcionales.

De esta manera se cumple que $\overline{AB}/\overline{DE} = \overline{BC}/\overline{EF}$



Euclides la llamó división en *extrema y media razón* de un segmento, en el siglo XVI se denominó *proporción divina* y en el siglo XIX se empezó a llamar *proporción dorada,* de donde proviene el término actual de **proporción áurea**.



La proporcionalidad áurea responde a una tercera proporcional en la que el término mayor es igual a la suma de ambos. Es decir, $(a + b)/a = a/b$.

Dicho cociente equivale al número de oro o número φ, que es igual a 1,618034.

Y donde el segmento mayor, *a*, es media proporcional del segmento suma $a + b$ y de b.

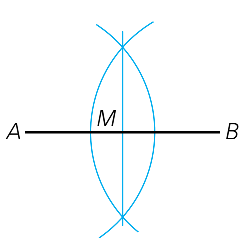
Determinación del segmento mayor áureo de otro

a) Se determina el punto medio M del segmento $\overline{AB}$.

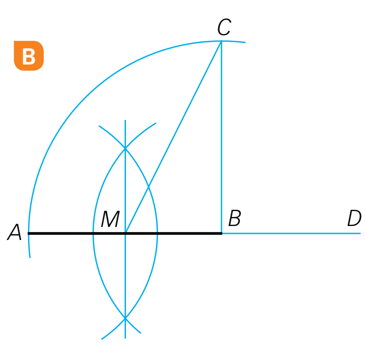
b) Se traza una perpendicular por el extremo B del segmento, y se traslada sobre ella la dimensión del segmento para encontrar el punto C.

c) Se prolonga el segmento y se abate sobre él la dimensión $\overline{MC}$ para determinar D. El segmento $\overline{AD}$ es el buscado.

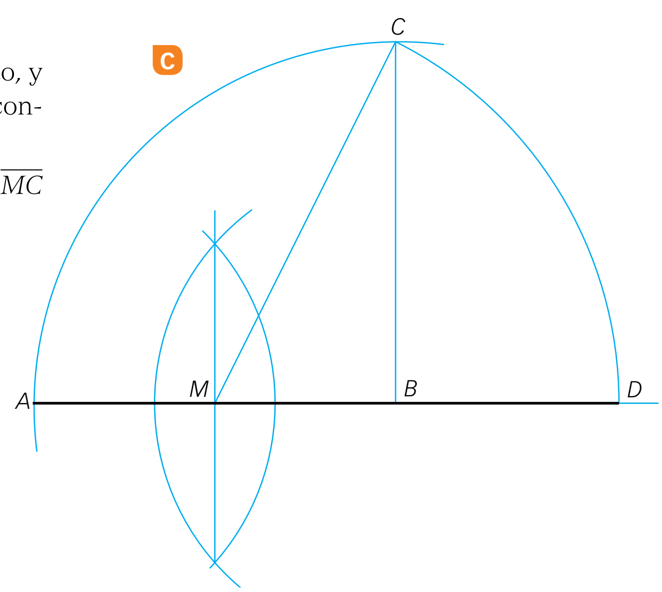
A



B



C

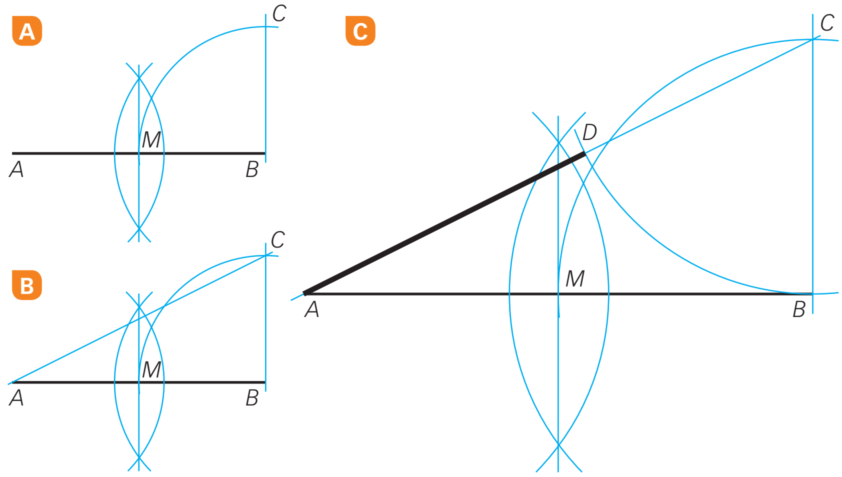


Determinación del segmento menor áureo de otro dado

a) Se determina el punto medio M del segmento $\overline{AB}$. Se traza una perpendicular por su extremo B, y se traslada sobre ella la dimensión $\overline{MB}$ para determinar C.

b) Se traza la hipotenusa $\overline{AC}$.

c) Se traslada sobre $\overline{AC}$ la dimensión $\overline{BC}$ mediante arco de centro C y radio $\overline{CB}$ para determinar D sobre la hipotenusa. El segmento $\overline{AD}$ es el menor áureo del segmento $\overline{AB}$.



2.2. Rectángulo áureo

REPASO

Construcción de un rectángulo áureo a partir del lado menor

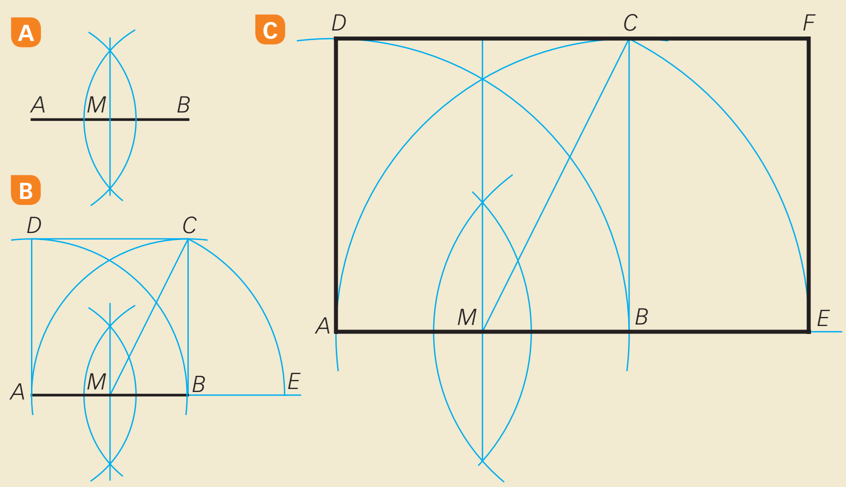
El rectágulo áureo tiene una particularidad: si se divide el lado largo entre el lado corto, da como resultado el número de oro $\left(\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

a) Se dibuja el segmento $\overline{AB}$ a partir de su valor. Se determina su punto medio M mediante su mediatriz.

