PROYECTO SABER HACER

ESO 4

Matemáticas
Enseñanzas académicas

SERIE **RESUELVE**

El libro Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 4.º curso de ESO es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
José Carlos Gámez Pérez
Ana María Gaztelu Villoria
Fernando Loysele Susmozas
Silvia Marín García
Carlos Pérez Saavedra
Domingo Sánchez Figueroa

EDICIÓN
José Antonio Almodóvar Herráiz
Silvia Marín García
Virgilio Nieto Barrera
Laura Sánchez Fernández

EDITOR EJECUTIVO
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

SANTILLANA

Índice

La estructura de las unidades didácticas es muy sencilla, ya que se trata de facilitar la localización de los contenidos fundamentales, de los ejemplos resueltos y de las actividades propuestas.

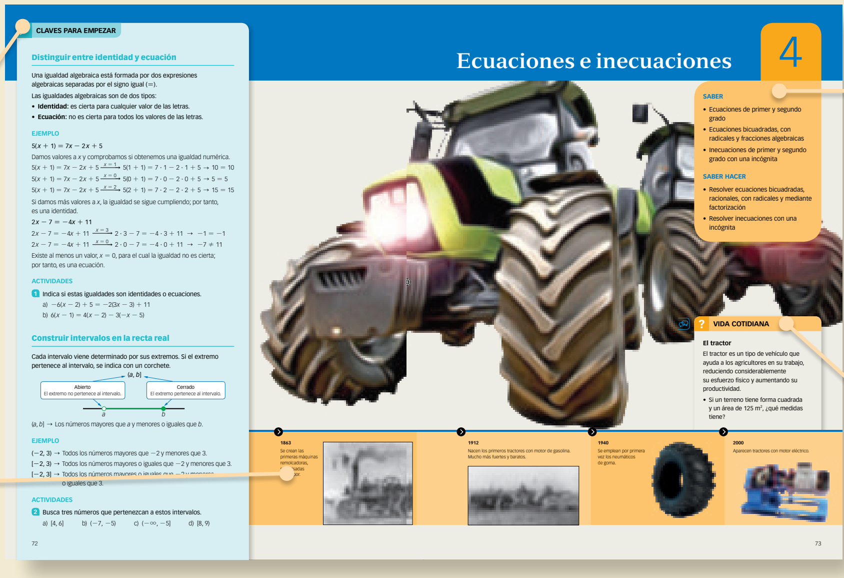
A lo largo de toda la unidad marcamos con iconos aquellos contenidos o actividades en los que se trabajan de manera particular las competencias básicas.

- Competencia matemática, científica y tecnológica
- Competencia social y cívica
- Conciencia y expresión cultural
- Iniciativa y emprendimiento
- Comunicación lingüística
- Competencia digital
- Aprender a aprender

Introducción a la unidad: dos elementos básicos, una base sólida y una motivación adecuada.

Las **Claves para empezar** te permitirán recordar aquellos contenidos que te serán útiles para la unidad.

Comenzamos la unidad en torno a la historia, utilidades y curiosidades de algún invento.



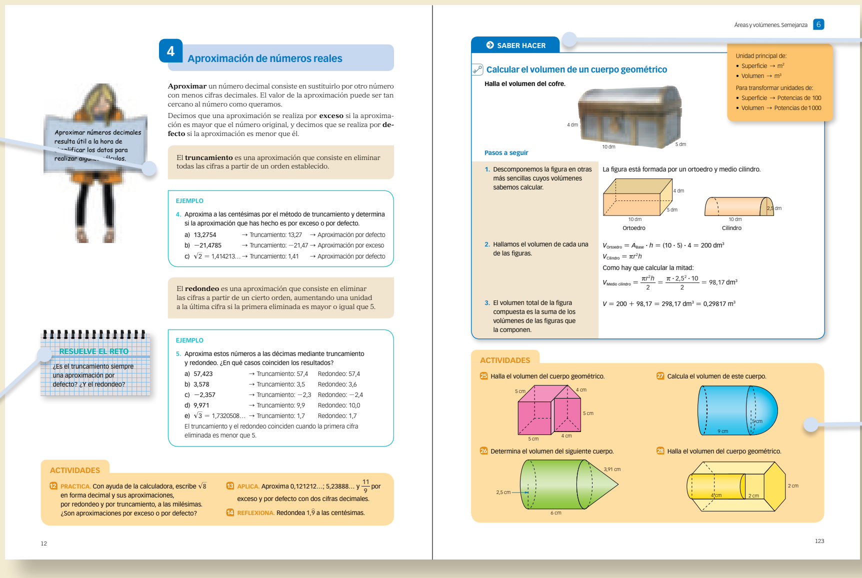
Se especifican los contenidos (**Saber**) y los procedimientos (**Saber hacer**) de la unidad.

La **Vida cotidiana** te propone un ejercicio sencillo, relacionado con la imagen de entrada.

Páginas de contenidos: SABER y SABER HACER como un todo integrado.

Nuestra propuesta para **Saber** son unos textos claros y estructurados. Los **Ejemplos** te ayudarán a afianzar esos saberes.

Junto a los textos encontrarás **informaciones complementarias**. Además, en **Resuelve el reto** pondremos a prueba tus conocimientos y tu razonamiento matemático.



En la parte **Saber hacer** aprenderás, paso a paso, los procedimientos necesarios para tu desarrollo matemático.

Las actividades te ayudarán a **practicar, aplicar y reflexionar** sobre los conocimientos. Las actividades que acompañan a **Saber hacer** tienen como objetivo afianzar y dominar estos procedimientos.

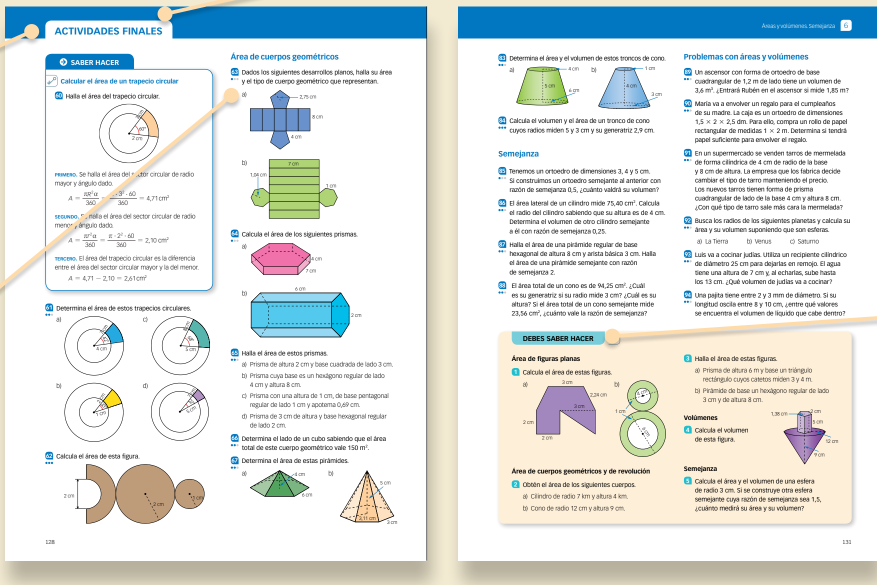
Páginas de actividades finales: una forma práctica de aprender a aprender.

Las actividades finales terminan con una gran cantidad de **Problemas** que te permitirán adaptar tus conocimientos a contextos reales.

Nuestras **Actividades finales** están **secuenciadas** para que aproveches de la mejor forma posible la aplicación de los contenidos estudiados.

Cada actividad te informa de la **dificultad** que tiene.

Los **Saber hacer** te ayudarán a seguir profundizando en los procedimientos.

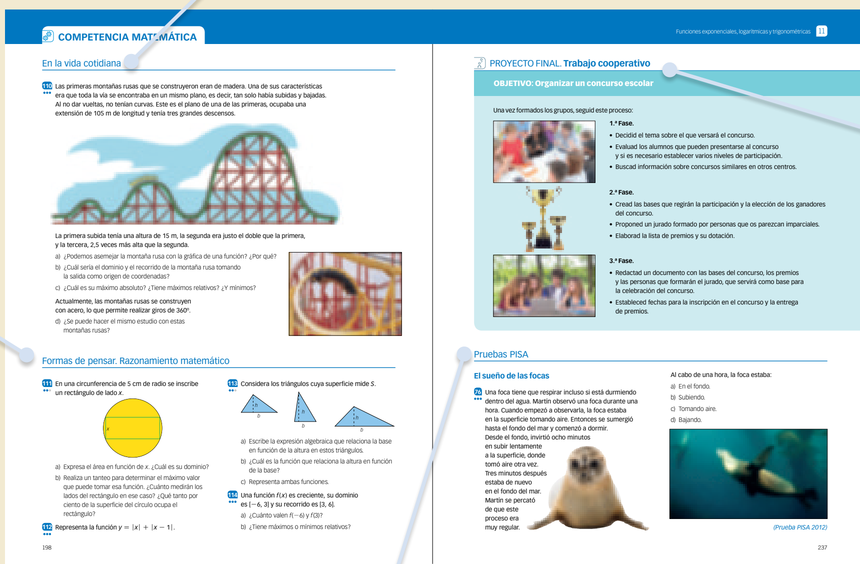


Para finalizar, **Debes saber hacer**. Esta autoevaluación básica te permitirá comprobar si has alcanzado los objetivos mínimos de la unidad.

Páginas de competencia matemática: un paso más en la aplicación de los contenidos aprendidos.

En la vida cotidiana es una actividad relacionada con el invento inicial, donde podrás trabajar con algunos contenidos de la unidad.

Con las **Formas de pensar** pondremos a prueba tu **razonamiento matemático**.



