PROYECTO SABER HACER

# Matemáticas
## aplicadas a las Ciencias Sociales II

SERIE **RESUELVE**

El libro Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, para 2.º curso de Bachillerato, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
**José Carlos Gámez Pérez**
**Silvia Marín García**
**Alfredo Martín Palomo**
**Carlos Pérez Saavedra**
**Domingo Sánchez Figueroa**

EDICIÓN
**José Antonio Almodóvar Herráiz**
**Ana de la Cruz Fayos**
**Silvia Marín García**
**Virgilio Nieto Barrera**
**Laura Sánchez Fernández**

EDITOR EJECUTIVO
**Carlos Pérez Saavedra**

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
**Domingo Sánchez Figueroa**

Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

SANTILLANA

BACHILLERATO 2

# Índice

**SABER HACER**

- Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX + B = C$
- Resolver operaciones con matrices
- Calcular la potencia de una matriz
- Determinar matrices que cumplan una cierta condición
- Calcular las constantes que hacen que se cumpla una igualdad entre matrices
- Resolver problemas utilizando matrices
- Transformar tablas en matrices
- Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro
- Calcular la inversa de una matriz que depende de un parámetro
- Resolver un sistema de ecuaciones matriciales

---

- Resolver ecuaciones en las que aparecen determinantes
- Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro
- Estudiar el rango de una matriz cuadrada que depende de un parámetro utilizando determinantes
- Calcular el rango de una matriz no cuadrada que depende de un parámetro mediante determinantes
- Calcular algunos elementos de una matriz para que se cumpla una condición
- Comprobar si una matriz que depende de un parámetro tiene inversa
- Resolver una ecuación matricial del tipo $AX = C$
- Resolver una ecuación matricial del tipo $AX + B = C$
- Resolver una ecuación matricial en la que hay que sacar factor común

---

- Resolver un sistema de ecuaciones con parámetros utilizando la regla de Cramer
- Plantear y discutir un problema real mediante sistemas de ecuaciones lineales
- Resolver un problema real mediante sistemas de ecuaciones lineales
- Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = XA$
- Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$
- Estudiar un sistema y resolverlo utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius
- Discutir un sistema que depende de un parámetro con dos ecuaciones y dos incógnitas
- Discutir un sistema que depende de un parámetro con tres ecuaciones y tres incógnitas
- Discutir un sistema homogéneo que depende de un parámetro con tres ecuaciones y tres incógnitas
- Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales
- Resolver un problema mediante un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones

---

- Resolver problemas de programación lineal gráficamente
- Representar una región factible
- Determinar las restricciones, conocida la región factible
- Añadir restricciones para obtener una determinada región factible
- Determinar el máximo y el mínimo de una función en una región factible acotada
- Determinar el máximo y el mínimo de una función en una región factible no acotada
- Resolver un problema en el que una de las restricciones es una relación entre las incógnitas
- Resolver un problema cuando la función objetivo es del tipo $f(x, y) = ax + by + k$
- Resolver un problema cuando la región factible es no acotada
- Extraer conclusiones de la solución óptima de un problema

---

- Estudiar la continuidad de una función definida a trozos
- Interpretar en un problema real el límite de una función
- Calcular el parámetro de una función si está en un límite con indeterminación $\infty - \infty$
- Calcular el parámetro de una función cuando aparece en un límite con indeterminación de tipo $1^\infty$
- Calcular el límite del cociente de dos funciones exponenciales
- Determinar si existe o no el límite de una función en un punto
- Resolver una indeterminación cuando aparece una expresión del tipo $\sqrt{f(x)} \pm a$
- Calcular el parámetro para que exista el límite de una función en un punto
- Estudiar la continuidad en un punto de una función definida a trozos
- Calcular los parámetros para que una función sea continua
- Estudiar la continuidad de una función en un problema real

---

- Hallar la derivada de una función en un punto mediante las fórmulas conocidas
- Determinar una función a partir del valor de su derivada en un punto
- Estudiar la derivabilidad y continuidad de una función
- Estudiar la continuidad y la derivabilidad en un punto de una función con parámetros
- Hallar los parámetros de una función para que sea continua y derivable
- Aplicar la regla de la cadena
- Calcular la derivada de operaciones con funciones
- Calcular la derivada de operaciones con funciones compuestas

# Índice

**SABER HACER**

- Resolver un problema de optimización cuando hay que despejar una variable
- Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto
- Determinar el parámetro de una función cuando no se conoce su recta tangente
- Determinar una función conocidos sus extremos relativos y un punto por el que pasa
- Obtener el valor de un parámetro para que una función siempre sea cóncava
- Representar la función derivada de una función a partir de su gráfica
- Resolver un problema de optimización cuando hay que despejar una variable
- Resolver un problema de optimización estudiando los extremos de los intervalos
- Resolver un problema de optimización cuando hay que determinar la función a optimizar a partir de otra

- Representar una función polinómica
- Representar una función racional
- Representar una función con radicales
- Representar una función exponencial
- Representar una función logarítmica
- Representar una función definida a trozos
- Calcular el dominio de una función compuesta
- Estudiar la simetría de una función compuesta
- Calcular parámetros desconocidos a partir de sus asíntotas
- Estudiar la monotonía y la curvatura de una función a partir de la gráfica de su derivada
- Representar la gráfica de una función que cumpla determinadas condiciones
- Representar una función simétrica
- Representar la gráfica de una función en la que aparece un factor con valor absoluto
- Representar gráficamente una función hallando previamente el valor de sus parámetros
- Representar una función y obtener información de su gráfica

- Calcular una primitiva que cumple una condición
- Resolver las integrales de tipo $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}}$
- Resolver una integral del tipo $\int \frac{P(x)}{x^n}$ donde $P(x)$ es un polinomio
- Calcular una integral definida de una función con valor absoluto
- Calcular el valor de una constante, conocido el valor de la integral definida
- Calcular el valor de un parámetro conocido el valor de un área
- Calcular el área de un recinto limitado por una función definida a trozos
- Calcular el área encerrada bajo una curva cuando no se da un intervalo de integración
- Resolver problemas donde hay que calcular el área encerrada bajo una curva
- Determinar el área de una figura delimitada por una curva
- Calcular el área encerrada bajo una curva expresada con valor absoluto y una recta

- Determinar el espacio muestral de un experimento compuesto mediante un diagrama de árbol
- Operar con sucesos
- Calcular probabilidades operando con sucesos
- Determinar probabilidades de sucesos no equiprobables
- Calcular probabilidades con sucesos independientes
- Calcular probabilidades mediante sus propiedades
- Resolver problemas de probabilidad condicionada utilizando tablas de contingencia
- Resolver un problema utilizando el teorema de la probabilidad total
- Resolver un problema utilizando el teorema de Bayes
- Resolver problemas de probabilidad condicionada usando varios teoremas

- Calcular probabilidades en una variable aleatoria binomial aproximándola a una normal
- Construir todas las posibles muestras utilizando muestreo
- Calcular probabilidades en una distribución binomial aproximándola a una normal
- Comparar la probabilidad de dos distribuciones normales
- Hallar en una distribución normal el valor que acumula cierta probabilidad
- Hallar en una distribución normal el número de datos que cumplen cierta condición
- Calcular un valor conociendo el número de individuos que cumplen una condición
- Calcular la media y la varianza de una distribución normal cuando se conocen dos probabilidades
- Calcular un intervalo característico centrado en la media

- Calcular la probabilidad de que una media muestral esté entre dos valores
- Calcular un intervalo característico centrado en la media
- Calcular e interpretar un intervalo de confianza con un nivel de confianza distinto de 90%, 95% o 99%
- Determinar un intervalo de confianza cuando se tienen los datos de la muestra
- Calcular el estimador cuando se conoce el intervalo de confianza
- Determinar el tamaño de la muestra, conocida la amplitud del intervalo de confianza
- Calcular el nivel de confianza cuando se conoce el intervalo de confianza
- Calcular la proporción de la muestra cuando se conoce el intervalo de confianza
- Determinar el tamaño de la muestra, conocido el error máximo admisible

## Esquema de la unidad

La estructura de las unidades didácticas es muy sencilla, ya que se trata de facilitar la localización de los contenidos fundamentales, de los ejemplos resueltos y de las actividades propuestas.

A lo largo de toda la unidad marcamos con iconos aquellos contenidos o actividades en las que se trabajan de manera particular las competencias básicas.

- Competencia matemática, científica y tecnológica
- Competencia social y cívica
- Conciencia y expresión cultural
- Iniciativa y emprendimiento
- Comunicación lingüística
- Competencia digital
- Aprender a aprender

**Introducción a la unidad: un texto que motiva el estudio de los contenidos.**

**Páginas finales de la unidad: un paso más en la aplicación de los contenidos aprendidos.**

Se especifican los contenidos (**Saber**) de la unidad.

El texto inicial presenta un aspecto de la vida real en el que se utilizan los contenidos que se van a estudiar en la unidad.