b) Se construye el cuadrado $ABCD$, de lado el segmento dado $\overline{AB}$, y desde el punto medio M de la base $\overline{AB}$ se traza un arco de radio $\overline{MC}$ que corta en E la prolongación de la base $\overline{AB}$.

c) Se traza la perpendicular en E a la base hasta la prolongación del lado $\overline{CD}$ del cuadrado para determinar F.

AEFD son los lados del rectángulo áureo.



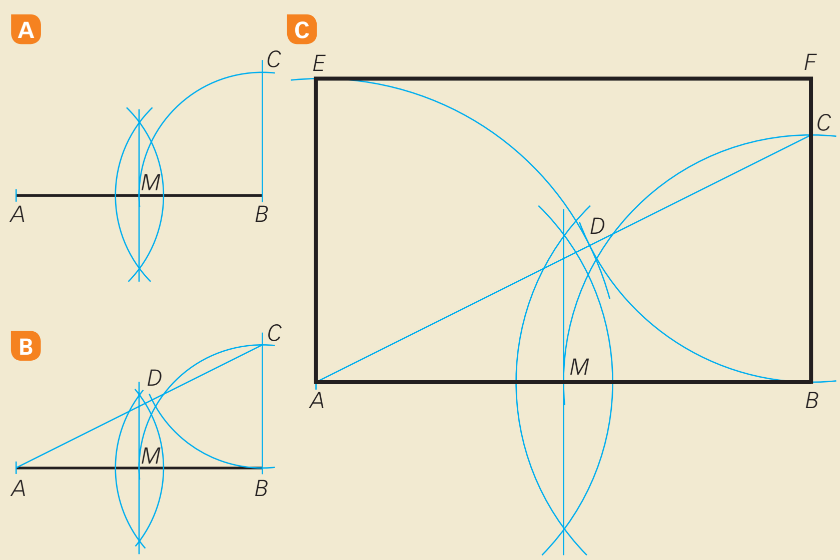
Construcción de un rectángulo áureo a partir de su lado mayor

a) Se dibuja el segmento dado $\overline{AB}$, y se traza por B una perpendicular al mismo. Se determina el punto medio M de la base $\overline{AB}$ mediante su mediatriz. Con centro en B y radio $\overline{BM}$, se traza un arco hasta encontrar el punto C en la perpendicular en B.

b) Se traza la recta $\overline{AC}$, y con centro en C y radio $\overline{CB}$ se traza un arco hasta cortar la hipotenusa $\overline{AC}$ en D.

c) Se trazan una perpendicular a la base $\overline{AB}$ en A y un arco con centro en A y radio $\overline{AD}$, hasta determinar en dicha perpendicular el punto E.

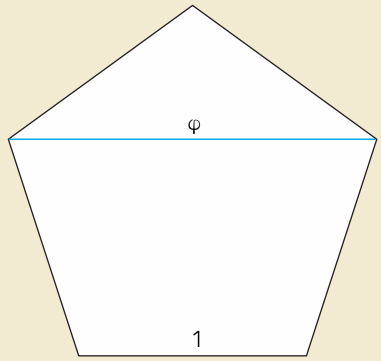
Se traza por E una paralela a $\overline{AB}$ hasta encontrarse con el punto F, situado en la perpendicular a B. A, B, F y E son los vértices del rectángulo áureo.



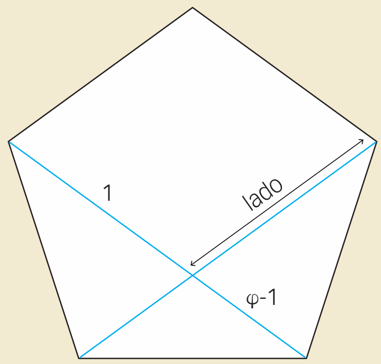
SABER MÁS

La proporción áurea en el pentágono

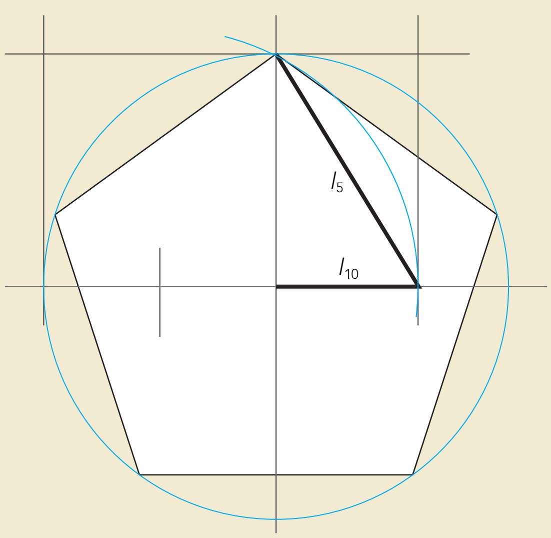
1 En el pentágono se presenta la particularidad de que la relación entre la diagonal y el lado es igual al número de oro. Así, para un lado de valor la unidad, la diagonal tiene un valor φ.