El **Proyecto final** te plantea objetivos que antes o después encontrarás en tu vida diaria. Con él mejorarás tus competencias para el **trabajo cooperativo**.

La unidad finaliza con las **Pruebas PISA**. Estas pruebas internacionales pretenden comprobar tu aprendizaje competencial y conviene que las conozcas.

CLAVES PARA EMPEZAR

Cómo se escriben números decimales en forma de fracción

Todo número decimal racional se puede escribir como una fracción.

EJEMPLO

Decimal exacto en forma de fracción:

$$6{,}39 = \frac{639}{100}$$

Parte entera y decimal sin coma (639)

Unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya (100)

Decimal periódico puro en forma de fracción:

$$4{,}\overset{\frown}{65} = \frac{465 - 4}{99}$$

Parte entera y período (465)

Parte entera (4)

Tantos nueves como cifras tiene el período (99)

Decimal periódico mixto en forma de fracción:

$$3{,}7\overset{\frown}{45} = \frac{3\,745 - 37}{990}$$

Parte entera, anteperíodo y período (3 745)

Parte entera y anteperíodo (37)

Tantos nueves como cifras tiene el período y tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo (990)

ACTIVIDADES

1 Expresa los siguientes números en forma de fracción.

a) $35{,}47$ b) $13{,}\overset{\frown}{46}$ c) $5{,}2\overset{\frown}{31}$

Cómo se representan fracciones en la recta numérica

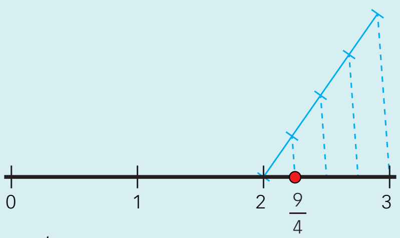
Una fracción se puede representar de manera exacta en la recta numérica.

EJEMPLO

Representa la fracción $\frac{9}{4}$ en la recta numérica.

$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{9}{4}$ está entre 2 y 3.

Trazamos una semirrecta desde 2 y tomamos cuatro partes iguales. Unimos la última marca con 3 y trazamos paralelas por las otras tres marcas.



El numerador de la nueva fracción, 1, indica las partes que debemos tomar.

ACTIVIDADES

2 Representa. a) 7,2 b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $-\frac{12}{5}$

Siglo XVIII a.C.

Hay registros de préstamos individuales concedidos en Babilonia.

1100

Los caballeros templarios crean la primera entidad bancaria europea.

Números reales. Porcentajes

1

SABER

- Números racionales e irracionales. Números reales
- Aproximaciones y errores de números reales
- Intervalos en la recta real
- Porcentajes. Interés simple y compuesto

SABER HACER

- Hallar los conjuntos numéricos a los que pertenecen ciertos números
- Calcular la unión y la intersección de dos intervalos
- Resolver problemas de porcentajes

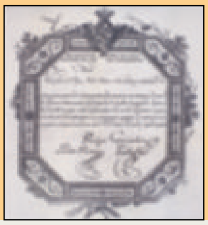
? VIDA COTIDIANA

La banca

Una cuenta bancaria es un servicio que ofrecen los bancos para guardar el dinero de sus clientes. A su vez, estos pueden llevar el control de lo que tienen en cada momento.

- Si tenemos 1 440 € en el banco y este mes hemos gastado 480 € de nuestra cuenta, ¿qué parte de nuestros ahorros hemos gastado? ¿Qué porcentaje de lo que teníamos representa ese gasto?

1656
Se funda en Suecia el primer banco que acepta papel moneda (billetes).

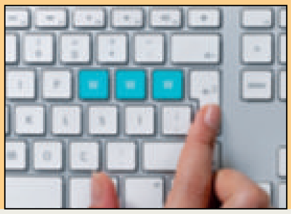


1782
Se crea el Banco de España, denominado entonces Banco de San Carlos.

1818
Se abre en París el primer banco de ahorros.

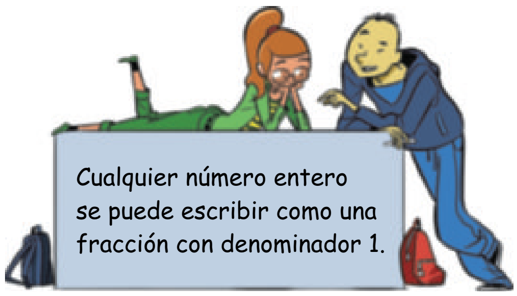
1995
Se extiende el uso de la banca telefónica.

Siglo XXI
Se normaliza el uso de la banca *online*.



1 Números racionales

El conjunto de los **números racionales**, $\mathbb{Q}$, está formado por todos los números que se pueden expresar en forma de fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.



Todos los números naturales, enteros, decimales exactos y periódicos son números racionales.

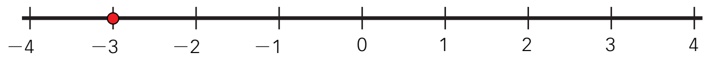
- Números racionales
  - Números enteros
    - Números naturales: 1, 2, 3, …
    - El número cero: 0
    - Enteros negativos: -1, -2, -3, …
  - Números decimales
    - Exactos: 0,2; 0,34; …
    - Periódicos: $0,\widehat{6}$; $2,2\widehat{63}$; …

Todos los números racionales se pueden representar de manera exacta en la recta numérica.

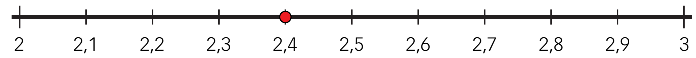
EJEMPLO

1. Indica si estos números son racionales y, si lo son, represéntalos.

a) $-3 = -\frac{3}{1}$ → Se puede expresar como fracción. Es un número racional.

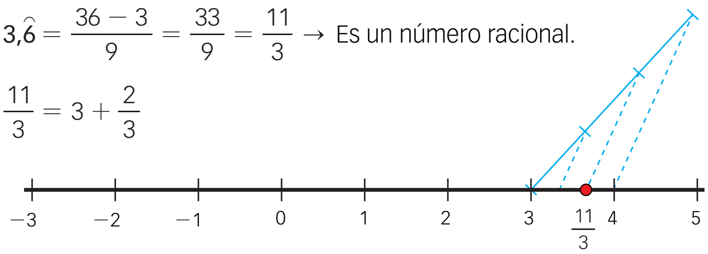


b) $2,4 = \frac{24}{10}$ → Se puede expresar como fracción. Es un número racional.



c) $3,\widehat{6} = \frac{36-3}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}$ → Es un número racional.

$\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$



ACTIVIDADES

1 PRACTICA. Empareja los números que tengan el mismo valor e indica a qué conjunto numérico pertenece cada uno.

$\frac{3}{40}$ $3,\widehat{6}$ 0,01   3,666… $\frac{5}{500}$ 0,075 $\frac{11}{3}$

2 APLICA. Ordena y representa.

a) 2,33 $2,\widehat{3}$ 2,3 $2,\widehat{36}$

b) $-4,2$ $-4,\widehat{2}$ $-4,22$ $-4,\widehat{27}$

3 REFLEXIONA. Representa $2,3\widehat{9}$ y $-4,2\widehat{9}$.

2 Números irracionales

El conjunto de los **números irracionales**, $\mathbb{I}$, está formado por los números que no se pueden expresar en forma de fracción. Su expresión decimal tiene un número infinito de cifras decimales que no se repiten de forma periódica.

EJEMPLO

2. Decide si estos números son racionales o irracionales y, después, ordénalos de menor a mayor.

a) $\pi = 3{,}1415926535\ldots \rightarrow$ Su expresión decimal tiene un número ilimitado de cifras que no se repiten de forma periódica. Es irracional.

b) $-2 = \dfrac{-2}{1} \rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

c) $\dfrac{2\pi}{3} = 2{,}094395102\ldots \rightarrow$ Su expresión decimal tiene un número ilimitado de cifras que no se repiten de forma periódica. Es irracional.

d) $\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots \rightarrow$ Su expresión decimal tiene un número ilimitado de cifras que no se repiten de forma periódica. Es irracional.

e) $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2} \rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

Los números ordenados de menor a mayor son:

$$-2 < \sqrt{\frac{9}{4}} < \frac{2\pi}{3} < \sqrt{5} < \pi$$

Existen infinitos números irracionales, por ejemplo:

- Cualquier raíz no exacta: $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{24}$, …
- Algunos números *especiales*: π, e, Φ, …
- Determinados números obtenidos combinando sus cifras decimales, por ejemplo: 0,010010001…; 0,12345678910…; …

RESUELVE EL RETO

Entre cada dos números racionales existe uno irracional y entre cada dos irracionales existe uno racional.

a) Calcula un número irracional comprendido entre $\dfrac{1}{1000}$ y $\dfrac{1}{999}$.

b) Calcula un número racional situado entre 0,12131415… y 2,12141618…

ACTIVIDADES

4 PRACTICA. Indica cuáles de estos números no son irracionales.

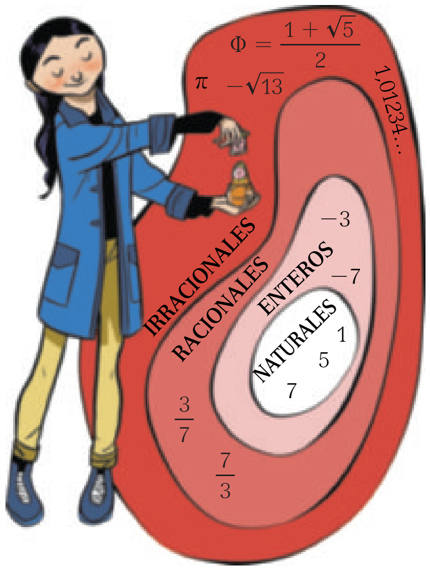
a) $\sqrt{4}$ c) $\sqrt{9} + \sqrt{4}$ e) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{9+4}$ d) $\sqrt{14+2}$ f) $\sqrt{4} + \sqrt{1}$

5 APLICA. ¿Es lo mismo la raíz de una suma que la suma de raíces? Pon un ejemplo para comprobarlo.

6 REFLEXIONA. Clasifica en racionales e irracionales y ordena de mayor a menor.

3,121122111222...	3,444...
3,123123123...	$\sqrt{10}$
3,48163264...	3,12121212...
$\sqrt[3]{31}$	2π
$\sqrt{\dfrac{256}{25}}$	3,004



3 Números reales

El conjunto de los **números reales**, $\mathbb{R}$, está formado por todos los números racionales y todos los irracionales.