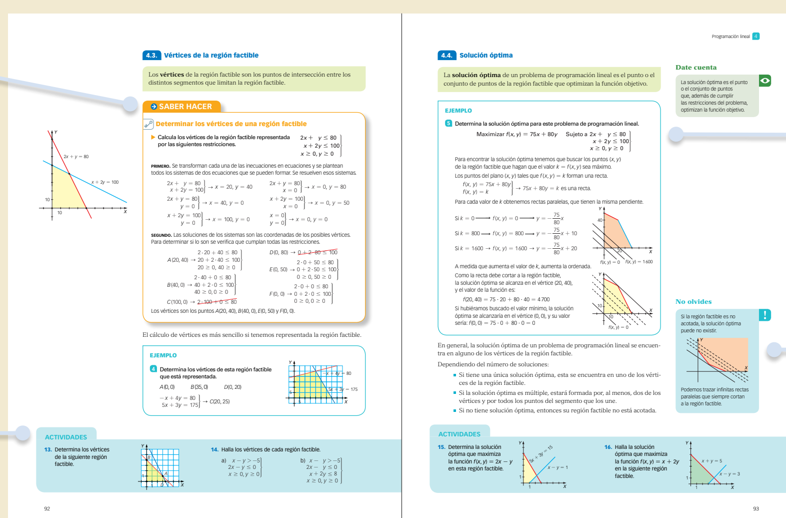

Esta página, que te muestra cómo las **matemáticas** intervienen **en tu vida**, responde a la pregunta de la página inicial de la unidad. Además, propone una serie de actividades que te permitirán profundizar en el aspecto de la vida real que se muestra.

**Páginas de contenidos: SABER y SABER HACER como un todo integrado.**

En la parte **Saber hacer** aprenderás, paso a paso, los procedimientos necesarios para tu desarrollo matemático.

Las **Actividades** de estas páginas te ayudarán a practicar los conocimientos adquiridos.

Además, su secuenciación te permitirá llegar a dominarlos.



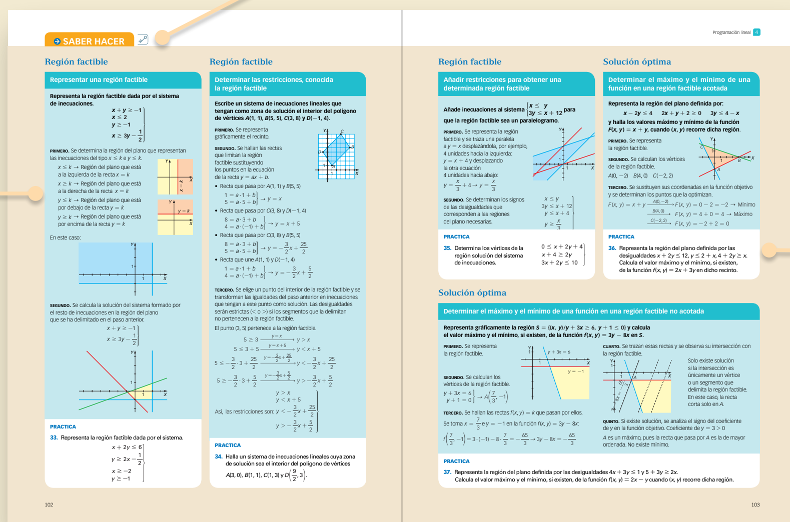

Nuestra propuesta para **Saber** son unos textos claros y estructurados. Los **Ejemplos** te ayudarán a afianzar esos saberes.

Junto a los textos explicativos encontrarás **informaciones complementarias** que te serán muy útiles para la comprensión de los conceptos y procedimientos.

**Páginas de Saber hacer: para aprender a hacer matemáticas.**

En estas páginas se muestran los procedimientos básicos (**Saber hacer**) de la unidad.

Cada procedimiento se introduce mediante la resolución de una actividad en la que se muestra, paso a paso, un método general de resolución.

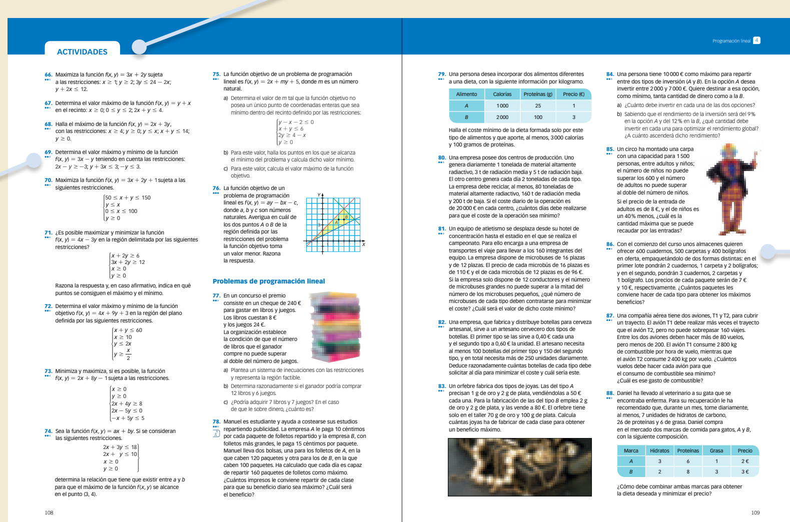



Las actividades que acompañan cada procedimiento te permitirán **practicar** y dominar estos contenidos.

**Páginas de actividades: para practicar y afianzar los conocimientos adquiridos.**

Nuestras **Actividades finales** están **secuenciadas** para que aproveches de la mejor forma posible la aplicación de los contenidos estudiados.

Cada actividad te ofrece la **dificultad** que tiene.




Muchas de estas actividades son similares a las que te encontrarás en tu prueba de acceso a la universidad.

# 1 Matrices

**CONTENIDOS**

**Matrices. Tipos de matrices**

**Matriz traspuesta**

**Operaciones con matrices**

**Rango de una matriz. Método de Gauss**

**Matriz inversa. Método de Gauss-Jordan**

**Ecuaciones matriciales**

Los vehículos modernos vienen equipados con todo tipo de extras que sirven para aumentar la seguridad a la hora de conducir como, por ejemplo, los sistemas antiderrapaje, los sensores que miden la presión de los neumáticos, los asistentes de frenada, las ayudas de visión nocturna... Los fabricantes también se han volcado en el confort y la facilidad de conducir: asistentes de aparcamiento, sensores de luz y lluvia y, en muchos casos, navegador GPS.

Este último accesorio comenzó implantándose en las flotas de camiones para que el tiempo en entregar las mercancías fuera optimizado al no haber confusiones para llegar al destino final y ser informado tanto del tipo de vía como de su estado y del tráfico que soportaba.

En principio, el navegador era un artículo de lujo, pero ahora, con el auge de los *smartphones*, se ha convertido en algo tremendamente cotidiano, que nos informa tanto del lugar donde estamos como de la ruta más corta, más rápida o más ecológica que podemos tomar para ir de un sitio a otro.

Parece fácil y rápido, pero...

**¿Cómo elige las rutas apropiadas un navegador GPS?**

# 1 Matrices

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow 1.^{a} \\ \leftarrow 2.^{a} \\ \cdots \\ \leftarrow m.^{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1.^{a} & 2.^{a} & 3.^{a} & \cdots & n.^{a} \end{array}$$

Columnas

Filas

Una **matriz de *m* filas y *n* columnas** es una tabla de $m \times n$ números reales ordenados en $m$ filas y $n$ columnas.

Los números $a_{ij}$ son los **elementos** de la matriz, y en ellos el subíndice $i$ indica la fila que ocupan, y el subíndice $j$, la columna.

La **dimensión** de una matriz de $m$ filas y $n$ columnas es $m \times n$.

### Se escribe así

Para expresar abreviadamente una matriz, escribimos:

$$A = (a_{ij})$$

Si queremos añadir la dimensión, indicamos:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

## EJEMPLOS

**1** Determina la dimensión de esta matriz e identifica los elementos $a_{23}$ y $a_{32}$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz $A$ está formada por 3 filas y 4 columnas; por tanto, su dimensión es $3 \times 4$.

Se observan la fila y la columna que indican los subíndices.

$a_{23} = 1$ — 2.ª fila, 3.ª columna

$a_{32} = 3$ — 3.ª fila, 2.ª columna

**2** **En esta tabla se muestran los partidos jugados por dos equipos de balonmano durante la liga. Escribe la información en forma de matriz.**

| | Partidos ganados | Partidos empatados | Partidos perdidos |
|---|---|---|---|
| Equipo *A* | 16 | 0 | 8 |
| Equipo *B* | 14 | 1 | 9 |

Se puede escribir la información de la tabla como una matriz de $2 \times 3$.

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 \\ 14 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow \text{Equipo } A \\ \leftarrow \text{Equipo } B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Ganados} & \text{Empat.} & \text{Perdidos} \end{array}$$

$a_{11} = 16 \rightarrow$ El equipo $A$ ha ganado 16 partidos.

$a_{23} = 9 \rightarrow$ El equipo $B$ ha perdido 9 partidos.

$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 24 \rightarrow$ El equipo $A$ ha jugado en total 24 partidos.

$a_{21} + a_{22} = 15 \rightarrow$ El equipo $B$ no ha perdido en 15 partidos.

$a_{13} + a_{23} = 17 \rightarrow$ Entre los dos equipos han perdido 18 partidos.

## ACTIVIDADES

**1.** Estas son las calificaciones que han obtenido Daniel y Manuel en los cuatro controles de Matemáticas de esta evaluación.

| | C1 | C2 | C3 | C4 |
|---|---|---|---|---|
| Daniel | 8 | 7 | 9 | 10 |
| Manuel | 6 | 8 | 10 | 9 |

Elabora una matriz con estos datos.

**2.** Escribe una matriz de dimensión $2 \times 3$ donde se cumpla que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i + j = 4 \\ -1 & \text{si} \quad i + j \neq 4 \end{cases}$$

**3.** Escribe una matriz de dimensión $4 \times 3$ cuyos elementos $a_{ij}$ sean nulos si la suma $i + j$ es un número primo, y 1 en caso contrario.