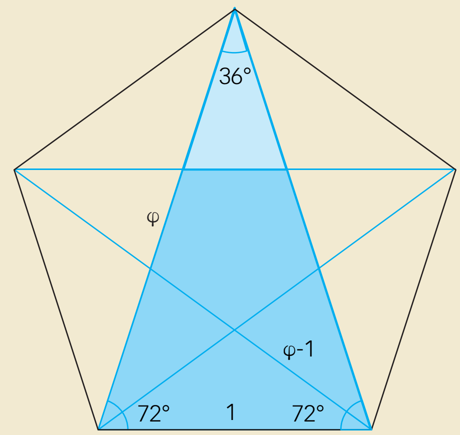
2 También se da esta particularidad en las divisiones que se producen entre diagonales al cortarse, de manera que de la intersección al vértice más alejado la distancia es igual al lado.



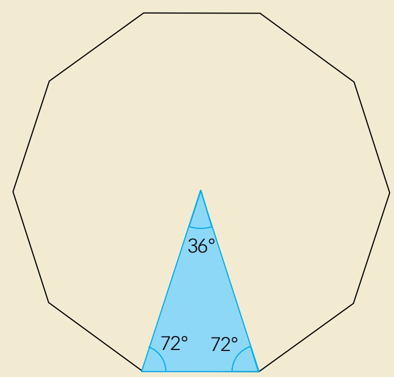
3 En la construcción del pentágono inscrito en una circunferencia, se produce una relación con el rectángulo áureo de lado menor igual al radio de la misma: su diagonal es igual al lado del pentágono (l_5), y su lado menor, igual al lado del decágono inscrito en la misma circunferencia (l_{10}).



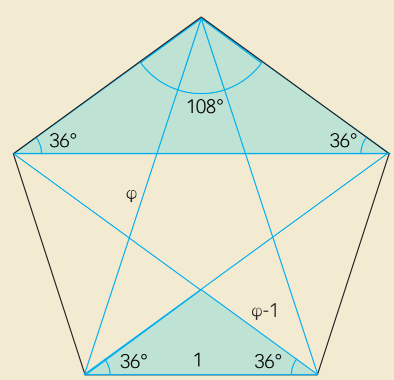
4 El triángulo áureo mayor es isósceles, su base coincide con la del pentágono y el vértice opuesto es el del pentágono. El triángulo es isósceles con lados iguales de dimensión φ. Sus ángulos tienen relación 1:2:2 (36°, 72°, 72°).



5 Un triángulo semejante se encuentra en el decágono con vértice en su centro.



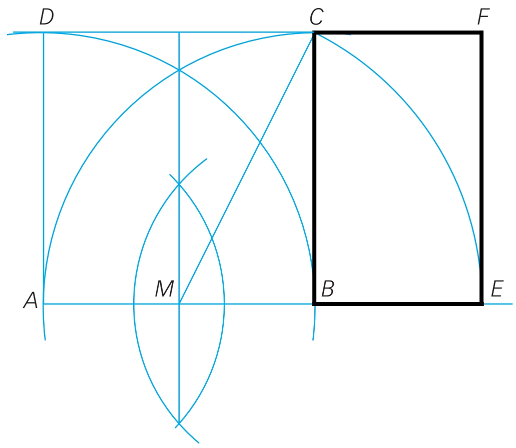
6 El triángulo áureo menor, isósceles también, tiene por base la diagonal φ paralela a la base del pentágono y, por vértice, el superior del pentágono, con lados mayores iguales a 1. Su semejante de base 1, la del pentágono, tiene lados iguales a φ-1. Sus ángulos tienen relación 3:1:1 (108°, 36°, 36°).



El pentágono regular estrellado determina cinco puntas, que son triángulos isósceles semejantes al áureo mayor, cuyos lados mayores miden φ-1.

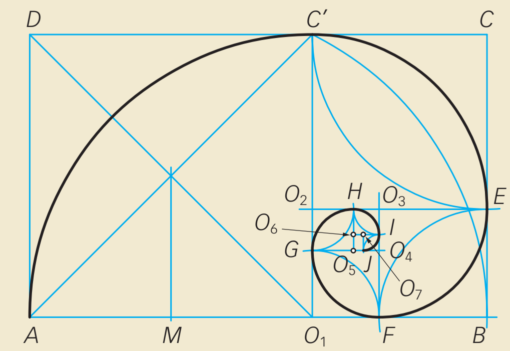
2.3. Otras relaciones áureas

Al construir el rectángulo áureo *AEFD* a partir del lado menor $\overline{AD} = \overline{AB}$, queda dividido en un cuadrado y otro rectángulo, *BCFE*, que a su vez tiene dimensiones en proporción áurea $\overline{BC}/\overline{BE} = \varphi$.



Eso permite hacer subdivisiones sucesivas que determinan nuevos rectángulos áureos más pequeños. Esta subdivisión hace posible la construcción de la espiral áurea, que ya se vio en el curso anterior.

REPASO



3 La media proporcional

Se entiende por media proporcional el segmento que se relaciona con otros dos dados, de manera que se cumple la siguiente igualdad: $\overline{AB}/\overline{CD} = \overline{CD}/\overline{EF}$, siendo $\overline{CD}$ el segmento media proporcional de los segmentos dados $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$.

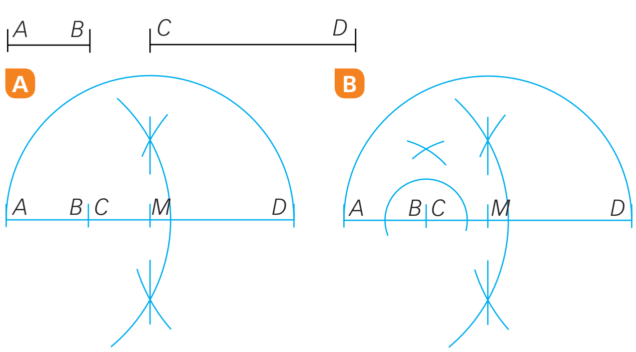
Para poder determinar gráficamente la media proporcional de dos segmentos, se pueden usar de forma indistinta diferentes métodos, entre los que destacan los llamados teorema de la altura y teorema del cateto.