- Números reales ($\mathbb{R}$)
  - Racionales ($\mathbb{Q}$)
    - Enteros ($\mathbb{Z}$)
      - Naturales ($\mathbb{N}$)
      - El número 0
      - Enteros negativos
    - Decimales exactos y periódicos
  - Irracionales ($\mathbb{I}$)

Recta real

La recta numérica en la que se representan los números reales se denomina **recta real**.

Todos los números reales se pueden representar de manera exacta o aproximada en la recta real.

SE ESCRIBE ASÍ

En ciertas ocasiones solo tomamos el valor positivo de una raíz.

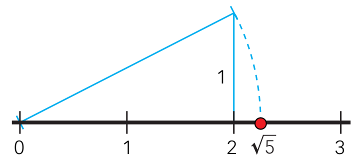
$\sqrt{4} = 2 \qquad -\sqrt{4} = -2$

EJEMPLO

3. Representa estos números en la recta real. a) $\sqrt{5}$ b) π

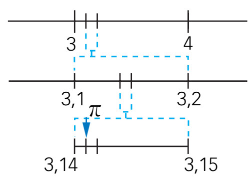
a) Los números del tipo $\sqrt{a}$, donde a es un número natural, se pueden representar de forma exacta sobre la recta real.

- Descomponemos el radicando en suma de dos números al cuadrado: $5 = 2^2 + 1^2$.
- Construimos sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos midan esos números.
- Trasladamos, con un compás, la hipotenusa sobre la recta.



b) Los números irracionales que no son del tipo $\sqrt{a}$ los representamos de forma aproximada hallando su expresión decimal.

$\pi = 3{,}141592\ldots$



ACTIVIDADES

7 PRACTICA. Representa las raíces en la recta real.

a) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{26}$ e) $-\sqrt{17}$

b) $\sqrt{17}$ d) $-\sqrt{10}$ f) $-\sqrt{26}$

8 APLICA. Representa de forma aproximada.

a) $2\sqrt{6}$ b) $1 + \sqrt{3}$ c) 3π

9 REFLEXIONA. Representa $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

SABER HACER

Hallar los conjuntos numéricos a los que pertenece un número

Indica todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen estos números.

$\sqrt{25}$ $\quad -\sqrt{\frac{16}{9}}$ $\quad \sqrt{7}$ $\quad 2,3\widehat{7}$ $\quad 1,1223334444\ldots$ $\quad -\frac{18}{9}$ $\quad -\frac{3}{4}$ $\quad 19$ $\quad -5$

Para encontrar todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen ciertos números, primero buscamos el conjunto más pequeño en el que están incluidos.

Pasos a seguir

1. Si el número contiene alguna raíz:
   - Si el radicando es un cuadrado perfecto, es un número natural si es positivo o entero si es negativo.
     $\sqrt{25} = 5 \rightarrow$ Es **natural**, entero, racional y real.
   - Si contiene fracciones y el numerador y el denominador son cuadrados perfectos:
     - Si el numerador es múltiplo del denominador, es un número natural si es positivo o entero si es negativo.
     - En caso contrario, es racional.
     $-\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} \rightarrow$ Es un número **racional** y real.
   - Si el radicando no es un cuadrado perfecto, el número es irracional.
     $\sqrt{7} = 2,64575131\ldots \rightarrow$ Es un número **irracional** y real.
2. Si el número es decimal:
   - Es racional si es un decimal exacto o periódico.
     $2,3\widehat{7} \rightarrow$ Es un número **racional** y real.
   - Es irracional si tiene infinitas cifras decimales no periódicas.
     $1,1223334444\ldots \rightarrow$ Es un número **irracional** y real.
3. Si el número es una fracción:
   - Cuando el numerador es múltiplo del denominador, es natural si la fracción es positiva y entero si es negativa.
     $-\frac{18}{9} = -2 \rightarrow$ Es un número **entero**, racional y real.
   - En caso contrario, es racional.
     $-\frac{3}{4} \rightarrow$ Es un número **racional** y real.
4. Si el número no tiene raíces, no es decimal ni es fracción, es natural si es positivo y entero si es 0 o negativo.
   $19 \rightarrow$ Es un número **natural**, entero, racional y real.
   $-5 \rightarrow$ Es un número **entero**, racional y real.

ACTIVIDADES

10 Decide el menor conjunto numérico al que pertenece cada uno de los números que aparecen a continuación.

a) -5
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\sqrt{625}$
e) 3π
f) -37
g) $\sqrt{\frac{1125}{5}}$
h) $21,4\widehat{63}$

11 Indica los conjuntos numéricos a los que pertenecen estos números.

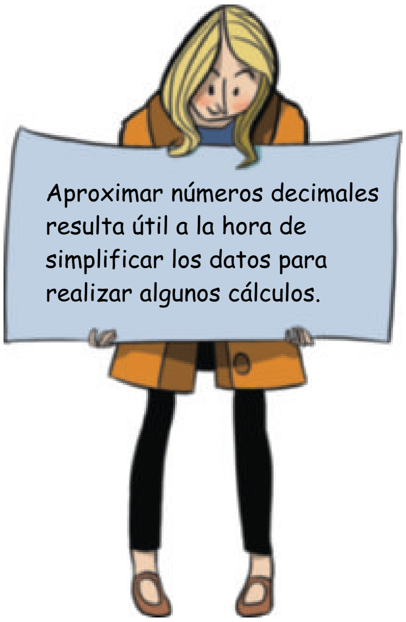
a) $5,0100200030004\ldots$; -25; $\sqrt{47}$; e

b) $-\frac{14}{2}$; $\sqrt{16}$; $54,97\widehat{2}$; 93

c) $\frac{5}{3}$; $7,42$; $\sqrt{7+2}$; $2,21221222122221\ldots$

d) $\sqrt{6+\sqrt{9}}$; $\sqrt{6+9}$; $\sqrt{9+\sqrt{6}}$; $\sqrt{\frac{9}{6}}$

4 Aproximación de números reales



Aproximar un número decimal consiste en sustituirlo por otro número con menos cifras decimales. El valor de la aproximación puede ser tan cercano al número como queramos.

Decimos que una aproximación se realiza por **exceso** si la aproximación es mayor que el número original, y decimos que se realiza por **defecto** si la aproximación es menor que él.

El **truncamiento** es una aproximación que consiste en eliminar todas las cifras a partir de un orden establecido.

EJEMPLO

4. Aproxima a las centésimas por el método de truncamiento y determina si la aproximación que has hecho es por exceso o por defecto.

a) 13,2754 → Truncamiento: 13,27 → Aproximación por defecto

b) $-21,4785$ → Truncamiento: $-21,47$ → Aproximación por exceso

c) $\sqrt{2} = 1,414213\ldots$ → Truncamiento: 1,41 → Aproximación por defecto

El **redondeo** es una aproximación que consiste en eliminar las cifras a partir de un cierto orden, aumentando una unidad a la última cifra si la primera eliminada es mayor o igual que 5.

RESUELVE EL RETO

¿Es el truncamiento siempre una aproximación por defecto? ¿Y el redondeo?

EJEMPLO

5. Aproxima estos números a las décimas mediante truncamiento y redondeo. ¿En qué casos coinciden los resultados?

a) 57,423 → Truncamiento: 57,4 Redondeo: 57,4

b) 3,578 → Truncamiento: 3,5 Redondeo: 3,6

c) $-2,357$ → Truncamiento: $-2,3$ Redondeo: $-2,4$

d) 9,971 → Truncamiento: 9,9 Redondeo: 10,0

e) $\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$ → Truncamiento: 1,7 Redondeo: 1,7

El truncamiento y el redondeo coinciden cuando la primera cifra eliminada es menor que 5.

ACTIVIDADES

12 **PRACTICA.** Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{8}$ en forma decimal y sus aproximaciones, por redondeo y por truncamiento, a las milésimas. ¿Son aproximaciones por exceso o por defecto?

13 **APLICA.** Aproxima 0,121212…; 5,23888… y $\frac{11}{9}$ por exceso y por defecto con dos cifras decimales.

14 **REFLEXIONA.** Redondea $1,\widehat{9}$ a las centésimas.

5 Errores de aproximación

El **error absoluto** de una aproximación es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real y el valor de la aproximación.