## 1.1. Matrices iguales

Dos **matrices** son **iguales** si tienen la misma dimensión y, además, los elementos coinciden término a término.

$A$ y $B$ son iguales $\rightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para cualquier valor de $i, j$.

### EJEMPLO

**3** Determina si estas matrices son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A$ y $B$ no tienen la misma dimensión, $3 \times 2 \neq 2 \times 3$; por tanto, no son iguales.

$A$ y $C$ tienen la misma dimensión, $3 \times 2$; sin embargo, $a_{11} = 1 \neq c_{11} = 2$; por tanto, tampoco son iguales.

### Se escribe así

$a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i, j$ significa que:
$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \ldots, a_{mn} = b_{mn}$

## 1.2. Clasificación de matrices

- Una **matriz fila** es una matriz que tiene una sola fila y $n$ columnas. Su dimensión es $1 \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Una **matriz columna** es una matriz con $m$ filas y una sola columna. Su dimensión es $m \times 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Una **matriz nula**, o **matriz cero**, es una matriz en la que todos sus elementos son ceros. Se representa por 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

- Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, está formada por $n$ filas y $n$ columnas. Si su dimensión es $n \times n$, diremos que su **orden** es $n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Una **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas, es decir, no es cuadrada.

### Date cuenta

Hay una matriz nula para cada dimensión.

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de dimensión $2 \times 1$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de dimensión $1 \times 2$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de orden 2

### EJEMPLO

**4** Clasifica las siguientes matrices. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A$ es una matriz cuadrada de orden 2.

$B$ es una matriz columna de dimensión $2 \times 1$.

$C$ es una matriz fila nula de dimensión $1 \times 3$.

### ACTIVIDADES

**4.** Determina los valores de $a$, $b$, $c$ y $d$ para que estas dos matrices sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 & 2 \\ c-2 & 3-a & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & b+1 & d-1 \\ 2c & 1 & b+2 \end{pmatrix}$$

**5.** Escribe una matriz cuadrada de orden 3 cuyos elementos estén determinados por esta igualdad.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

## 1.3. Tipos de matrices cuadradas

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada está formada por todos los elementos de la forma $a_{ii}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Diagonal principal**

Según sean los elementos que forman una matriz cuadrada, esta puede ser:

- **Matriz triangular superior**
  Todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior**
  Todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal**
  Todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidad o matriz unidad**
  Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos. Se denota por $I$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### No olvides

Hay una matriz identidad de cada orden.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 2

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 3

### EJEMPLO

**5** Decide de qué tipo es cada una de estas matrices cuadradas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal — Matriz identidad — Triangular inferior — Triangular superior

### ACTIVIDADES

**6.** Escribe la matriz de orden 3 que verifica la condición $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si} \quad i \le j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$. ¿Qué tipo de matriz es?

**7.** Escribe una matriz diagonal de orden 3 tal que la suma de todos sus elementos sea 7.

**8.** Escribe una matriz cuyos únicos elementos nulos estén en la diagonal principal.

**9.** Escribe la matriz de orden 3 que verifica la condición $a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{si} \quad i \ge j \\ 0 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$. ¿Qué tipo de matriz es?

# 2 Matriz traspuesta

La **matriz traspuesta**, $A^t$, de una matriz $A$ de dimensión $m \times n$, es otra matriz de dimensión $n \times m$ que se obtiene al cambiar en $A$ las filas por las columnas o las columnas por las filas.

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ entonces } A^t = (a_{ji}).$$

### Date cuenta

Solo si una matriz es cuadrada, su matriz traspuesta tiene la misma dimensión.

**EJEMPLO**

**6** Halla la traspuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y determina su dimensión.

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ La dimensión de $A^t$ es $3 \times 2$.

## Matrices simétricas y antisimétricas

Una matriz cuadrada, $A$, es **simétrica** si coincide con su traspuesta.

$$A = A^t \rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

Y es **antisimétrica** cuando su opuesta, $-A$, coincide con su traspuesta.

$$-A = A^t \rightarrow -a_{ij} = a_{ji}$$

### Date cuenta

Solo las matrices cuadradas pueden ser simétricas o antisimétricas.

**EJEMPLO**

**7** Decide si estas matrices son simétricas o antisimétricas.

**a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = A \rightarrow A$ es una matriz simétrica.

b) La matriz $B$ no es cuadrada; por tanto, no puede ser simétrica ni antisimétrica.

c) $C^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -C \rightarrow C$ es una matriz antisimétrica.

## Propiedades

- En una matriz simétrica, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} a & m & n \\ m & b & v \\ n & v & c \end{pmatrix}$$

- En una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son ceros y los elementos simétricos respecto de ella son opuestos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & n \\ -m & 0 & v \\ -n & -v & 0 \end{pmatrix}$$

## ACTIVIDADES

**10.** Determina la matriz traspuesta de esta matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**11.** Comprueba que una matriz cuadrada en la que se cumple que $a_{ij} = i + j$ es simétrica. Escribe una matriz de orden 3 con estas características.

## 3 Operaciones con matrices

### 3.1. Suma de matrices

**No olvides**

Para que dos matrices se puedan sumar deben tener la misma dimensión.

La **suma de dos matrices**, $A$ y $B$, de la misma dimensión se denota $A + B$, y es otra matriz de la misma dimensión cuyos elementos son la suma de los elementos de $A$ y $B$ que ocupan la misma posición.

$$A + B = C, \text{ siendo } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

**EJEMPLO**

**8** Suma, si es posible, estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tanto $A$ y $B$ como $B$ y $C$ no tienen la misma dimensión; luego, no se pueden sumar.

Las matrices $A$ y $C$ tienen la misma dimensión.

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+5 \\ 3+(-1) & -3+(-4) \\ 0+2 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Propiedades

Como la suma de matrices se realiza elemento a elemento, cumple propiedades análogas a las de la suma de números reales.

- **Conmutativa:** $A + B = B + A$
- **Asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Elemento neutro:** el elemento neutro de la suma es la matriz nula.
$$A + 0 = A$$
- **Elemento opuesto:** para cada matriz $A$, existe su matriz opuesta, $-A$, formada por los opuestos de los elementos de $A$.
$$A + (-A) = 0$$

**Date cuenta**

Para restar dos matrices sumamos a la primera la opuesta de la segunda.

$$A - B = A + (-B)$$

**EJEMPLO**

**9** Determina la matriz opuesta, $-A$, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y comprueba que la suma de las dos matrices es la matriz nula.

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**ACTIVIDADES**

**12.** Realiza la siguiente operación matricial.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**13.** Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $A + A^t - I$.

**14.** Calcula los valores de $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$ para que se cumpla que $A = B + C$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 7 & 8+d \\ a & 9 & c+9 & e+2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix}$$

## 3.2. Producto de una matriz por un número

El **producto de un número** real $k$ **por una matriz** $A$ es otra matriz de la misma dimensión que $A$ cuyos elementos se obtienen al multiplicar cada uno de los elementos de $A$ por $k$.

$$k \cdot A = C, \text{ siendo } c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

**EJEMPLO**

**10** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, calcula.

**a)** $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

**b)** $(-1) \cdot A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 0 & (-1)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

**c)** $\frac{1}{2} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

### Date cuenta

Si una matriz es diagonal y todos los elementos de la diagonal son iguales, podemos sacar factor común.

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot I$$

## 3.3. Producto de una matriz fila por una matriz columna

El **producto de una matriz fila**, de dimensión $1 \times n$, **por una matriz columna**, de dimensión $n \times 1$, es un número que se obtiene al multiplicar sus elementos, término a término, y sumar los resultados.

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

**EJEMPLO**

**11** Determina si se pueden realizar los productos $A \cdot B$, $C \cdot A$ y $C \cdot B$, siendo las matrices:

$$A = (6 \quad 2 \quad 1) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 4)$$

La matriz $A$ es una matriz fila de dimensión $1 \times 3$; $B$ es una matriz columna de dimensión $3 \times 1$; por tanto, las podemos multiplicar.

$$A \cdot B = (6 \quad 2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 17$$

La matriz $C$ es una matriz fila de dimensión $1 \times 4$; por tanto, solo se puede multiplicar por una matriz con 4 filas. No se puede multiplicar por $A$ ni por $B$.

### No olvides

Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna es necesario que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.

### ACTIVIDADES

**15.** Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $3A - B + 2C$  b) $2C + B - 3A$

**16.** Dadas $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcula si es posible.

a) $A \cdot B$  b) $B \cdot A$  c) $2A \cdot 3B$  d) $(-2B) \cdot A$

## 3.4. Producto de dos matrices

### No olvides

- Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.
- La matriz producto resultante tiene el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda.

El producto de una matriz $A$, de dimensión $m \times n$, por otra matriz $B$, de dimensión $n \times p$, es otra matriz, $C$, de dimensión $m \times p$, cuyo elemento $c_{ij}$ se obtiene al multiplicar la fila $i$-ésima de la primera matriz por la columna $j$-ésima de la segunda.

$$A \cdot B = C, \text{ siendo } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mj}.$$

### SABER HACER

#### Calcular el producto de dos matrices

▶ **Calcula el producto, $A \cdot B$, de estas matrices.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**PRIMERO.** Se comprueba que se pueden multiplicar: el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Dimensión de $A$: $2 \times 3$

Dimensión de $B$: $3 \times 2$

El número de columnas de $A$ coincide con el número de filas de $B$, por lo que las matrices se pueden multiplicar.