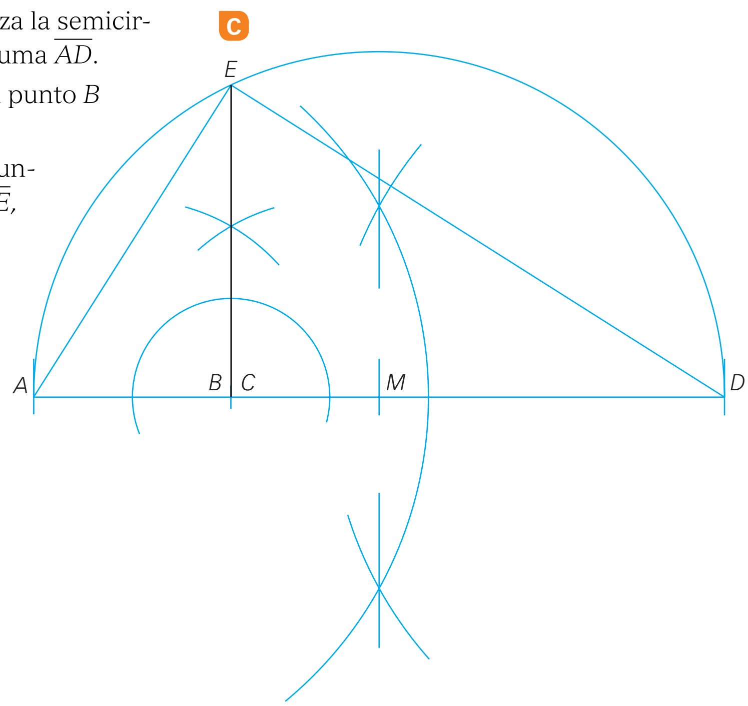
Teorema de la altura

a) Se suman los dos segmentos dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Se traza la semicircunferencia con centro en el punto medio *M* de la suma $\overline{AD}$.

b) Se traza una perpendicular al segmento suma por el punto *B* o por el *C*.

c) La intersección de la perpendicular con la semicircunferencia determina el extremo *E* del segmento $\overline{BE}$, altura del triángulo *ADE*, cumpliéndose que $\overline{AB}/\overline{BE} = \overline{BE}/\overline{CD}$, y por tanto siendo media proporcional de los segmentos dados.





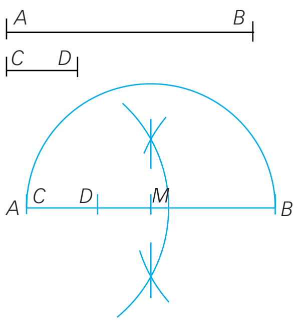
Teorema del cateto

a) Se colocan los dos segmentos dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ a partir del mismo punto origen A. Se traza la semicircunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

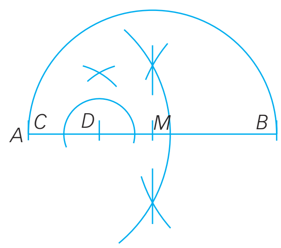
b) Se traza una perpendicular al segmento $\overline{AB}$ por el punto D.

c) La intersección de la perpendicular con la semicircunferencia determina el extremo E del segmento media proporcional $\overline{AE}$, cateto del triángulo ABE, cumpliéndose que $\overline{CD}/\overline{AE} = \overline{AE}/\overline{AB}$, o también que $\overline{AB}/\overline{AE} = \overline{AE}/\overline{CD}$.

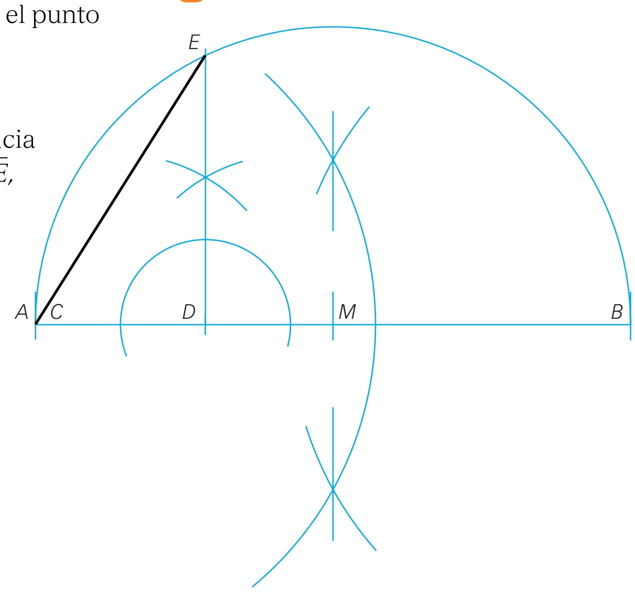
A



B



C



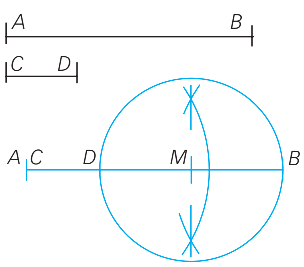
Tercer procedimiento

a) Se parte, como en el caso anterior, del segmento $\overline{CD}$ superpuesto sobre el segmento $\overline{AB}$.