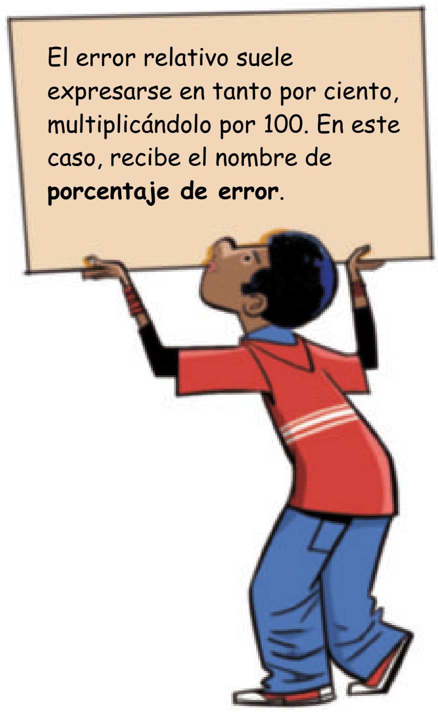
$$E_a = |V_{\text{Real}} - V_{\text{Aproximación}}|$$

EJEMPLO

6. Calcula el error absoluto cometido al aproximar $\sqrt{5}$ por 2,23. ¿Qué tipo de aproximación se ha realizado?

$\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots \rightarrow E_a = |2{,}236067977\ldots - 2{,}23| = 0{,}006067977\ldots$

Se ha realizado un truncamiento. Es una aproximación por defecto.



El **error relativo** de una aproximación es el cociente entre el error absoluto y el valor real.

$$E_r = \frac{E_a}{V_{\text{Real}}} = \frac{|V_{\text{Real}} - V_{\text{Aproximación}}|}{V_{\text{Real}}}$$

EJEMPLO

7. Halla el error absoluto y relativo. ¿Qué aproximación es más precisa?
   a) Un rascacielos de altura 201,12 m se aproxima por 200 m.
   b) La longitud de una hormiga de 1,3 mm se aproxima por 1 mm.

a) $E_a = |201{,}12 - 200| = 1{,}12 \text{ m} = 1\,120 \text{ mm}$

$$E_r = \frac{E_a}{V_{\text{Real}}} = \frac{1{,}12 \text{ m}}{201{,}12 \text{ m}} = 0{,}0056 = 0{,}56\,\%$$

b) $E_a = |1{,}3 - 1| = 0{,}3 \text{ mm}$

$$E_r = \frac{E_a}{V_{\text{Real}}} = \frac{0{,}3 \text{ mm}}{1{,}3 \text{ mm}} = 0{,}2308 = 23{,}08\,\%$$

Aunque el error absoluto de la aproximación de la altura del rascacielos es mucho mayor que el de la longitud de la hormiga, el relativo es menor.

Un menor error relativo indica una mejor aproximación; por tanto, la aproximación más precisa es la del rascacielos.

SE ESCRIBE ASÍ

A veces damos por buena cualquier aproximación cuyo error sea menor que una cierta cantidad; esa cantidad se llama **cota de error**.

ACTIVIDADES

15 PRACTICA. Obtén el error absoluto al redondear 4,7569 a las centésimas.

16 APLICA. Halla el error relativo cometido al truncar $2{,}\widehat{3}$ a las décimas.

17 REFLEXIONA. ¿Qué error absoluto y relativo se comete al aproximar 1,468 por 1,5? ¿Y si lo aproximamos por 1,4? Razona cuál es la mejor aproximación.

6 Intervalos

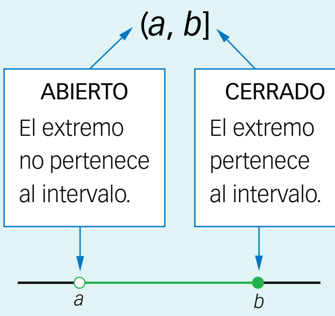
6.1. Intervalos

Un **intervalo** de extremos *a* y *b* es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre *a* y *b*.

Los intervalos se clasifican según contengan, o no, a sus extremos.

Intervalo abierto	(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	

SE ESCRIBE ASÍ



6.2. Semirrectas

Una **semirrecta** de extremo *a* es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre $-\infty$ y *a*, o bien entre *a* y $+\infty$.

Las semirrectas son cerradas o abiertas si contienen o no a su extremo.

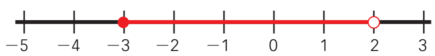
Semirrecta abierta	$(a, +\infty)$	$\{x : a < x\}$	
Semirrecta cerrada	$[a, +\infty)$	$\{x : a \leq x\}$	
Semirrecta abierta	$(-\infty, b)$	$\{x : x < b\}$	
Semirrecta cerrada	$(-\infty, b]$	$\{x : x \leq b\}$	

En la expresión de una semirrecta, $\pm\infty$ siempre se escribe con paréntesis.

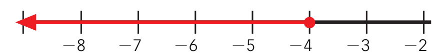
EJEMPLO

8. Escribe en forma de intervalos y semirrectas, y representa.

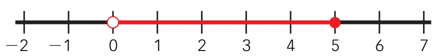
a) $-3 \leq x < 2 \rightarrow [-3, 2)$



b) $x \leq -4 \rightarrow (-\infty, -4]$



c) $5 \geq x > 0 \rightarrow (0, 5]$



ACTIVIDADES

18 PRACTICA. Describe y representa los siguientes intervalos en la recta real.

a) $(4, 8)$ c) $[1, 5)$ e) $(-\infty, 4)$

b) $(-\infty, 2)$ d) $(-3, 0]$ f) $[-1, +\infty)$

19 APLICA. Escribe estos intervalos.

a) $-4 < x \leq 0$ b) $1 \leq x \leq 2$ c) $10 > x > 4$

20 REFLEXIONA. Representa estas semirrectas.

a) $x \leq 6$ b) $x \geq 3$ c) $x < 0$

SABER HACER

Calcular la unión y la intersección de intervalos

Halla la unión y la intersección de los siguientes pares de intervalos.

a) $A = [-4, 2]$, $B = (-2, 4]$ **c)** $A = (-\infty, -4]$, $B = [-4, 2)$

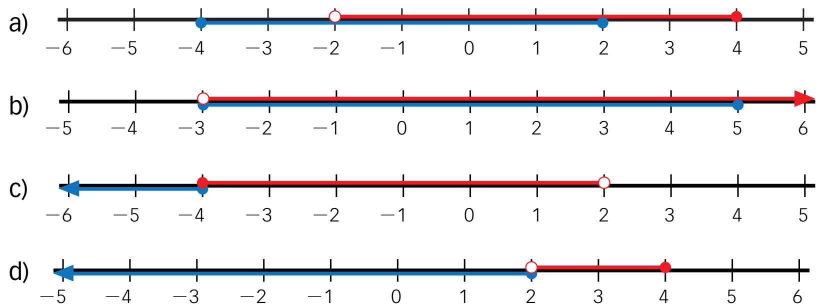
b) $A = [-3, 5]$, $B = (-3, +\infty)$ **d)** $A = (-\infty, 2]$, $B = (2, 4]$

La intersección de intervalos puede ser vacía, un punto o un intervalo.

La unión de intervalos distintos no puede ser un punto y solo es el vacío si todos los intervalos lo son.

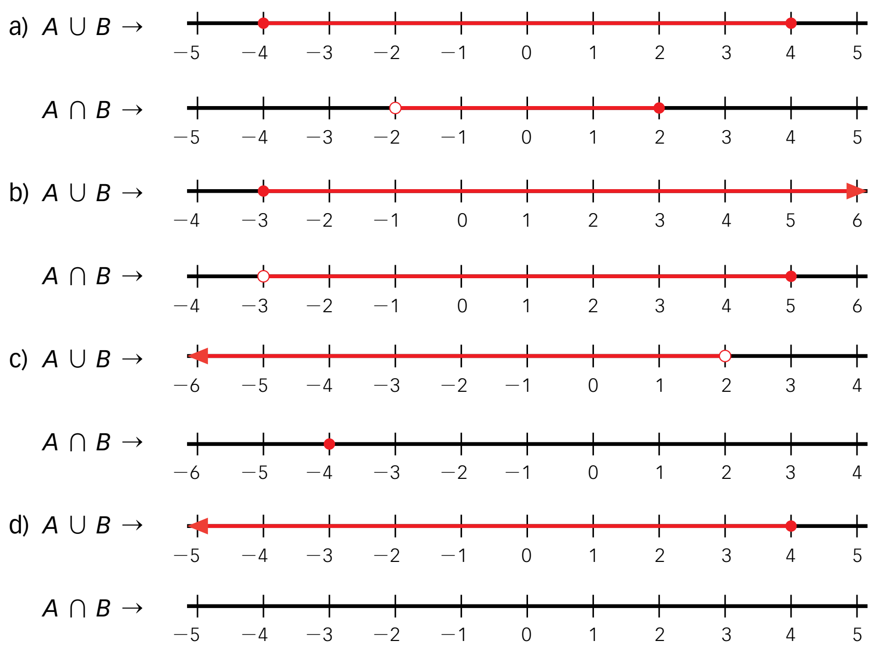
Pasos a seguir

1. Representamos los intervalos sobre la misma recta real.



2. La unión de los intervalos será toda la parte de recta que ocupan los intervalos.

   La intersección está formada tan solo por la parte de recta en la que todos los intervalos coinciden.