La matriz $A \cdot B$ tendrá el mismo número de filas que $A$ y el número de columnas de $B$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

**SEGUNDO.** Se efectúa el producto de la primera fila de la matriz $A$ por la primera columna de la matriz $B$ para obtener el primer elemento de la matriz producto.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

**TERCERO.** Se multiplica la primera fila de la matriz $A$ por el resto de columnas de la matriz $B$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

**CUARTO.** Se repite el proceso con el resto de filas de la primera matriz y de columnas de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

### Date cuenta

Para que exista el producto de tres matrices, $A \cdot B \cdot C$, sus dimensiones deben ser de esta forma:

Dimensión de $A$: $m \times n$
Dimensión de $B$: $n \times p$
Dimensión de $C$: $p \times q$

La dimensión de $A \cdot B \cdot C$ será $m \times q$.

### ACTIVIDADES

**17.** Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A^t \cdot B$

**18.** Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz $A \cdot B \cdot C$.

**EJEMPLO**

**12** En un restaurante se sirven tres tipos de menús: el diario, el ejecutivo y el especial. En estas tablas se muestran los kilos que se compran semanalmente de carne, pescado y verduras para elaborar cada menú y los precios en las dos últimas semanas de cada producto.

| | Carne | Pescado | Verduras |
|---|---|---|---|
| M. diario | 6 | 14 | 12 |
| M. ejecutivo | 8 | 18 | 13 |
| M. especial | 12 | 26 | 15 |

| | Semana 1 | Semana 2 |
|---|---|---|
| Carne | 12,50 | 10,60 |
| Pescado | 16 | 11,90 |
| Verduras | 6,20 | 8,40 |

Calcula el coste semanal que han tenido ambos menús.

Para resolver el problema se considera cada tabla como una matriz y las multiplicamos.

$$\begin{pmatrix}6&14&12\\8&18&13\\12&26&15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12,5&10,6\\16&11,9\\6,2&8,4\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{Semana 1}&\text{Semana 2}\end{array}\\ \begin{pmatrix}373,4&331\\468,6&408,2\\659&562,6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\leftarrow\text{Menú diario}\\ \leftarrow\text{Menú ejecutivo}\\ \leftarrow\text{Menú especial}\end{array}$$

La elaboración de los menús ha sido más barata la segunda semana.

## Propiedades

Si las dimensiones de las matrices $A$, $B$ y $C$ son tales que nos permiten realizar sus productos, se cumplen estas propiedades:

- **Asociativa:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- **Elemento neutro:** $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
- **Distributiva:** Por la izquierda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

  Por la derecha: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

En general, el producto de matrices no es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$

**EJEMPLO**

**13** Calcula, si es posible, el producto de estas matrices y comprueba si es conmutativo. $A = \begin{pmatrix}3&-3&3\\0&1&2\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}4&-7\\1&2\end{pmatrix}$

Como la dimensión de $A$ es $2 \times 3$ y la de $B$ es $2 \times 2$, el producto no puede ser conmutativo ya que no podemos realizar el producto $A \cdot B$; en cambio, sí podemos efectuar $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix}4&-7\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&3\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-19&-2\\3&-1&7\end{pmatrix}$$

### Se escribe así

$A \cdot B \rightarrow$ $A$ multiplica a $B$ por la izquierda.

$B \cdot A \rightarrow$ $A$ multiplica a $B$ por la derecha.

Dos matrices, $A$ y $B$, conmutan o son **conmutables** si $A \cdot B = B \cdot A$.

## ACTIVIDADES

**19.** Sean $A = \begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}7&4\\0&6\end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$.

a) Comprueba si $A$ y $B$ son matrices que cumplen la propiedad conmutativa.

b) Verifica que se cumple la propiedad distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

**20.** El latón es una aleación de cobre y cinc. LATONES, S. L., produce latón de tres tipos: $A$, con un 30 % de cinc; $B$, con un 40 %; y $C$, con un 50 %. Dispone de dos proveedores: $M$, que vende el cobre a 6,50 €/kg y el cinc a 1,50 €/kg; y $N$, con el cobre a 6,70 €/kg y el cinc a 1,10 €/kg. Para producir 100 toneladas de latón $A$, 550 de $B$ y 50 de $C$, ¿a qué proveedor deberá comprar?

# 4 Rango de una matriz

## 4.1. Combinaciones lineales de las filas de una matriz

Una fila no nula $F_i$ de una matriz **depende linealmente** de las filas $F_{j_1}$, $F_{j_2}$, …, $F_{j_m}$ si se cumple que:

$$F_i = k_1F_{j_1} + k_2F_{j_2} + \ldots + k_mF_{j_m}$$

Una fila de una matriz es **linealmente independiente** cuando no depende linealmente de otras filas de la matriz.

### No olvides

Las mismas definiciones que hemos hecho para las filas las podemos hacer para las columnas.

- Una columna no nula $C_i$ de una matriz **depende linealmente** de las columnas $C_{j_1}$, $C_{j_2}$, …, $C_{j_m}$ si se cumple que:

$$C_i = k_1C_{j_1} + k_2C_{j_2} + \ldots + k_mC_{j_m}$$

- Una columna de una matriz es **linealmente independiente** cuando no depende linealmente de otras columnas de la matriz.

**EJEMPLO**

**14** Determina las filas linealmente independientes en esta matriz. $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

La primera fila, $F_1$, depende linealmente de la segunda fila, $F_2$, si $F_1 = kF_2$, es decir, los elementos de $F_1$ tienen que ser múltiplos de los de $F_2$. Como no es así, las filas de $A$ son linealmente independientes.

## 4.2. Rango de una matriz

El **rango de una matriz** $A$, Rango $(A)$, es el número de filas o de columnas no nulas linealmente independientes que tiene la matriz.

El rango por filas siempre es igual al rango por columnas.

### Date cuenta

Como el rango por filas es siempre igual al rango por columnas, una matriz $A$ y su traspuesta $A^t$ tienen siempre el mismo rango.

**EJEMPLO**

**15** Determina el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & -10 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

$F_1$ no depende linealmente de $F_2$ ni de $F_3$, y lo mismo ocurre con $F_2$ y $F_3$.

Analizamos si $F_1$ depende linealmente de $F_2$ y $F_3$, es decir, si $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3$. Tomando los dos primeros elementos de las filas se tendría:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = k_1a_{21} + k_2a_{31} \\ a_{12} = k_1a_{22} + k_2a_{32} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = 3k_1 + 8k_2 \\ 0 = -5k_1 + (-10)k_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_1 = -2 \quad k_2 = 1$$

Comprobamos si se cumple el resto de igualdades para estos valores de $k_1$ y $k_2$.

$$a_{13} = k_1a_{23} + k_2a_{33} \rightarrow 3 = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 7$$

$$a_{14} = k_1a_{24} + k_2a_{34} \rightarrow -4 = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$$

Por tanto, $F_1 = -2F_2 + F_3$, es decir, $F_1$ depende linealmente de $F_2$ y $F_3$.

Así, $F_2$ y $F_3$ son linealmente independientes y $F_1$ depende de $F_2$ y $F_3$ $\rightarrow$ Rango $(A) = 2$.

### ACTIVIDADES

**21.** Determina el rango de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

**22.** Halla el rango de las matrices $A$, $B$ y $A \cdot B^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

## 4.3. Método de Gauss

El **método de Gauss** para hallar el rango de una matriz consiste en convertir la matriz inicial en una matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal sean ceros, utilizando las transformaciones elementales adecuadas. El rango de la matriz será el número de filas no nulas que tiene la matriz triangular que hemos obtenido.

Las transformaciones elementales que se pueden realizar en la matriz son:

- Intercambiar entre sí la fila $i$ por la fila $j$. Este cambio lo escribimos como $F_i \leftrightarrow F_j$.
- Sustituir la fila $i$ por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$. Lo escribimos como $F_i = aF_i$.
- Sustituir la fila $i$ o la fila $j$ por la suma de ambas, multiplicadas por números $a$ y $b$ no nulos. Lo escribimos como $F_i = aF_i + bF_j$.

### SABER HACER

#### Calcular el rango de una matriz mediante el método de Gauss

▶ Determina el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**PRIMERO.** Si $a_{11} = 0$, se intercambia la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de cero, si existe. Se realizan operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El primer elemento de la segunda fila ya es cero. Se hace cero el primer elemento de la tercera fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**SEGUNDO.** Se comprueba que $a_{22} \neq 0$. Si no lo fuera, habría que intercambiar esta fila con alguna cuyo segundo elemento no sea cero, si existe. Como en el paso anterior, se hace cero el segundo elemento de cada fila, excepto el de la primera y segunda filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 2F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**TERCERO.** Se repite el mismo proceso para el resto de filas de la matriz inicial hasta obtener una matriz en la que todos los elementos por debajo de su diagonal sean ceros. El número de filas no nulas que tiene la matriz es el rango de la matriz.

En este caso se obtienen dos filas no nulas → Rango $(A) = 2$.

### Date cuenta

Como el rango de una matriz y el de su traspuesta es el mismo, en el caso de que la matriz tenga más filas que columnas podemos abreviar el proceso calculando el rango de su traspuesta.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Rango}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

### ACTIVIDADES

**23.** Usa el método de Gauss para hallar el rango de $A$ y $B$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

**24.** Calcula el rango de la matriz $A^t \cdot B - C^t$ en función del parámetro $m$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & m \end{pmatrix}$$

# 5 Matriz inversa

### Date cuenta

Si una matriz no es cuadrada, no tiene inversa.