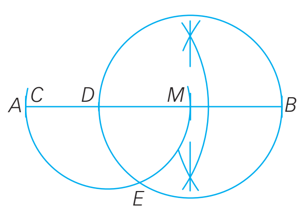
b) Se traza la circunferencia de diámetro $\overline{DB}$ y, mediante arco capaz de 90°, se determina el punto E, de modo que $\overline{AE}$ es la media proporcional buscada.

c) En efecto, por potencia (se estudiará más adelante) se tiene que $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = \overline{AE} \cdot \overline{AE}$. Por tanto, $\overline{AD}/\overline{AE} = \overline{AE}/\overline{AB}$, de donde $\overline{AE}$ es media proporcional de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

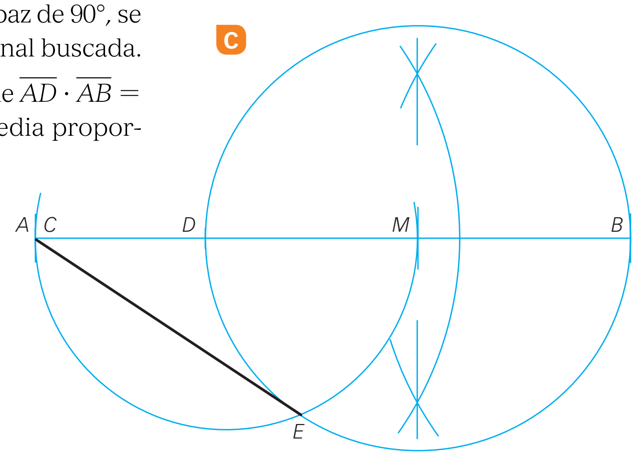
A



B



C



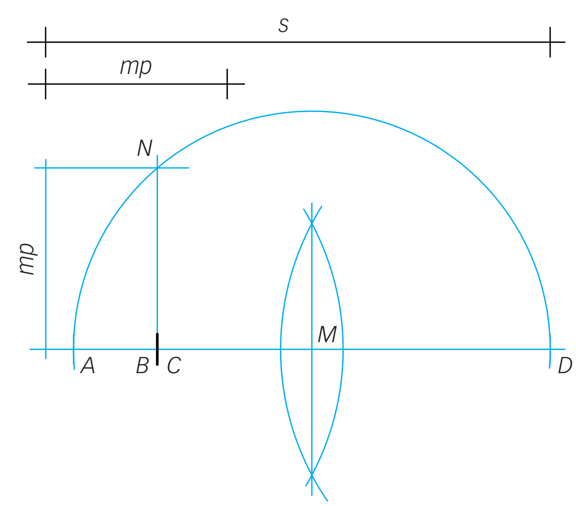
Determinación de la dimensión de dos segmentos dadas su suma y su media proporcional

Según el teorema de la altura, la media proporcional es la altura del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la suma de ambos segmentos. Por tanto, se traza el segmento suma $\overline{AD}$.

Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$.

Se traza una paralela al segmento $\overline{AD}$ a una distancia igual a la dimensión de la media proporcional *mp* dada, hasta determinar N en su intersección.

Se traza por N una perpendicular al segmento $\overline{AD}$, para determinar al cortarlo el punto B, que a la vez es el punto C, división de los dos segmentos que se buscan, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



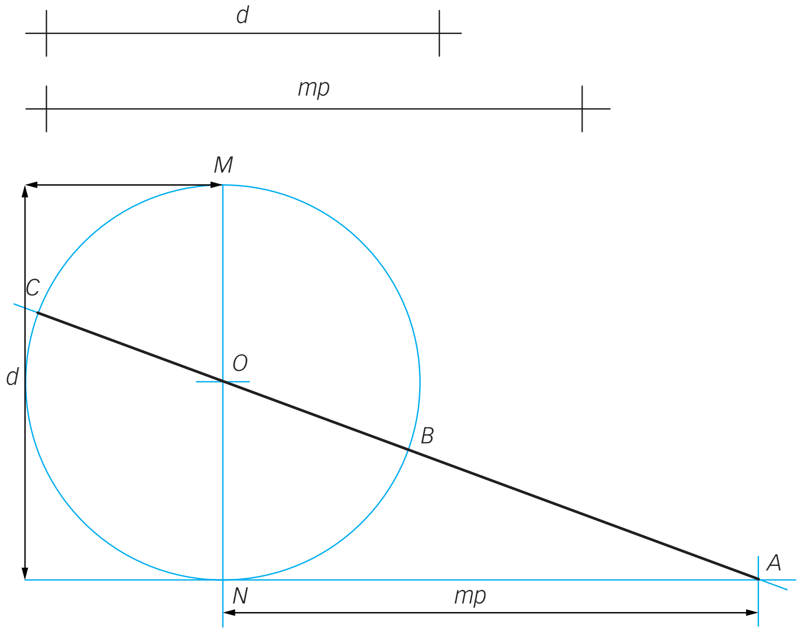
Determinación de la dimensión de dos segmentos dadas su diferencia y su media proporcional

Se trazan dos segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{NA}$ perpendiculares por el extremo común N, de dimensiones igual a la diferencia d y a la media proporcional mp dadas, respectivamente.

Se dibuja la circunferencia de diámetro $\overline{MN} = d$.

Desde A se proyecta una recta que pase por el centro O de la circunferencia, determinando los puntos B y C en su intersección con la misma. $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los segmentos que se buscan.

En efecto, por potencia (se estudiará más adelante) se tiene que $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AN} \cdot \overline{AN}$. De donde $\overline{AB}/\overline{AN} = \overline{AN}/\overline{AC}$. Por tanto, $\overline{AN}$ es media proporcional de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



3.1. La raíz cuadrada

Si se observa atentamente el planteamiento de una raíz cuadrada, se tiene: $\sqrt{a} = b$, y elevando al cuadrado: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = b^2$. Esto es lo mismo que $a = b^2$, que se puede expresar como $1 \cdot a = b \cdot b$ o $1/b = b/a$.

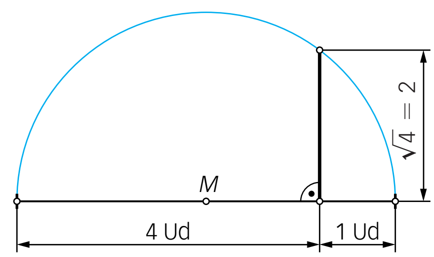
Por tanto, b es media proporcional de 1 y a.