3. Expresamos en forma numérica el resultado obtenido gráficamente.

a) $A \cup B = [-4, 4]$ $A \cap B = (-2, 2]$

b) $A \cup B = [-3, +\infty)$ $A \cap B = (-3, 5]$

c) $A \cup B = [-\infty, 2)$ $A \cap B = \{-4\}$

d) $A \cup B = [-\infty, 4]$ $A \cap B = \varnothing$

ACTIVIDADES

21 Escribe dos intervalos cuya unión sea $(2, 6]$.

22 Escribe dos intervalos cuya intersección sea $(-2, 2)$.

23 Halla la unión y la intersección de estos intervalos.

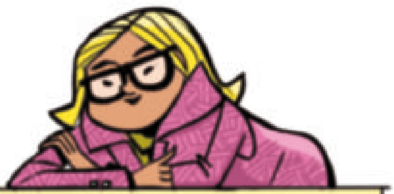
a) $(-5, 1]$ y $[0, 2]$ c) $[2, 4]$ y $(3, 5)$

b) $(-1, 5)$ y $[1, 2]$ d) $(-3, 0]$ y $(-1, 4)$

7 Porcentajes

El **porcentaje** o **tanto por ciento**, ***a***, de una cantidad, C, indica que tomamos a partes de cada 100 en las que dividimos C.

$$a\,\%\text{ de }C = \frac{a}{100}\cdot C$$



El porcentaje se puede expresar con el símbolo %, como proporción o como número decimal.

$$4{,}2\,\% = \frac{4{,}2}{100} = 0{,}042$$

Aumentos y disminuciones porcentuales

Hacemos un **aumento porcentual** cuando aumentamos una cantidad C un a %. Esto equivale a calcular el $(100 + a)$ % de C.

Hacemos una **disminución porcentual** cuando disminuimos una cantidad C un a %. Esto equivale a calcular el $(100 - a)$ % de C.

Llamamos **porcentajes encadenados** a aplicar sucesivos aumentos o disminuciones porcentuales a una misma cantidad.

Si aplicamos los porcentajes de aumento o disminución $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a C, la cantidad resultante es $\left(\frac{t_1}{100}\cdot\frac{t_2}{100}\cdot\ldots\cdot\frac{t_n}{100}\right)\cdot C$.

RESUELVE EL RETO

Si disminuimos porcentualmente una cantidad C en un 10 % ¿qué aumento porcentual habrá que aplicarle a la nueva cantidad para volver a obtener la cantidad inicial?

EJEMPLO

9. Durante la campaña de Navidad, una tienda de electrónica sube los precios un 21 %. En enero, con las rebajas, hace un descuento del 19 % en todos los artículos. Un artículo que costaba 645 € antes de Navidad:

 a) ¿Cuánto cuesta durante la campaña de Navidad?

 b) Un artículo valía 420 € en noviembre. ¿Cuánto costará en enero?

 a) El precio sube un 21 % → Aumento porcentual

 $(100 + 21)\,\%$ de $645 = 121\,\%$ de $645 = \frac{121}{100}\cdot 645 = 780{,}45$ €

 b) Aumenta un 21 % y disminuye un 19 % → Porcentajes encadenados

 Aumento del 21 % = (100 + 21) % del precio

 Disminución del 19 % = (100 − 19) % del precio aumentado

 81 % del 121 % de 420 = $0{,}81 \cdot 1{,}21 \cdot 420 = 411{,}64$ €

ACTIVIDADES

24 **PRACTICA.** Calcula.

a) 5 % de 1 000
b) 38 % de 800
c) 12,3 % de 500
d) 122 % de 300
e) 112 % de 750
f) 0,6 % de 1 430
g) 89 % de 645
h) 43 % de 529

25 **APLICA.** Halla el tanto por ciento de aumento o disminución en cada caso.

a) Al pasar de 10 a 12.
b) Al pasar de 12 a 10.
c) Al pasar de 80 a 60.
d) Al pasar de 60 a 80.

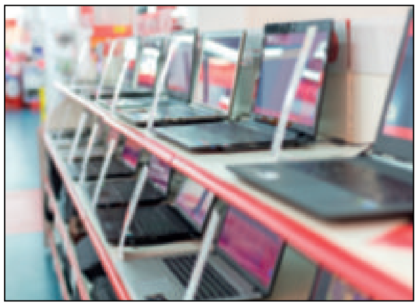
26 **REFLEXIONA.** Calcula el 12 % del 115 % de 1 575.

SABER HACER

Resolver problemas de porcentajes encadenados

Los precios que figuran en los productos de una tienda de informática aparecen sin IVA. Si se compra a través de su web, se aplica una rebaja del 20 % y se añade después el 21 % de IVA.

Rosa ha comprado una impresora láser a través de la web que costaba 352,25 € con IVA. ¿Cuál es el precio de la impresora que figuraba en la tienda?



Pasos a seguir

1. Identificamos los aumentos y disminuciones porcentuales. Los aumentos se suman al 100 % y las disminuciones se restan.

Rebaja del 20 % en web → 100 − 20 = 80 %

Aumento del 21 % de IVA → 100 + 21 = 121 %

2. El precio final del artículo viene dado por

$$\left(\frac{t_1}{100}\cdot\frac{t_2}{100}\cdot\ldots\cdot\frac{t_n}{100}\right)\cdot C$$

donde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los porcentajes de aumento o disminución que aplicamos y C es el precio inicial del artículo.

Precio final → 352,25 €

Porcentajes de aumento y disminución → 121 % y 80 %

Precio inicial → Es la cantidad que buscamos.

$$\text{Precio final} = \left(\frac{t_1}{100}\cdot\frac{t_2}{100}\cdot\ldots\cdot\frac{t_n}{100}\right)\cdot C$$

$$352{,}25 = \left(\frac{80}{100}\cdot\frac{121}{100}\right)\cdot C$$

3. Resolvemos la ecuación resultante.

$$352{,}25 = (0{,}8\cdot 1{,}21)\cdot C$$

$$352{,}25 = 0{,}968\cdot C$$

$$C = \frac{352{,}25}{0{,}968} = 363{,}89$$

El precio que figuraba en la tienda, sin rebaja y sin IVA, era de 363,89 €.

Recuerda que para aplicar la fórmula de los porcentajes encadenados primero hay que calcular los porcentajes de aumento y disminución.

Aumenta a % → $(100 + a)$ %

Disminuye a % → $(100 - a)$ %

ACTIVIDADES

27 La mortalidad en carretera ha descendido un 12,5 %. Si este año han muerto en accidente de tráfico 98 personas, ¿cuántas murieron el año pasado?

28 Después de aumentar una cantidad un 12 %, se calcula su 20 % y se obtiene 112. Calcula la cantidad.

29 Raúl compró un coche que costaba 18 000 €, y le hicieron un descuento del 20 %. A este precio se le sumó un 21 % de IVA. ¿Qué precio pagó Raúl finalmente por el coche?

30 En una comunidad autónoma, el 94 % de los estudiantes presentados supera las pruebas de acceso a la universidad.

a) Si se presentan 26 000 estudiantes, ¿cuántos pasarán las pruebas?

b) El 25 % de los estudiantes decide abandonar la carrera tras el primer año de estudio. ¿Cuántos estudiantes abandonan la carrera el primer año?

c) Durante el segundo año de carrera, el 10 % abandona sus estudios. Suponiendo que el resto finaliza la carrera, ¿cuántos estudiantes la terminan?

8 Interés simple

Si depositamos una cantidad de dinero en un banco durante un determinado tiempo, al retirarlo obtenemos una cantidad distinta a la inicial. A la diferencia entre la cantidad obtenida y la que habíamos depositado se le llama **interés**.

El **interés simple**, I, es el beneficio que origina una cantidad de dinero, llamada capital, C, en un período de tiempo expresado en años, t, a un rédito determinado, r.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Cuando en el lenguaje usual utilizamos expresiones como «un 3 % de interés», en realidad nos estamos refiriendo al rédito.

El rédito es un porcentaje y el interés es un número.

EJEMPLOS

10. Se depositan 10 000 € en un banco durante 5 años a un rédito del 1,8 % anual. ¿Qué beneficio se obtiene al final del período?

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \xrightarrow{C\,=\,10\,000;\ r\,=\,1,8;\ t\,=\,5} I = \frac{10\,000 \cdot 1,8 \cdot 5}{100} = 900 \text{ €}$$

Al cabo de 5 años recibiremos 10 000 + 900 = 10 900 €.

11. Sara deposita 5 000 € en un banco con un rédito del 2,4 % anual. ¿Qué intereses recibirá si lo saca a los 6 meses? ¿Y si lo hace a los 80 días?

$$6 \text{ meses} = \frac{6}{12} \text{ años} = \frac{1}{2} \text{ año} \qquad 80 \text{ días} = \frac{80}{360} \text{ años} = \frac{2}{9} \text{ años}$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{5\,000 \cdot 2,4 \cdot \frac{1}{2}}{100} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{5\,000 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{9}}{100}$$

$$I = 60 \text{ €} \qquad I = 26,67 \text{ €}$$

12. Marina pide un préstamo de 18 000 € para estudiar un máster, y devuelve el dinero en un único pago de 19 800 € al cabo de 5 años. Sabiendo que es un interés simple, ¿cuál es el rédito del préstamo?

$$I = 19\,800 - 18\,000 = 1\,800$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow 1800 = \frac{18\,000 \cdot r \cdot 5}{100} \rightarrow r = \frac{1800 \cdot 100}{18\,000 \cdot 5} = 2\,\%$$

! NO OLVIDES

Para resolver problemas de intereses, se considera que un año tiene 360 días; y un mes, 30 días.

ACTIVIDADES

31 **PRACTICA.** Calcula el beneficio que generan estas cantidades depositadas a un rédito del 3 %.

a) 2 000 € durante 5 años.

b) 30 € durante 7 años.

c) 4 500 € durante 8 meses.

d) 670 € durante 30 meses.

32 **APLICA.** Halla el capital inicial que, depositado a un rédito del 3,6 % durante 5 años, ha generado 490 €.

33 **REFLEXIONA.** Averigua el rédito en un depósito de 20 000 € con interés simple durante 3 años que ha generado 2 400 € de beneficio.

9 Interés compuesto

El **interés compuesto**, I, es el beneficio que se obtiene si, al final de cada período de inversión, el beneficio anterior no se retira, sino que se añade al capital inicial y se reinvierte.