La **matriz inversa** de una matriz cuadrada $A$ de orden $n$ es otra matriz $A^{-1}$ del mismo orden que cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad A^{-1} \cdot A = I_n$$

siendo $I_n$ la matriz identidad de orden $n$.

Las matrices que tienen matriz inversa se llaman **matrices regulares** o **invertibles**, y las que no la tienen, **matrices singulares**.

**EJEMPLO**

**16** Determina si alguna de estas matrices es la inversa de $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**a)** $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ **b)** $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 13 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ **c)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) La matriz $B$ no puede ser una matriz inversa porque no es cuadrada.

b) La matriz $C$ no puede ser la inversa de $A$ porque tienen órdenes distintos.

c) La matriz $D$ es cuadrada y tiene el mismo orden que $A$. Se comprueba si es la matriz inversa de $A$.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz $D$ es la matriz inversa de $A$ ya que $A \cdot D = I$.

### Se escribe así

Una matriz es **invertible** cuando existe su matriz inversa.

Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa; sin embargo, no todas las matrices cuadradas tienen inversa.

Una matriz $A$ cuadrada de orden $n$ solo tiene inversa si Rango $(A) = n$.

## Propiedades

- La inversa de la matriz inversa es la matriz original.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando su orden.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- La inversa de la traspuesta de una matriz es igual a la traspuesta de la matriz inversa.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

## ACTIVIDADES

**25.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $A^{-1}$ mediante la definición.

b) Comprobar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

**26.** Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible.

**27.** Comprueba que la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es ella misma.

## Método de Gauss-Jordan

El **método de Gauss-Jordan** para hallar la matriz inversa consiste en convertir la matriz inicial en la matriz identidad utilizando transformaciones elementales. Aplicando las mismas transformaciones a la matriz identidad obtenemos la matriz inversa.

### SABER HACER

#### Calcular la matriz inversa con el método de Gauss-Jordan

▶ Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

**PRIMERO.** Se escriben la matriz $A$ y la matriz identidad del mismo orden que $A$ separadas por una línea. Si $a_{11} = 0$, se intercambia la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de cero.

Como $a_{11} = 2 \neq 0$, no se intercambian filas.

**SEGUNDO.** Se realizan operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + 3F_1]{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

**TERCERO.** Se comprueba que $a_{22} \neq 0$; si no habría que intercambiar la fila con alguna fila posterior cuyo segundo elemento sea distinto de cero. Se opera para hacer cero el segundo elemento de cada fila, excepto el de la segunda fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_2]{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

**CUARTO.** Se repite el mismo proceso para el resto de filas de la matriz inicial.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 5F_3]{F_1 = F_1 + 7F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

**QUINTO.** Se divide cada fila entre el elemento que figura en su diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = -F_2 \\ F_3 = -F_3}]{F_1 = \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

**SEXTO.** Los elementos que figuran a la derecha de la línea forman la inversa de la matriz inicial.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Recuerda

Las operaciones elementales que se pueden realizar para hallar la matriz inversa son las mismas que para el cálculo del rango de una matriz.

- Intercambiar entre sí la fila $i$ por la fila $j$.

  $F_i \leftrightarrow F_j$

- Sustituir la fila $i$ por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$.

  $F_i = aF_i$

- Sustituir la fila $i$ o la fila $j$ por la suma de ambas, multiplicadas por números $a$ y $b$ no nulos.

  $F_i = aF_i + bF_j$

### Se escribe así

Para expresar la matriz inicial y la matriz identidad en el método de Gauss-Jordan se escribe:

$(A \mid I_n)$

Al utilizar ese método realizamos esta transformación:

$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$

### ACTIVIDADES

**28.** Determina por el método de Gauss-Jordan la inversa de estas matrices y comprueba que las matrices resultantes son efectivamente sus inversas.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

**29.** Calcula, mediante el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

# 6 Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación en la que todos sus términos son matrices. Para resolver una ecuación matricial hay que despejar la matriz incógnita mediante las operaciones con matrices.

**SABER HACER**

### Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$

▶ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $AX = B$.

**PRIMERO.** Se despeja $X$ multiplicando por $A^{-1}$ por la izquierda.

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \xrightarrow{A^{-1}\cdot A = I} IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

**SEGUNDO.** Se calcula $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = -F_2]{F_1 = \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**TERCERO.** Se resuelve la ecuación.

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Recuerda**

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa; por tanto, no es lo mismo multiplicar por $A^{-1}$ por la derecha que por la izquierda.

$$A^{-1}B \neq BA^{-1}$$

**SABER HACER**

### Resolver ecuaciones matriciales del tipo $XA = B$

▶ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $XA = B$.

**PRIMERO.** Se despeja $X$ multiplicando por $A^{-1}$ por la derecha.

$$XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \xrightarrow{A\cdot A^{-1} = I} XI = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

**SEGUNDO.** Se calcula $A^{-1}$ y se resuelve la ecuación.
La matriz $A^{-1}$ es la misma que la del apartado anterior.

$$X = BA^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

## ACTIVIDADES

**30.** Dadas $A$ y $B$, calcula la matriz $X$ tal que $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**31.** Dadas las matrices $A$ y $B$, resuelve la ecuación $X \cdot A = B$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## SABER HACER

### Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX + B = C$

▶ Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$ con las matrices $A$, $B$ y $C$, que son las que aparecen a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**PRIMERO.** Se despeja la matriz $X$.

$$AX + 3B = C \to AX = C - 3B$$
$$\to A^{-1}AX = A^{-1}(C - 3B) \xrightarrow{A^{-1}\cdot A = I} X = A^{-1}(C - 3B)$$

**SEGUNDO.** Se calcula la matriz $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2F_1]{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + 2F_3]{F_1 = F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**TERCERO.** Se resuelve la ecuación.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

## ACTIVIDADES

**32.** Resuelve matricialmente la ecuación $A^t \cdot X - B = 0$, si $A$ y $B$ son estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**33.** Determina una matriz $X$ que cumple la ecuación $X \cdot A + A = 2A^2$, sabiendo que $A$ es la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

## Operaciones con matrices

### Resolver operaciones con matrices

**Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $M = (3I + A^t)^2$ donde $I$ es la matriz identidad de orden 3.**

**PRIMERO.** Se determinan las matrices necesarias para resolver la operación.

$$3 \cdot I = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**SEGUNDO.** Se resuelve la operación.

$$M = (3I + A^t)^2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 48 \end{pmatrix}$$

**PRACTICA**

**34.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula el resultado de la operación entre matrices $A^t(2B - I)^2$ siendo $I$ la matriz identidad de orden 3.

## Operaciones con matrices

### Calcular la potencia de una matriz

**Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^{99}$.**

**PRIMERO.** Se calcula $A^2, A^3, A^4 \ldots$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I, A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A, A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = I, A^7 = A^6 \cdot A = I \cdot A = A, \ldots$$

**SEGUNDO.** Se deduce una regla general en la que se pueda relacionar el exponente con los elementos de la matriz.

1. Si el exponente es un número par $\rightarrow A^{2n} = I$
2. Si el exponente es un número impar $\rightarrow A^{2n+1} = A$

**TERCERO.** Se aplica la regla general para calcular la potencia pedida.

Como 99 es un número impar: $A^{99} = A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**PRACTICA**

**35.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $A^{101}$.

b) Calcula $A^{101}$ si $k = 3$.

c) ¿Cuáles son los valores de $k$ para los que $A^{101} = I$?

## Operaciones con matrices

### Determinar matrices que cumplan una cierta condición

**Determina todas las matrices diagonales que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.**

**PRIMERO.** Se determina el tipo de matrices que cumplen la condición.

Las matrices, $B$, buscadas tienen que cumplir lo siguiente.

- Son matrices diagonales.

  $$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

- Conmutan con la matriz $A$.

  $$A \cdot B = B \cdot A$$

**SEGUNDO.** Se impone la condición del problema.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

**TERCERO.** Se igualan las matrices, elemento a elemento, y se resuelve el sistema de ecuaciones resultante.

$$\left.\begin{aligned} \cancel{2a_{11} = 2a_{11}} \\ a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \\ \cancel{0 = 0} \end{aligned}\right\}$$

La primera y la cuarta ecuaciones se pueden eliminar porque son igualdades.

De la segunda y tercera ecuaciones se obtiene que:

$$\left.\begin{aligned} a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \end{aligned}\right\} \rightarrow a_{11} = a_{22}$$

La única condición es que los elementos de la diagonal sean iguales ($a_{11} = a_{22}$).

Por tanto, las matrices que cumplen la condición pedida son del tipo:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad \text{donde } k \in \mathbb{R}$$

**PRACTICA**

**36.** Encuentra las matrices $A$ y $B$ cuadradas de orden 2 que cumplan que:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

## Operaciones con matrices

### Calcular las constantes que hacen que se cumpla una igualdad entre matrices

**Calcula $m$ y $n$ para que se cumpla la igualdad $mA^2 + nA^t = 2I$, teniendo en cuenta que $I$ es la matriz identidad y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

**PRIMERO.** Se efectúan las operaciones del primer y segundo miembros de la igualdad.

$$mA^2 = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix}$$

$$nA^t = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix}$$

$$2I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**SEGUNDO.** Se impone la condición que se indica en el problema.

$$mA^2 + nA^t = 2I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & -2m + n \\ 2m - n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**TERCERO.** Se igualan las matrices, elemento a elemento, y se resuelve el sistema de ecuaciones resultante.

$$\left.\begin{aligned} n = 2 \\ -2m + n = 0 \\ 2m - n = 0 \\ \cancel{n = 2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{n = 2} -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$$

Se elimina la cuarta ecuación porque es igual a la primera.