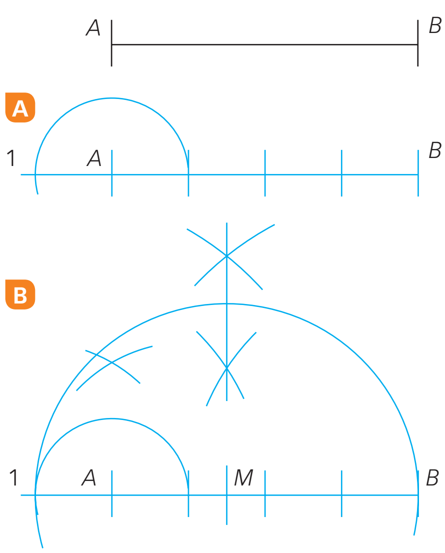
Para construir gráficamente la raíz cuadrada de un segmento $\overline{AB}$, se siguen estos pasos:

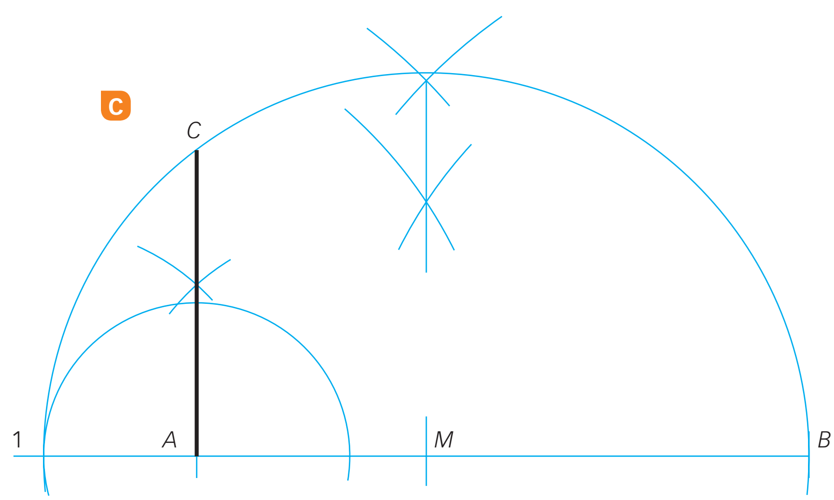
a) Se traza el segmento $\overline{AB}$, en este caso de valor 4, y se le añade en el origen A otro segmento de valor la unidad $A1$.

b) Se determina el punto medio M del segmento suma $1B$ y se traza la semicircunferencia de centro M y radio $\overline{MB}$.

c) Se dibuja una perpendicular a $\overline{AB}$ por A hasta determinar el punto C en la semicircunferencia. El segmento $\overline{AC}$ es la raíz cuadrada del segmento dado $\overline{AB}$.



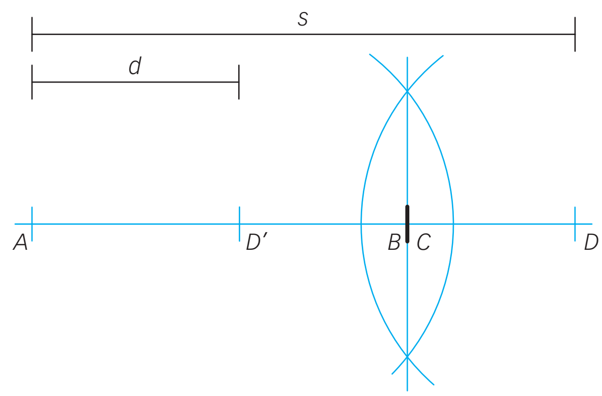




4 Otros trazados

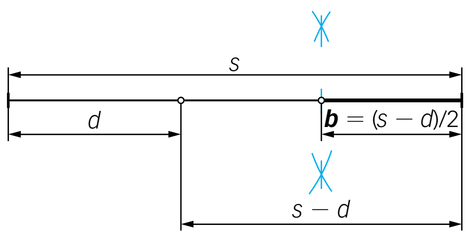
Determinación de la dimensión de dos segmentos dadas su suma *s* y su diferencia *d*

Se resta al segmento suma $\overline{AD}$ la diferencia $\overline{AD'}$, desde el origen A. Se traza la mediatriz de $\overline{DD'}$, que determina en $\overline{AD}$ el punto B, siendo el límite entre los dos segmentos y, por tanto, también el punto C, determinando las dimensiones de los dos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



s = segmento suma de otros dos buscados a y b
d = segmento diferencia de otros dos buscados a y b

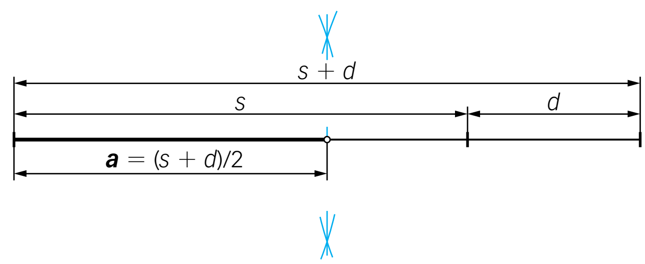
Restando:



Se ha obtenido 1.º el segmento solución b

El otro segmento solución a = porción restante del dado s

Sumando:



Se ha obtenido 1.º el segmento solución a

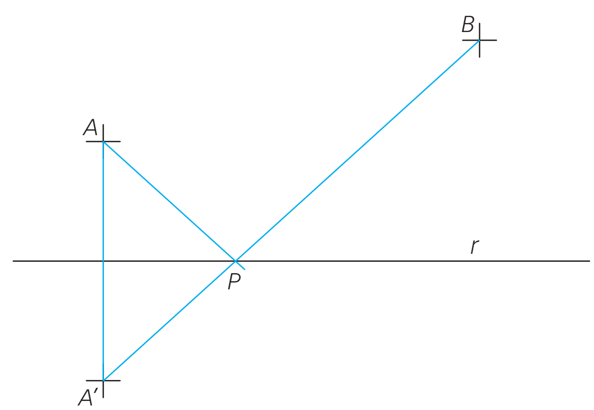
El otro segmento solución b = porción restante del dado s

Determinación de un punto *P* de una recta *r*, de modo que la suma $\overline{PA}$ + $\overline{PB}$ de las distancias del mismo a dos puntos *A* y *B*, situados ambos al mismo lado de la misma, sea mínima

Se determina el simétrico A' del punto dado A, respecto de la recta r.