El capital final, C_f, que se obtiene al invertir un capital inicial, C_i, a un rédito, r, durante un tiempo expresado en años, t, con un interés compuesto es:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

El interés compuesto o beneficio obtenido es: $I = C_f - C_i$.

EJEMPLO

13. Mario y Raquel están ahorrando para comprarse un coche. Cada uno invierte su dinero en un fondo distinto durante 3 años.

- Mario coloca 5 000 € a interés compuesto a un rédito del 2 %.
- Raquel deposita su dinero en un fondo a interés compuesto a un rédito del 3 % anual.

a) ¿Qué cantidad recoge Mario al finalizar el tercer año? ¿Cuál es su beneficio?

b) Si Raquel tiene 5 135,82 € al finalizar el tercer año, ¿con qué cantidad abrió su cuenta? ¿Cuál es el beneficio obtenido?

a) $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow[r\,=\,2,\ t\,=\,3]{C_i\,=\,5000} C_f = 5000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 = 5306{,}04$ €

Interés de Mario: $I = C_f - C_i = 5306{,}04 - 5000 = 306{,}04$ €

b) $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow[r\,=\,3,\ t\,=\,3]{C_f\,=\,5\,135{,}82} 5\,135{,}82 = C_i \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3$

$C_i = \dfrac{5\,135{,}82}{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^3} = 4\,700$ €

Interés de Raquel: $I = C_f - C_i = 5\,135{,}82 - 4\,700 = 435{,}82$ €

RESUELVE EL RETO

Paloma deposita 1 000 € en un banco a un rédito del 2 % anual de interés compuesto. ¿Qué cantidad de dinero recibiría si decide sacarlo a los 6 meses? ¿Y si lo hace al año y medio?

ACTIVIDADES

34 **PRACTICA.** Calcula el capital final para las siguientes cantidades iniciales depositadas a interés compuesto con un rédito del 3,4 % anual.

a) 600 € durante 5 años.

b) 3 400 € durante 2 años.

c) 5 400 € durante 3 años.

d) 40 000 € durante 2 años.

35 **APLICA.** Fernando invierte 1 000 € a interés compuesto, durante 5 años con un rédito del 2 %. Esther hace lo mismo pero a interés simple. ¿Cuál es el beneficio de cada uno? ¿Cuál es mayor?

36 **REFLEXIONA.** Una cantidad de dinero se invierte durante 3 años al 5 % anual, con un interés compuesto. Si el beneficio obtenido es de 1 576,25 €, ¿qué cantidad se invierte?

Números racionales

37 Clasifica estos números racionales.

a) 2,333… e) -45
b) 2,345 f) 123, 0
c) 6,00999… g) $8,\widehat{91}$
d) 2,435555… h) $57,4\widehat{32}$

38 Empareja en tu cuaderno los números cuyos valores coinciden y clasifícalos.

$\frac{2}{3}$	7,25
$\frac{29}{4}$	2,4666…
$\frac{37}{15}$	7
$\frac{\sqrt{196}}{2}$	0,666…

39 Escribe, en cada caso, dos números que sean:

a) Naturales. d) Enteros pero no naturales.
b) Periódicos. e) Racionales pero no enteros.
c) Exactos.

40 Ordena de menor a mayor.

5,966 5,665 5,565 5,96 5,69 5,556

41 Ordena de mayor a menor.

$0,4\hat{1}$ $0,\hat{1}$ $0,\widehat{14}$ $0,4\widehat{12}$ $0,14$

42 Representa estos números racionales.

a) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{7}{4}$ g) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{17}{6}$ e) $\frac{7}{10}$ h) $\frac{6}{5}$
c) $\frac{5}{3}$ f) $\frac{48}{16}$ i) $\frac{15}{7}$

43 Representa los siguientes números.

a) $2,\hat{5}$ c) $3,\hat{7}$ e) $1,\hat{9}$
b) $0,1\hat{6}$ d) $8,\hat{3}$ f) $2,9\hat{4}$

44 Escribe tres números racionales comprendidos entre los siguientes.

a) $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{4}$ d) $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$
b) $7,16$ y $7,\widehat{16}$ e) $0,6\hat{3}$ y $0,6\widehat{32}$
c) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ f) $\frac{8}{11}$ y $\frac{9}{10}$

Números irracionales

45 Considera las raíces cuadradas desde el 1 hasta el 20 e indica cuáles de ellas son números racionales y cuáles irracionales.

46 Averigua cuáles de estos números son racionales y cuáles irracionales.

a) 24,232323… d) $2\sqrt[4]{4}$
b) $1+\sqrt{8}$ e) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2$
c) $\sqrt{1+8}$ f) π^2

47 Utiliza la calculadora y ordena de menor a mayor estos números irracionales.

a) $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{65}, 5\sqrt{3}, \frac{\sqrt{265}}{2}$

SABER HACER

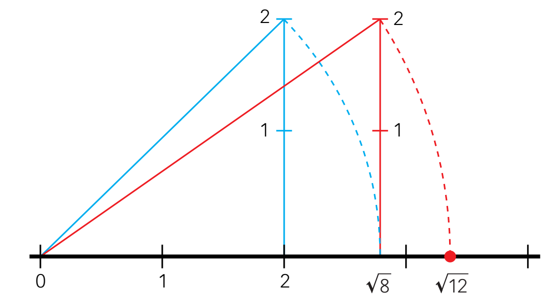
Representar una raíz cuadrada aplicando el teorema de Pitágoras sucesivas veces

48 Representa $\sqrt{12}$.

PRIMERO. Se considera la suma de dos números elevados al cuadrado hasta obtener el radicando.

$$2^2 + 2^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 \qquad \left(\sqrt{8}\right)^2 + 2^2 = \left(\sqrt{12}\right)^2$$

SEGUNDO. Se construyen triángulos rectángulos cuyos catetos tengan como longitudes esos números hallados y se traslada la hipotenusa sobre la recta real tantas veces como sea necesario.



49 Ayúdate de la calculadora para averiguar el valor de estas raíces cuadradas. Después, represéntalas de forma aproximada.

a) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{38}$
b) $\sqrt{6}$ d) $1+\sqrt{37}$

50 Representa estos números irracionales de forma exacta a partir de dos descomposiciones diferentes, y comprueba que el resultado coincide.

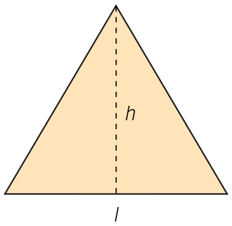
a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt{72}$

51 Calcula y determina qué tipo de número es, en un triángulo equilátero:

a) La altura, si el lado mide 10 cm.

b) El área, si el lado mide 3 cm.

c) La altura y el área si el lado mide $\sqrt{3}$ cm.



52 Razona si estas afirmaciones son ciertas.

a) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

b) La raíz cuadrada de una fracción es un número irracional.

53 Escribe un número irracional entre estos pares de racionales.

a) 1 y 2
b) $1,\widehat{5}$ y 1,6
c) 1,2 y 1,6
d) $1,\widehat{5}$ y $1,5\widehat{3}$

Números reales

54 Clasifica los siguientes números reales en naturales, enteros, racionales o irracionales. Di de qué tipo es su expresión decimal.

a) 25,37
b) $-\dfrac{6}{17}$
c) $\dfrac{2}{5}$
d) $-\sqrt{12}$
e) π
f) $\dfrac{7}{90}$
g) $\sqrt{64}$
h) -5

55 Clasifica estos números según los conjuntos numéricos a los que pertenecen.

a) 2 054,3
b) $-27,3\widehat{5}$
c) $\sqrt{256}$
d) $\dfrac{\pi}{5}$
e) -47
f) $\sqrt{31}$

56 Indica todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen estos números.

a) $\sqrt{17}+8$
b) $\sqrt{17+8}$
c) $8-\sqrt{17}$
d) $\sqrt{17-8}$
e) $4-\sqrt{20}$
f) $20-\sqrt{4}$
g) $\sqrt{20-4}$
h) $4+\sqrt{20}$

57 Clasifica estos números reales. Exprésalos en forma decimal y ordénalos de menor a mayor.

a) $5; \dfrac{7}{3}; 2\sqrt{5}; \dfrac{7}{9}; \dfrac{8}{5}$

b) $\sqrt{8}; 6-\sqrt{3}; \dfrac{35}{90}; \dfrac{\sqrt{12}}{2}$

58 Ordena de mayor a menor.

a) $\sqrt{6}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{8}$

b) $5-\sqrt{12}, 3\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{16}}{3}$

59 Si *a* es un número racional, indica qué tipo de número es cada uno de los siguientes.

a) $2a$
b) $\dfrac{a}{2}$
c) $\sqrt{2}a$
d) πa

60 Si *a* es un número irracional, indica qué tipo de número es cada uno de los siguientes.

a) $2a$
b) $\dfrac{a}{2}$
c) πa
d) $\dfrac{1}{a}$

61 Calcula la diagonal del cubo de arista unidad e indica qué tipo de número es.

62 Razona si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Hay números enteros que no son racionales.

b) Existen números irracionales que no son números reales.

c) Un número real es racional o irracional.

d) Cualquier número decimal es un número real.

63 Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones. Razona tu respuesta.

a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.

b) Todos los números reales son racionales.

c) Un número irracional es real.

d) Existen números enteros que son irracionales.

e) Hay números reales que son racionales.

f) Cualquier número decimal es racional.

g) Un número racional es entero.

h) Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales.

i) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.

j) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.

64 Razona si es verdadero o falso.

a) Si el lado de un cuadrado es un número racional, la diagonal es irracional.

b) Si el lado de un cuadrado es un número irracional, el área es racional.

c) Si la diagonal de un cuadrado es racional, el área es racional.