De las dos primeras ecuaciones se obtiene la solución $m = 1$ y $n = 2$.

Se comprueba si esta solución es válida para el resto de ecuaciones. Si no lo fuera, el sistema no tendría solución y, en consecuencia, el problema tampoco.

$$2m - n = 0 \xrightarrow{m = 1,\, n = 2} 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

La solución es válida; por tanto, $m = 1$ y $n = 2$.

**PRACTICA**

**37.** Calcula los valores de $\alpha$ y $\beta$ tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$.

La matriz $A$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

La matriz $I$ es $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Operaciones con matrices

### Resolver problemas utilizando matrices

**La siguiente matriz expresa el precio unitario, en euros, al que le sirven a un restaurante tres productos, $P_1$, $P_2$ y $P_3$, desde dos empresas distintas, $E_1$ y $E_2$**

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

**Utilizando las operaciones matriciales, determina a qué empresa encargarías cada uno de los siguientes pedidos.**

**a)** Pedido de 8 unidades del producto $P_1$, 5 unidades del producto $P_2$ y 12 unidades del producto $P_3$.

**b)** Pedido de 10 unidades del producto $P_1$, 15 unidades del producto $P_2$ y 7 unidades del producto $P_3$.

**PRIMERO.** Se interpreta la información que proporcionan las matrices.

$$\begin{array}{ccc} \text{Empresas} \rightarrow & E_1 \;\; E_2 & \\ & \downarrow \;\;\; \downarrow & \\ A = & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{Precios del producto } P_1 \text{ en cada empresa} \\ \rightarrow \text{Precios del producto } P_2 \text{ en cada empresa} \\ \rightarrow \text{Precios del producto } P_3 \text{ en cada empresa} \end{array} \end{array}$$

a) $B = (8 \quad 5 \quad 12) \rightarrow$ Unidades pedidas de cada producto

b) $C = (10 \quad 15 \quad 7) \rightarrow$ Unidades pedidas de cada producto

**SEGUNDO.** Se realizan las operaciones que resuelven el problema y se interpreta la solución.

a) $B \cdot A = (8 \quad 5 \quad 12) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (\overset{\text{Precio total del pedido en } E_1}{181} \quad \underset{\text{Precio total del pedido en } E_2}{164})$

El pedido será más barato en la empresa $E_2$.

b) $C \cdot A = (10 \quad 15 \quad 7) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (\overset{\text{Precio total del pedido en } E_1}{198} \quad \underset{\text{Precio total del pedido en } E_2}{219})$

El pedido será más barato en la empresa $E_1$.

**PRACTICA**

**38.** La siguiente matriz expresa los precios unitarios, en euros, de cuatro artículos, $A$, $B$, $C$ y $D$, procedentes de las fábricas $F_1$, $F_2$ y $F_3$.

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 46 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si un pedido es representado por una matriz fila $C = (x \quad y \quad z \quad t)$, ¿qué representa cada uno de los elementos del resultado del producto $CP$? Si queremos comprar 25 unidades de $A$, 30 de $B$, 60 de $C$ y 75 de $D$, ¿cuál de las fábricas nos ofrece mejor precio?

## Operaciones con matrices

### Transformar tablas en matrices

**Una empresa fabrica juguetes de tres tipos diferentes $T_1$, $T_2$ y $T_3$. Los precios de coste de cada juguete y los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido vienen dados por la siguiente tabla:**

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ |
|---|---|---|---|
| Precio de coste | 4 € | 6 € | 9 € |
| Ingreso | 10 € | 16 € | 24 € |

**El número de ventas es de 4 500 juguetes del tipo $T_1$, 3 500 juguetes del tipo $T_2$ y 1 500 juguetes del tipo $T_3$.**

**Determina las matrices $C$, $I$ y $V$, sabiendo que la matriz de costes $C$ y la matriz de ingresos $I$ son diagonales, y que la matriz de ventas $V$ es una matriz fila. Obtener, utilizando las matrices anteriores, una matriz de costes anuales, una de ingresos anuales y una de beneficios anuales, para los tres tipos de juguetes.**

**PRIMERO.** Se determinan las matrices utilizando la información.

$C$ e $I$ matrices diagonales $\rightarrow C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

$V$ matriz fila $\rightarrow V = (4500 \quad 3500 \quad 1500)$

**SEGUNDO.** Se definen las demás matrices con operaciones.

Costes = Ventas anuales · Coste juguete = $VC$

Ingresos = Ventas anuales · Ingreso juguete = $VI$

Beneficios = Ingresos anuales − Ventas anuales = $VI - VC$

**TERCERO.** Se realizan las operaciones necesarias.

$$\text{Costes} = VC = (4500 \quad 3500 \quad 1500) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = (18000 \quad 21000 \quad 13500)$$

$$\text{Ingresos} = VI = (4500 \quad 3500 \quad 1500) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = (45000 \quad 56000 \quad 36000)$$

$$\text{Beneficios} = VI - VC = (45000 \quad 56000 \quad 36000) - (18000 \quad 21000 \quad 13500) = (27000 \quad 35000 \quad 22500)$$

**PRACTICA**

**39.** Una floristería elabora tres tipos de centros florales con las siguientes cantidades de cada flor.

| | Tipo I | Tipo II | Tipo III |
|---|---|---|---|
| Claveles | 12 | 4 | 8 |
| Rosas | 10 | 15 | 5 |
| Tulipanes | 3 | 6 | 12 |

Determina mediante matrices el número de flores de cada tipo que se necesitan para elaborar 87 centros del tipo I, 27 del tipo II y 53 del tipo III.

# Rango de una matriz

## Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro

**Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.**

**PRIMERO.** Se aplica el método de Gauss para calcular el rango de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2F_1]{F_2 = F_2 - mF_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & -1-m^2 \\ 0 & -1 & 1-2m \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1-2m \\ 0 & 0 & -1-m^2 \end{pmatrix}$$

**SEGUNDO.** Se estudia el número de filas no nulas que tiene la matriz dependiendo de los valores del parámetro.

- La primera y la segunda fila son siempre no nulas.
- La tercera fila es nula si $-1 - m^2 = 0 \rightarrow m^2 = -1$.

No tiene solución para ningún valor de $m \in \mathbb{R}$. Por tanto, la tercera fila nunca es nula.

Rango $(A) = 3$, para cualquier valor de $m \in \mathbb{R}$.

**PRACTICA**

**40.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \\ 3 & 2-a & 3 & 3+a \end{pmatrix}$, estudia, en función del parámetro $a$, el rango de la matriz.

# Matriz inversa

## Calcular la inversa de una matriz que depende de un parámetro

**Di cuándo es invertible $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}$.**

**PRIMERO.** Se calcula el rango de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - (a-1)F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & -a^2+2a & -a^2+a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & -a^2+2a & -a^2+a+2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Se estudian los elementos de la diagonal.

- En la tercera fila si $1 - a = 0 \rightarrow a = 1$
- En la segunda fila si $-a^2 + 2a = 0$

$$-a^2 + 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- En la primera fila $1 \neq 0$

Por tanto: Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$
Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$
Si $a = 2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

**SEGUNDO.** Solo existe la inversa si su rango es igual a su orden. Si $a = 0$, $a = 1$ o $a = 2 \rightarrow$ No existe inversa.

**PRACTICA**

**41.** Di cuándo es invertible $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$.

# Ecuaciones matriciales

## Resolver un sistema de ecuaciones matriciales

**Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.**

**Halla las matrices $X$ e $Y$ que verifican el sistema $\left.\begin{matrix} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{matrix}\right\}$.**

**PRIMERO.** Se resuelve el sistema.

$$\left.\begin{matrix} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} 6X + 2Y = 2A \\ 4X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \\ \hline 2X \qquad\quad = 2A - B \end{array}$$

$$X = A - \frac{1}{2}B \rightarrow Y = -2A + \frac{3}{2}B$$

**SEGUNDO.** Se calculan $X$ e $Y$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

**PRACTICA**

**42.** Halla las matrices $X$ e $Y$, cuadradas de orden 2, que resuelvan el sistema $\left.\begin{matrix} 2X + Y = A^2 \\ X - Y = A^{-1} \end{matrix}\right\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

## Matrices. Operaciones con matrices

**43.** Escribe dos ejemplos de distinta dimensión para cada tipo de matriz.

a) Matriz fila.
b) Matriz columna.
c) Matriz diagonal.
d) Matriz identidad.
e) Matriz triangular superior.
f) Matriz triangular inferior.

**44.** Determina la matriz triangular superior de orden 2 cuyos elementos de la diagonal principal son 1, y la suma de todos sus elementos es 6.

**45.** Determina los valores de $x$ e $y$ para que estas matrices sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x+3 \\ 3 & x & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 3 & 2y-5 & -4 \end{pmatrix}$$

**46.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $A - 2B$ d) $2A + 3B$

**47.** Sean las matrices $A_{M\times N}$, $B_{M\times P}$ y $C_{P\times N}$. Determina la dimensión de las siguientes matrices.

a) $A^t \cdot B$
b) $A \cdot C^t$
c) $B \cdot C$
d) $C \cdot A^t$
e) $B \cdot C + A$
f) $B^t \cdot A - C$

**48.** Sean las matrices $A_{2\times 3}$, $B_{6\times 2}$, $C_{3\times 4}$ y $D_{4\times 3}$. Determina la dimensión de estas matrices.

a) $A \cdot C$
b) $A^t \cdot B^t$
c) $C \cdot D$
d) $B \cdot A$
e) $C^t \cdot A^t \cdot B^t$
f) $(C^t + D) \cdot A^t$

**49.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A \cdot B$ b) $B^t \cdot A$ c) $A^2$

**50.** Comprueba que cualquier matriz de orden 3 cumple que $(A^t)^t = A$

**51.** Comprueba que una matriz cuadrada que verifique $a_{ij} = i - j$ es antisimétrica. Escribe una matriz de orden 3.