Se traza una recta que pase por A' y por B.

La intersección del segmento $\overline{A'B}$ con la recta r dada es el punto P buscado. $\overline{PA}$ + $\overline{PB}$ es la suma mínima posible.

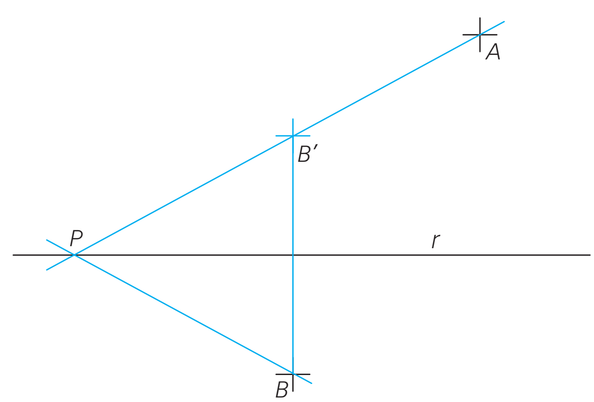


Determinación de un punto *P* de una recta *r*, de modo que la diferencia $\overline{PA}$ − $\overline{PB}$ de las distancias del mismo a dos puntos *A* y *B*, situados a ambos lados de la misma, sea máxima

Se determina el simétrico B', del punto B, respecto de la recta r.

Se traza una recta que pase por A y B' hasta determinar en su intersección con la recta r el punto P, que cumple la condición pedida.

La diferencia máxima $\overline{PA}$ – $\overline{PB}$ es el segmento $\overline{AB'}$.



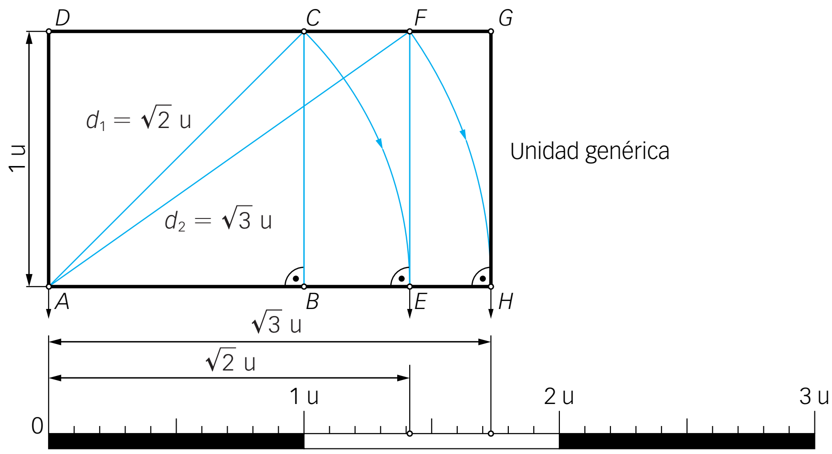
Rectángulo de lado $\sqrt{2}$ y de base $\sqrt{3}$

Se traza la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrado $ABCD$, de lado la unidad, y se abate sobre la prolongación de la base $\overline{AB}$ en E.

Por E se proyecta una perpendicular hasta la prolongación del lado opuesto $\overline{DC}$ en F. El rectángulo $AEFD$ tiene por base $\sqrt{2}$.

Se dibuja la diagonal $\overline{AF}$, y se abate también sobre la prolongación de la base en H.

Se traza la perpendicular a la base en H hasta determinar G en la prolongación del lado $\overline{DF}$. El rectángulo $AHGD$ tiene por base $\sqrt{3}$.



ACTIVIDADES FINALES

1. Construir el rectángulo áureo sabiendo que su lado mayor mide 60 mm.

2. Construir el rectángulo áureo a partir de su lado menor de 30 mm.

3. Dado un cuadrado de 40 mm de lado, construir el rectángulo áureo que tenga por lado menor el del cuadrado.

4. Construir una espiral áurea sabiendo que la altura del rectángulo circunscrito tiene 5 cm de altura.

5. Determinar, mediante el teorema del cateto, la media proporcional de dos segmentos de 60 y 20 mm, respectivamente.

6. Determinar por el teorema de la altura, la media proporcional de dos segmentos de 50 y 30 mm, respectivamente.

7. Determinar por el método de potencia la media proporcional de dos segmentos de 65 y 35 mm, respectivamente.

8. Determinar la longitud de dos segmentos conociendo que su suma es de 12 cm, y su media proporcional, de 3 cm.

9. Determinar la longitud de dos segmentos sabiendo que su diferencia tiene una longitud de 4 cm y su media proporcional es de 6 cm.

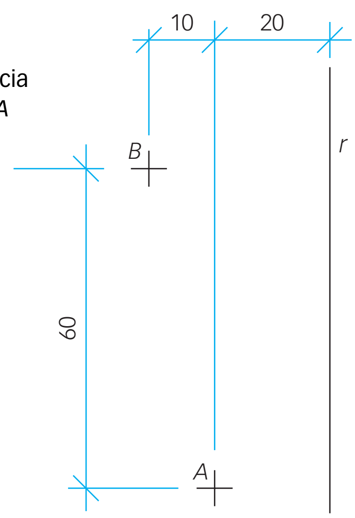
10. Determinar gráficamente la raíz cuadrada de un segmento de 9 cm.