65 Opera e indica qué tipo de número real resulta.

a) $\sqrt{2,\overset{\frown}{7}}$

b) $4,0\overset{\frown}{9} - 1,3\overset{\frown}{9}$

c) $5,4\overset{\frown}{3} \cdot 1,\overset{\frown}{2}$

d) $\sqrt{\dfrac{1,\overset{\frown}{3}}{3}}$

Aproximación de números reales

66 Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto a las diezmilésimas.

67 Redondea a las diezmilésimas $\sqrt{10}$. Luego calcula sus aproximaciones por exceso y por defecto, y comenta lo que observas.

68 ¿Qué aparecerá en la pantalla de la calculadora científica al introducir cada uno de estos números, si previamente pulsamos la secuencia de teclas necesaria para fijar 4 decimales? ¿Y si fijamos 5 decimales?

a) 11,87967575

b) 0,666663

c) 8,987656

d) 25,6543678

e) 18,010109

f) 15,908009

69 Escribe un número con estas características.

a) Decimal periódico puro cuyo redondeo a las milésimas es 5,677.

b) Decimal periódico mixto con truncamiento a las centésimas 0,97.

c) Irracional cuyo redondeo a las diezmilésimas sea 0,0023.

70 ¿Existe algún caso en el que las aproximaciones por exceso y por defecto coincidan? Y si consideramos el redondeo, ¿puede coincidir con la aproximación por exceso y por defecto?

Errores de aproximación

71 Realiza estas operaciones y redondea los resultados a las décimas. Después, redondea cada número a las décimas y resuelve la operación. ¿Por qué procedimiento se comete menor error?

a) $3,253 + 8,45$

b) $53,32 - 18,93$

c) $13,5 \cdot 2,7$

d) $40,92 : 5,3$

72 Obtén el error absoluto y relativo al considerar:

a) 3,5 m como la longitud de un listón que mide realmente 3,59 m.

b) 60 m como la distancia entre dos postes situados a 59,91 m.

73 Obtén el error absoluto y relativo cometidos al redondear y truncar los números que aparecen a continuación:

a) 10,4798 a las milésimas.

b) $\sqrt{12}$ a las diezmilésimas.

c) $\dfrac{2}{3}$ a las décimas.

d) 3,125 a las milésimas.

74 Halla el error absoluto y el error relativo cometidos.

a) Al aproximar 3,78496 por 3,7.

b) Al aproximar $\sqrt{7}$ por 2,65.

75 Aproxima el número 8,9761 de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.

76 La cantidad de antibiótico en una cápsula es de 1,5 g $\pm$ 0,2 %.

a) ¿Qué significa esta afirmación?

b) ¿Entre qué valores oscila la cantidad de antibiótico de cada cápsula?

77 Escribe dos aproximaciones diferentes de 1,45 que tengan el mismo error relativo.

78 ¿Se puede escribir $\pi = \dfrac{355}{113}$? Justifica la respuesta y calcula el orden del error cometido.

79 Se sabe que dos aproximaciones tienen el mismo error relativo. Decide cómo será el error absoluto sabiendo que los valores reales son iguales en los dos casos.

¿Se puede asegurar que los errores absolutos serán diferentes si los valores reales no coinciden?

Intervalos

80 Expresa mediante intervalos estas situaciones.

a) La capacidad de los envases es menor que 5 ℓ.

b) La altura de las cortinas debe ser menor o igual que 2,8 m.

c) El descuento se aplica a compras superiores a 40 €.

d) Los precios van desde los 30 € hasta los 60 €.

e) La entrada es gratuita para menores de 12 años y para mayores de 65 años.

f) La temperatura en el día de ayer osciló entre −2 °C y 6 °C.

81 Describe y representa los siguientes intervalos en la recta real.

a) $(0, 7)$
b) $[3, 7)$
c) $[-2, 4)$
d) $[-5, -3]$
e) $(-4, -2)$
f) $[-7, -3)$
g) $[5, 6)$
h) $[4, 6]$

82 Indica de qué intervalo se trata en cada caso.

a) $\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x < 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R}: -1 \ge x > -5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R}: -3 < x\}$
d) $\{x \in \mathbb{R}: 3 > x\}$
e) $\{x \in \mathbb{R}: -1 \le x \le 0\}$
f) $\{x \in \mathbb{R}: 0 > x > -5\}$
g) $\{x \in \mathbb{R}: x \le -4\}$
h) $\{x \in \mathbb{R}: x \ge 5\}$

83 Escribe en qué intervalo se encuentra x.

a) x es mayor que 3.

b) x es menor que 5 y mayor que 1.

c) x es menor o igual que −2.

d) x es mayor que −4.

84 Indica si es verdadero o falso.

a) $1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$
b) $1 + \sqrt{8} \in (1, 3]$
c) $\frac{-5}{4} \in [-2, 1)$
d) $\frac{4}{9} \in \left(-1, \frac{1}{2}\right]$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1, 1)$
f) $\frac{-3}{2} \in \left[\frac{-5}{4}, 0\right]$

85 Siendo $A = (-\infty, 3]$, $B = (-2, 0]$ y $C = [2, 5)$, calcula:

a) $A \cup B$
b) $A \cup B \cup C$
c) $A \cap C$
d) $A \cap B \cap C$

86 Indica si lo siguiente es verdadero o falso.

a) $(-2, 3) \cap [-1, 4) = [-1, 4)$

b) $(-2, 3) \cup (-1, 4) = [-2, 3]$

c) $[-2, 3] \cap (-1, 4] = [-1, 3]$

d) $[-2, 3) \cup (-1, 4) = [-2, 4)$

87 Completa en tu cuaderno con paréntesis, corchetes o un número según corresponda.

a) $\square\, 0, 2) \cap [-2, 1 \,\square = [0, 1)$

b) $(1, 2 \,\square \cup \square -2, 1 \,\square = [-2, 2]$

c) $\square -3, -1) \cup \square -1, 4) = (-3, 4 \,\square$

d) $[-4, 1 \,\square \cap \square -2, 3) = [-2, \square)$

88 Halla la unión y la intersección de los siguientes intervalos.

a) $A = [1, 5)$ $B = [0, 3)$
b) $A = (-2, 4]$ $B = (-1, 2]$
c) $A = (-5, -3]$ $B = [-3, 0)$
d) $A = (-7, -2)$ $B = [-7, -6)$
e) $A = (-1, 0)$ $B = (0, 1)$
f) $A = (-4, 2]$ $B = (2, 3]$
g) $A = (-\infty, 2]$ $B = (3, 4)$
h) $A = (-5, -1)$ $B = (-1, +\infty)$
i) $A = (-\infty, -3]$ $B = (0, +\infty)$
j) $A = (-\infty, 0]$ $B = [-1, +\infty)$

89 Si dos números reales, x e y, pertenecen a los intervalos $(-1, 3)$ y $[0, 2]$, respectivamente, ¿a qué intervalo pertenece el resultado de las siguientes operaciones?

a) $x + y$
b) $x - y$
c) $y - x$
d) $x \cdot y$

90 Expresa como intervalo estos conjuntos numéricos.

a) $|x| < 3$
b) $|x| < -3$
c) $|x| \ge -3$

Porcentajes

91 Halla los siguientes porcentajes.

a) El 16 % de 220
b) El 8,5 % de 48
c) El 42,6 % de 1 245
d) El 13 % de 349
e) El 0,54 % de 78
f) El 98 % de 980

92 Calcula.

a) 20 % del 6 % de 400
b) 8,2 % del 2,8 % de 678
c) 46 % del 17 % de 3 400
d) 35 % del 25 % de 6 700

93 Indica qué tanto por ciento representa 25 con respecto a cada una de estas cantidades.

a) 100
b) 1 000
c) 200
d) 300
e) 500
f) 250
g) 750
h) 150

94 Indica qué tanto por ciento representa cada una de estas cantidades.

a) 6 de 24
b) 24 de 30
c) 3 de 5
d) 60 de 80
e) 0,03 de 1
f) 20 de 50

95 En una encuesta en la que las respuestas son «SÍ», «NO» y «NS/NC» han participado 860 personas. Sabiendo que 301 han contestado «SÍ» y 172 han respondido «NO», ¿qué porcentaje corresponde a «NS/NC»?

96 El 56 % de una cantidad es 2 464, ¿cuál es la cantidad?

97 ¿Qué porcentaje hay en estas expresiones?

a) Tres de cada veinte personas se quedan dormidas en los viajes.

b) Ocho de cada doce establecimientos cierran a las 20:00 h.

c) Nueve de cada catorce coches tienen más de 10 años.

d) Uno de cada seis turistas viaja solo.

e) Siete de cada cuarenta pacientes no se recuperan con el primer tratamiento.

f) Dos de cada siete pasteles llevan chocolate.

98 Sabiendo que el 34 % de una cantidad es 646, calcula, sin averiguar la cantidad inicial, su 17 % y su 68 %.

99 Se sabe que el 42 % de la mitad de una cantidad es 90. Averigua la cantidad.

100 De una cierta cantidad se sabe que la mitad de su 3 % es 15. Calcula la cantidad.

101 ¿Cuál es la cantidad final que se obtiene en cada uno de los procesos que se detallan a continuación partiendo de una cantidad inicial de 1 200?

a) Se experimenta un aumento del 20,5 %.

b) Se experimenta una disminución del 35 %.

c) Se experimenta un aumento del 75 %.

d) Se experimenta una disminución del 15,75 %.

102 ¿Cuál es la cantidad inicial de la que se ha partido en cada uno de los procesos que se detallan a continuación suponiendo que la cantidad final es 240?

a) Se ha experimentado un aumento del 32 %.

b) Se ha experimentado una disminución del 2,4 %.

c) Se ha experimentado un aumento del 16,8 %.

d) Se ha experimentado una disminución del 48 %.