**52.** Considera estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes productos.

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $B \cdot C$ d) $C \cdot B^t$

**53.** Se consideran las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, estas matrices.

a) $A \cdot B \cdot C$
b) $A \cdot C^t + B$
c) $B^t \cdot A - C$
d) $B \cdot C \cdot A$
e) $A^t \cdot C^t$
f) $B^t \cdot C^t$

**54.** Comprueba que estas matrices son conmutables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

**55.** Encuentra la expresión general de todas las matrices que conmuten con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**56.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra una matriz $B$ que conmute con la matriz $A$, que sea triangular superior y cuya suma de los elementos de su diagonal principal sea 2.

**57.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Comprueba que $A$ y $B$ conmutan.
b) Determina la expresión general de todas las matrices que conmutan con $A$.

**58.** Sea $C$ el conjunto de todas las matrices de la forma $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ tales que $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que dos matrices de este tipo son siempre conmutables.

**59.** Comprueba que se cumple la propiedad distributiva del producto de matrices con respecto a la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Utiliza las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**60.** Determina el valor de $t$ para el que se cumpla esta condición.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

**61.** Determina los valores de $x$, $y$ y $z$ para que se verifique la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**62.** Calcula el valor de $x$ para el que se verifica lo siguiente.

$$\begin{pmatrix} x^2+3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4-4x & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

**63.** Calcula el valor de $x$ para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**64.** Encuentra un número real $\lambda \neq 0$ y todas las matrices $B$ de dimensión $2 \times 2$ distintas de la matriz nula que cumplan lo siguiente:

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

**65.** Halla $\alpha$ para que $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$.

**66.** Si $A$ y $B$ son dos matrices cuadradas de orden 3 y $A$ es una matriz diagonal, ¿podemos asegurar que $A$ y $B$ cumplen la propiedad conmutativa para el producto? ¿Cómo debería ser $A$ para que la cumplan?

**67.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula las matrices $B$ tales que $A \cdot B = B \cdot A^t$.

**68.** Halla todas las matrices $M$ de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2 - 2M = 3I$, donde $I$ es la matriz identidad.

**69.** Determina los valores de $m$ para los cuales la matriz $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - 4X + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, donde $I$ es la matriz identidad.

**70.** Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla el valor de $x$ para que se cumpla esta igualdad.

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

**71.** Comprueba que se verifica la propiedad $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ para estas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**72.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$, calcula los valores de $m$ y $n$ para los que se cumple que $(I + A)^3 = mI + nA$, donde $I$ es la matriz identidad.

**73.** Encuentra los valores de $\alpha$ y $\beta$ que verifican la ecuación $A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0$, sabiendo que $I$ es la matriz identidad de orden 2 y que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**74.** Halla una matriz $B$ sabiendo que su primera fila es $(2 \quad 0)$ y que verifica que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**75.** Comprueba si las siguientes matrices cumplen la propiedad conmutativa para el producto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**76.** Determina todas las matrices $A$ antisimétricas que cumplan que $A^2 = B$, donde $B$ es la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

**77.** Considera las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A + B)^2$.
b) Halla $A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$.
c) ¿Qué deberían cumplir $A$ y $B$ para que se verificase que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$? Razona la respuesta.

**78.** Encuentra todas las matrices posibles de la forma $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que conmuten con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De entre todas ellas, determina aquella cuya suma de los elementos de la diagonal principal sea 5 y donde $a_{11} = -a_{12}$.

**79.** Encuentra las matrices $X = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ que verifican la condición $X^2 = I$, donde $I$ es la matriz identidad.

**80.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $A^{41}$.

**81.** Obtén la matriz $A^{2\,000}$ si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**82.** De una matriz $A$ sabemos que verifica la condición $A^2 = 2A - I$, donde $I$ es la matriz identidad. Determina la expresión general de la potencia $n$-ésima de la matriz $A$.

**83.** Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demuestra que $A$ y $B$ son conmutables.
b) Calcula $A^n$ y $B^n$.

**84.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Halla todas las matrices $B$ que conmuten con $A$.
b) Calcula la potencia $n$-ésima de $A$.

**85.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula las matrices $A^2, A^3, A^4$ y $A^5$. Obtén, razonadamente, $A^n$ para $n > 5$.

**86.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula lo siguiente.

a) Todas las matrices $M$ que conmutan con $A$.
b) $A^4$ y $A^n$.

**87.** Considera las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcula lo siguiente.

a) $M^n$, con $n = 1, 2, 3\ldots$
b) Todas las matrices $M$ que verifiquen que $M^{100} = V$.

**88.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, determina:

a) Las constantes $m$ y $n$ tales que $A^2 = mA + nI$, donde $I$ es la matriz identidad.

b) $A^5$, utilizando solo la expresión del apartado anterior, y sin calcular $A^3$ ni $A^4$.

**89.** Se dice que una matriz cuadrada es idempotente cuando se cumple que su cuadrado es igual a ella misma, es decir, cuando $A^2 = A$.

a) Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3, distinta de la matriz unidad y de la matriz nula, que sea idempotente.

b) Calcula el valor de $m$ para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix}$ sea idempotente.

c) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.

**90.** Dada una matriz cuadrada $A$, se define su traza, $Tr(A)$, como la suma de los elementos de su diagonal principal.

a) Demuestra que para dos matrices cuadradas cualesquiera, $A$ y $B$, se verifica que $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$.

b) Aplica el resultado anterior para calcular $a$, sabiendo que las matrices $A$ y $B$ son cuadradas y que $AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**91.** Una matriz cuadrada es nilpotente cuando alguna de sus potencias es la matriz nula. En el caso de que $n$ sea el menor entero positivo tal que $A^n = 0$, se dice que $A$ es nilpotente de grado $n$.

a) Demuestra que la siguiente matriz es nilpotente de grado 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Es decir, $A^2 \neq 0$ y $A^3 = 0$.

b) Encuentra todas las matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ nilpotentes de grado 2.

## Rango de una matriz

**92.** Calcula el rango de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**93.** Halla el rango de estas matrices.

a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

**94.** Calcula el rango de esta matriz.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{7}{2} & 4 & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

**95.** Calcula el valor de $a$ para que la matriz tenga rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**96.** Calcula el rango de la matriz $A$ según los valores del parámetro $m$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

**97.** Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix}$. Discute su rango en función del parámetro $a$.

**98.** Calcula el rango de la siguiente matriz en función del parámetro $m$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{-1}{2} & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m \end{pmatrix}$$

**99.** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de la matriz $A^n$. ¿Depende el rango de $n$?

**100.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} d & a & a \\ b & d & 3 \\ c-4 & c & d \end{pmatrix}$, donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son números reales.

a) Determina los valores de $a$, $b$, $c$ y $d$ para los que la matriz $A$ sea antisimétrica.

b) Si $a = b = c = 0$, determina el rango de $A$ en función del parámetro $d$.

**101.** Calcula el rango de la matriz $A$ según los valores del parámetro $a$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & 3 & -2 \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

## Matriz inversa

**102.** Calcula la matriz inversa de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**103.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A^{-1}$ y $B^{-1}$ b) $(A \cdot B)^{-1}$

Comprueba que se cumple que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

**104.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A^{-1}$ b) $(A^t)^{-1}$

Comprueba que se cumple que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

**105.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $(A^{-1})^{-1}$ b) $B^{-1} \cdot B$

¿Se cumplen estos resultados para cualquier matriz?

**106.** Determina todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que $A^{-1} = 2I - A$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 2.

**107.** Se dice que dos matrices cuadradas de orden $n$, $A$ y $B$, son semejantes, si existe una matriz invertible $M$ tal que $B = M^{-1} \cdot A \cdot M$, donde $M^{-1}$ es la matriz inversa de $M$.

Determina si son semejantes estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**108.** Considera una matriz cuadrada $A$ que cumple la ecuación $A^2 - 3I = 2A$, donde $I$ denota la matriz identidad.

a) Estudia si existe la matriz inversa de $A$ y, si es posible, determina $A^{-1}$ en función de $A$ e $I$.

b) Determina todas las matrices $A$ de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $A^2 - 3I = 2A$.

**109.** Sabiendo que la inversa de una matriz $A$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $AB$ es $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determina la matriz $B$.

**110.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Determina el conjunto de todas las matrices que conmutan con la matriz $A$.

b) Calcula $A^n$ y deduce de esta expresión $A^{-1}$.

**111.** Considera la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como una matriz genérica de orden 2.

a) Determina la expresión genérica de su matriz inversa.

b) Razona para qué casos las matrices de orden 2 son invertibles.

**112.** Calcula $A^{-1}$ y $A^n$, siendo $A$ una matriz de orden 3 con todos sus elementos nulos excepto

$a_{11} = a_{23} = a_{32} = \dfrac{1}{5}$.

**113.** Si una matriz cuadrada $A$ verifica que $A^2 + 7A = I$, siendo $I$ la matriz unidad, calcula $A^{-1}$ en función de $A$.

**114.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$, calcula.

a) Las constantes $a$, $b$ y $c$ para que se cumpla que $A^t = A^{-1}$.

b) La matriz $A^4$ para los valores de $a$, $b$ y $c$ obtenidos.