11. Determinar gráficamente el valor de dos segmentos sabiendo que su suma mide 12 cm, y su diferencia, 4 cm.

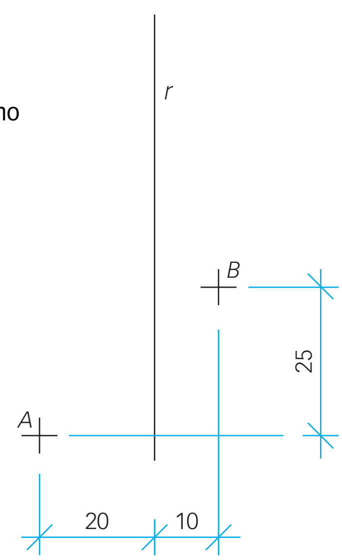
12. Construir un rectángulo de lado mayor igual a $3\sqrt{2}$ cm.

13. Construir un rectángulo de lado mayor igual a $4\sqrt{3}$ cm.

14. Determinar el punto P de la recta r, de manera que la suma de la distancia del mismo a los puntos A y B dados sea mínima.



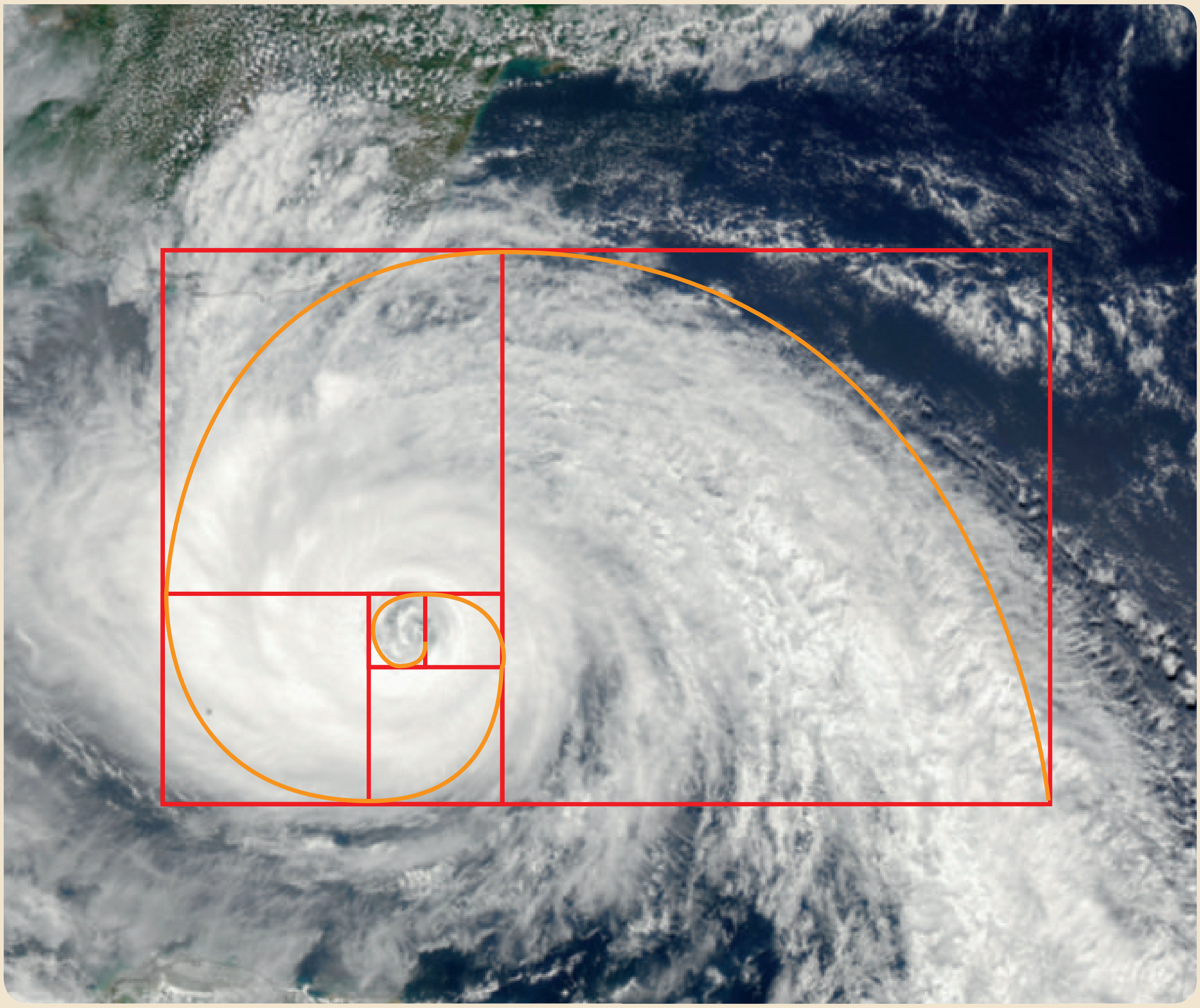
15. Determinar un punto P de la recta r, de forma que la diferencia de las distancias del mismo a los puntos A y B dados sea máxima.



16. Construir un triángulo rectángulo sabiendo que la altura del vértice de 90° divide la hipotenusa en dos segmentos de 3 y 4 cm, respectivamente.

EL DIBUJO TÉCNICO EN TU VIDA

Proporción áurea en la naturaleza



El ser humano, como observador del mundo que le rodea, ha tenido un concepto, intuitivo en un principio y por análisis después, sobre lo proporcionado o desproporcionado, lo igual o distinto y lo bello o menos bello.

El desarrollo de la geometría ha servido para intentar llegar a dar con algunas respuestas, como es el caso de una tormenta tropical, cuyo desarrollo se puede representar con algunos trazados geométricos vistos en este tema.

LEE Y COMPRENDE

Si se observa la fotografía aérea de una tormenta, ¿qué forma se aprecia?

INTERPRETA

La curva que parece estar subyacente en las nubes, ¿podría tener una proporción determinada? ¿Cuál?

REFLEXIONA

¿Se pueden encontrar dichas formas geométricas en otros ámbitos naturales o artificiales?

APLICA

Crea un anagrama para una empresa relacionada con alguna actividad dinámica en el que pueda aplicarse la proporción áurea.