**115.** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2I$.

b) Calcula $A^{-1}$.

c) Halla $A^{12}$ y la inversa de $A^{12}$.

## Ecuaciones matriciales

**116.** Despeja la matriz $X$ en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) $AX + B = C$

d) $AX + A = B$

e) $A^{-1}X = B$

f) $AXB = C$

g) $A^tX = B$

h) $AXA = A^2 + I$

**117.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, determina una matriz $X$ de orden 2 que cumpla esta ecuación.

$$X + A = B$$

¿De qué tipo es la matriz $X$ obtenida?

**118.** Determina la matriz $X$ que cumple la igualdad

$A + X = 2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**119.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $X$ que cumple que $2A - 5X = B$.

**120.** Considera las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina una matriz $X$ que verifique esta condición.

$$A - A^2 = A \cdot B - X$$

**121.** Resuelve esta ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

**122.** Encuentra una matriz $X$ de orden 2 que cumpla que

$A + X = AX + XA$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**123.** Resuelve la ecuación matricial $XA + AX = B$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**124.** Determina, si existe, una matriz $D$ de orden 2 que verifique esta ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

**125.** Considera las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz $X$ que verifica la ecuación $AX = B$.

**126.** Determina la matriz $X$ que verifica la ecuación $(X - I)B = A$, donde $A$ y $B$ son estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**127.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Determina los valores de $m$ para los que la ecuación $AX - A^t = A$ tiene solución.

b) Resuelve la ecuación $AX - A^t = A$ para $m = 0$.

**128.** Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcula una matriz $X$ que verifique la ecuación $X + XA = B^t$.

**129.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $A^{-1}$.

b) Resuelve la ecuación $AXA = A^2 + A$.

**130.** Calcula la matriz $X$ que cumple que $XB + A = B + A^2$, donde $A$ y $B$ sean estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**131.** Resuelve los siguientes sistemas matriciales.

a) $\left.\begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} X + 3Y &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \\ X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 3X + Y &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ X - 2Y &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2X + 3Y &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$

**132.** Encuentra las matrices $A$ y $B$ sabiendo que cumplen las siguientes condiciones.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**133.** Determina dos matrices, $X$ e $Y$, que verifiquen las ecuaciones $2X + Y = A$ y $3X + 2Y = B$, sabiendo que $A$ y $B$ son estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

**134.** Sean $A$, $B$ y $C$ las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula las matrices $X$ e $Y$ que verifican este sistema de ecuaciones matriciales.

$$\left.\begin{aligned} AX + BY &= C \\ AX &= Y \end{aligned}\right\}$$

**135.** Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$.

Encuentra las matrices $X$ e $Y$ que cumplen las siguientes ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2X + Y &= A \\ X - 2Y &= B \end{aligned}\right\}$$

**136.** Sean las matrices $A$ y $B$ siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de $\mu$ para el que $A^{-1} = \frac{1}{6}A$.

b) Para $\mu = -3$, determina la matriz $X$ que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$.

**137.** Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores del parámetro $\alpha$ para los que la matriz $M^2 + 3M$ no sea invertible.

b) Para el valor $\alpha = 0$, resuelve la ecuación matricial $MX + M = 2I$.

**138.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A^n$.

b) Halla la matriz $X$ que verifica la ecuación

$$X \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**139.** Considera las matrices siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia el rango de cada una de las matrices en función del parámetro $a$.

b) Para $a = 0$, obtén la matriz $X$ que verifica la ecuación $AX = B$.

## Problemas con matrices

**140.** Escribe en forma de tabla el siguiente enunciado y representa los datos en forma de matriz.

*Una familia gastó en septiembre 400 € en comida y 120 € en los recibos de agua, luz y gas; en octubre gastó 500 € en comida y 180 € en agua, luz y gas; y en noviembre, 350 € en comida y 250 € en agua, luz y gas.*

**141.** Una empresa de autobuses tiene tres líneas: $A$, $B$ y $C$. El lunes salieron 5 autobuses en la línea $A$, 3 en la $B$ y 4 en la $C$. El martes salieron 2 autobuses en la línea $A$, 1 en la $B$ y 4 en la $C$. El miércoles salió 1 autobús en la línea $A$, 3 en la $B$ y 5 en la $C$. Represéntalo en forma de matriz.

**142.** Una empresa produce tres artículos: $A$, $B$ y $C$. Los precios de coste por unidad son 32 €, 46 € y 71 €, respectivamente, y los precios de venta de cada unidad son 53 €, 82 € y 140 €. El número de unidades vendidas anualmente de estos artículos es 2 100, 1 400 y 900, respectivamente. Determina la matriz fila de costes por unidad, la matriz fila de ventas por unidad, la matriz fila de beneficios por unidad, la matriz columna de unidades vendidas y el beneficio anual obtenido.

**143.** Una cadena de hoteles posee tres hoteles en una determinada ciudad: Hotel Edén, Paraíso Hotel y Oasis Spa. Cada hotel dispone de tres tipos de habitaciones: de lujo, habitación doble e individual. El Hotel Edén posee 6 habitaciones de lujo, 30 dobles y 10 individuales. El Paraíso Hotel, 4, 50 y 10, respectivamente y el Oasis Spa, 4, 50 y 8. El precio por habitación y noche es de 120 € la habitación de lujo, 80 € la doble y 50 € la individual.

a) Recoge estos datos en dos matrices, indicando qué significa cada fila y columna.

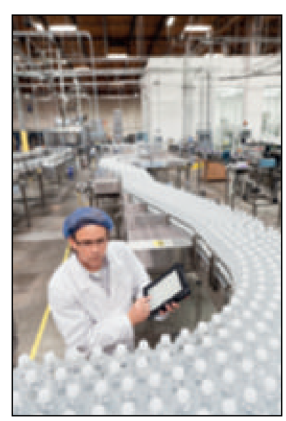
b) Expresa mediante una matriz los ingresos obtenidos en una noche por cada hotel en el caso de que estuvieran completos.

**144.** Una industria produce dos tipos de tornillos, planos ($P$) y de estrella ($E$). De cada tipo hace tres modelos: $L$, $M$, $S$. La producción semanal de tornillos, expresada en miles de unidades, se muestra mediante esta tabla.

| | Tipo $L$ | Tipo $M$ | Tipo $S$ |
|---|---|---|---|
| Tornillos planos | 2 | 7 | 4 |
| Tornillos de estrella | 3 | 5 | 6 |

El porcentaje de tornillos defectuosos del tipo $L$ es del 4 %, del tipo $M$ es de un 2 % y del tipo $S$ es de un 1 %. Calcula matricialmente el número semanal de tornillos planos y de estrella que no son defectuosos.

**145.** Una fábrica elabora dos tipos de productos, $X$ e $Y$, que vende a tres empresas $A$, $B$ y $C$. Inicialmente distribuía 1 000 unidades de cada producto a cada una, pero hoy la empresa $A$ recibió 600 unidades de $X$ y 300 de $Y$; la empresa $B$ recibió 400 unidades de $X$ y 800 de $Y$, y la empresa $C$ recibió 900 unidades de $X$ y 700 de $Y$. Representa mediante una matriz las disminuciones porcentuales que se han producido en la distribución de los productos a estas empresas.



# MATEMÁTICAS EN TU VIDA

## ¿PARA QUÉ SIRVEN LAS MATRICES?

### Para calcular una ruta óptima entre dos lugares diferentes

Cuando vemos un mapa con diferentes puntos de destino y los caminos que podemos tomar para llegar a cada uno, nuestro navegador trabaja con ellos de la siguiente forma: representa los lugares como puntos, que llamaremos vértices, y los caminos que unen estos lugares como aristas que unen los vértices. Así, el mapa que nosotros vemos con detalle, el navegador lo ve como un croquis simple que se llama grafo.


Esta situación se puede describir con una matriz cuadrada de orden $n$, donde $n$ es el número de vértices que tiene el grafo y cada elemento $a_{ij}$ es el número de aristas que van del vértice $i$ al vértice $j$. Esta matriz se llama matriz de adyacencia del grafo. La matriz del grafo anterior sería:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El elemento $ij$ de la matriz elevada al cuadrado expresa el número de caminos de 2 aristas que existen entre el vértice $i$ y el vértice $j$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, hay 1 camino de dos aristas desde el vértice 1 al vértice 4 y 3 caminos de 2 aristas desde el vértice 2 al vértice 2.

$M^3$ expresaría los caminos de tres aristas, $M^4$ los caminos de 4 aristas, y así sucesivamente.

De esta manera el navegador calcularía todos los caminos posibles y, sumando las longitudes de aristas, podría obtener el camino más corto. De igual modo lo haría para el camino más rápido sumando los tiempos de cada arista.

#### LEE Y COMPRENDE

**1.** Si entre dos puntos del mapa la carretera que los une no es recta, sino que tiene 4 curvas pronunciadas, ¿cuántas aristas son necesarias para señalarlas en el grafo?

#### INTERPRETA

**2.** Clasifica las matrices que aparecen en el texto, según su forma y la posición de sus elementos.

#### REFLEXIONA

**3.** Decimos que un camino es simple cuando no pasa dos veces por el mismo vértice. Si consideramos un grafo con 5 vértices, ¿cuál es el número máximo de aristas que tiene un camino simple?

#### APLICA

**4.** Dadas las matrices siguientes, dibuja un grafo que las tenga como matrices de adyacencia.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**5.** Considera el siguiente grafo y calcula el número de caminos cuya longitud sea de tres aristas que hay entre el vértice 2 y el vértice 4.