103 ¿Cuánto dinero hay que aumentar el precio de estos artículos para que hayan experimentado una subida del 24 %?

a) Pan: 0,60 €/unidad

b) Leche: 1,10 €/ℓ

c) Carne: 10,45 €/kg

d) Huevos: 1,42 €/docena

e) Manzanas: 2,30 €/kg

104 Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El 25 % de 200 es lo mismo que el 50 % de 100.

b) El 40 % de 48 coincide con el 20 % de 24.

c) El 20 % de 50 es lo mismo que el 50 % de 20.

d) El 20 % de 70 junto con el 30 % de 70 es el 50 % de 140.

105 Ordena de menor a mayor los aumentos que se indican.

- Subida de 320 a 400.
- Subida de 1 200 a 1 500.
- Subida de 45 a 55.
- Subida de 20 a 28.

106 La disminución del número de días en lista de espera ha sido de un 20 %. Si actualmente hay una espera de 24 días, ¿en cuántos días ha disminuido?

107 Un minorista compra un lote de artículos a un precio unitario de 34 €. Si quiere obtener una ganancia de un 36 %, ¿a cuánto debe vender cada artículo?

108 Un comerciante sube un 30 % el precio de sus artículos cuando los pone a la venta y luego hace un 15 % de descuento. ¿Qué precio tendrá un artículo si le costó 45 €? ¿A qué porcentaje del precio inicial corresponde?

109 ¿Cuánto valía un producto que después de dos descuentos, uno del 25 % y otro del 30 %, vale 125 €?

110 ¿Cuál era el precio de un abrigo que está etiquetado en 120 €, sabiendo que se le ha añadido un 21 % de IVA y que se obtiene una ganancia del 18 %?

111 ¿Aplicar a una cantidad dos aumentos del 25 %, uno tras otro, es lo mismo que aplicar un aumento del 25 % al doble de la cantidad?

112 ¿Aplicar consecutivamente dos aumentos del 30 % es lo mismo que aplicar un aumento del 60 %?

113 Si a una cantidad se le aplica un 10 % de aumento, ¿qué porcentaje de disminución hay que aplicar a la cantidad final para obtener la cantidad de partida?

114 Se aumenta un 16 % al 40 % de una cantidad. ¿Cuál es la relación entre la cantidad y el resultado de esas operaciones?

Interés simple

115 Calcula el interés que se obtiene al depositar 20 000 € en una entidad bancaria durante 4 años, al 2,75 % de rédito anual.

116 Calcula el capital final que se obtiene después de 2 años y medio con estas cantidades iniciales depositadas a interés simple a un rédito del 1,8 %.

a) 800 € b) 1 200 € c) 24 000 € d) 5 750 €

117 Calcula el interés que obtendremos si invertimos un capital de 100 € a un rédito del 3,5 % durante 2 años y medio.

118 Se piden prestados 10 000 € y se devuelven 11 760 € en un pago único con intereses al cabo de 2 años. Sabiendo que es un interés simple, halla el rédito de dicho préstamo.

119 Laura pide un préstamo de 4 000 € y devuelve 5 080 € en un pago único con intereses al cabo de 3 años. Sabiendo que es un interés simple, calcula el rédito del préstamo.

120 ¿Cuánto tiempo hay que mantener 3 000 € en un depósito a interés simple con un rédito del 3 % para obtener unos intereses de 225 €?

Interés compuesto

121 Calcula el capital final después del tiempo indicado para las siguientes cantidades iniciales depositadas a interés compuesto con un rédito del 1,25 % con un período de capitalización anual.

a) 750 € durante 3 años.
b) 53 000 € durante 2 años.
c) 9 400 € durante 5 años.
d) 62 000 € durante 4 años.

122 Calcula el interés obtenido al invertir 500 € a interés compuesto durante 5 años con un rédito del 3 %.

123 Calcula el interés obtenido al invertir 2 000 €, a interés compuesto durante 10 años, con un rédito del 2,75 %.

124 Averigua el capital que hemos invertido a interés compuesto durante 2 años al 5 % para que produzca un capital final de 200 €.

SABER HACER

Calcular la cantidad inicial sabiendo los intereses producidos

125 ¿Qué cantidad de dinero hay que invertir al 5 % a interés compuesto durante 2 años para obtener un beneficio de 102,50 €?

PRIMERO. Se expresa la cantidad final en función de la inicial.

$$I = C_f - C_i \rightarrow C_f = C_i + I = C_i + 102{,}50$$

SEGUNDO. Se sustituyen los datos en la fórmula.

$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$ y se despeja C_i.

$$C_i + 102{,}50 = C_i\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 102{,}50 = C_i\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$$C_i = \frac{102{,}50}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 - 1\right]} = 1000 \text{ € hay que invertir.}$$

126 Una cantidad de dinero invertida, a interés compuesto durante 5 años al 4 %, produce unos intereses de 244 €. ¿Qué cantidad hemos invertido?

127 ¿Cuántos años hay que invertir 5 000 € a interés compuesto al 10 % para que se conviertan en 5 500 €? ¿Y para que se conviertan en 6 050 €?

DEBES SABER HACER

Números reales

1 Representa.

a) $\frac{7}{3}$ b) 1,25 c) $\sqrt{65}$

2 Indica a qué conjunto numérico pertenecen.

41 $\sqrt{17}$ $\frac{8}{49}$ -87

Aproximación de números reales

3 Aproxima $\frac{17}{3}$ a las décimas mediante redondeo y truncamiento. ¿Qué error relativo y absoluto se comete en cada caso?

Intervalos

4 Representa los intervalos $(-5, 3]$ y $(-1, +\infty)$, y halla su unión y su intersección.

Porcentajes. Interés simple y compuesto

5 Ángel tiene un bono descuento del 15 % en una tienda donde los precios no tienen incluido el 21 % de IVA. Si compra un artículo con un precio de 120 €, ¿cuánto tendrá que pagar?

6 Calcula el capital final que se obtiene después de 5 años si se invierten 1 000 € al 7 % de rédito.

a) A interés simple.
b) A interés compuesto.

COMPETENCIA MATEMÁTICA

En la vida cotidiana

128 Hace poco más de dos años, abriste tu primera cuenta bancaria. Estuviste consultando las distintas ofertas que los bancos te ofrecían y decidiste que esta era la mejor.

Abriste la cuenta con el dinero que en esos momentos tenías, 480 €, y según te explicaron, cuando pasara un año te ingresarían en esa cuenta los intereses, el 1,90 % de los 480 € que habías ingresado.

Aunque ya te advirtieron de que tendrías que pagar una cuota todos los meses por la tarjeta de crédito que te daban.

Desde entonces han pasado ya dos años, lo que significa que al finalizar el segundo año te han vuelto a ingresar el 1,90 % de intereses sobre el dinero que tenías al comenzar el segundo año, es decir, sobre los 480 € que ingresaste inicialmente más los intereses que te dieron el primer año y menos el dinero que te habían cobrado durante el primer año por la tarjeta de crédito.

Ahora quieres comprar una tableta que vale 510 €.

a) ¿Tendrás dinero suficiente en esa cuenta para comprarla?

b) Has consultado el contrato que te dieron cuando abriste la cuenta y, según dice, si entras en saldo negativo, es decir, si te gastas más dinero del que tienes, al finalizar el mes les tienes que abonar:

- El saldo negativo completo.
- Más un suplemento del 4,58% sobre la cantidad negativa de tu cuenta.
- Más 39 € por la notificación de que te encuentras en números rojos.

Si decides comprar la tableta y no tienes dinero suficiente en la cuenta, al finalizar el mes, ¿cuánto dinero tendrás que pagar al banco?

Formas de pensar. Razonamiento matemático

129 Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional.

130 Si $\frac{a}{b}$ es irreducible, razona si $\frac{a+b}{a \cdot b}$ y $\frac{a-b}{a \cdot b}$ también lo son. Compruébalo con números y, después, intenta extraer una regla general.

131 Escribe aproximaciones decimales del número 6,325612 con las siguientes cotas de error absoluto.

a) 0,001 b) 0,0005 c) 0,01 d) 0,5

132 Comprueba las siguientes igualdades.

a) $2,\widehat{3} = 2,3\widehat{3}$ b $0,\widehat{325} = 0,32\widehat{532}$ c) $1,\widehat{9} = 2$

¿Por qué opinas que se produce este resultado? ¿Crees que es correcto?

133 Justifica de qué orden tendríamos que tomar el redondeo de un número irracional para que la cota de error absoluto fuera menor que una millonésima.

PROYECTO FINAL. **Trabajo cooperativo**

OBJETIVO: Organizar actividades para costear el viaje de fin de curso

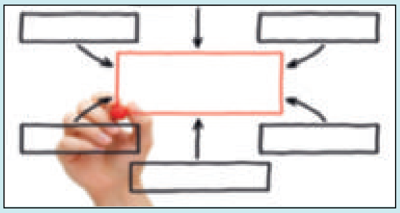
Una vez formados los grupos, seguid este proceso.

1.ª Fase.

- Haced un listado con todas las actividades, acciones, actos, etc., que se os ocurran para obtener dinero para financiar el viaje.
- Recopilad información sobre las acciones que se realizaron en cursos anteriores y sobre actividades que se hayan desarrollado en otros centros.

2.ª Fase.

- Realizad un estudio de la viabilidad de cada una de las propuestas. Estimad los recursos que necesitaríais, si es precisa alguna inversión inicial, si disponéis de los espacios necesarios para desarrollar la actividad…
- Desechad las propuestas que penséis que no son realizables.



3.ª Fase.

- Realizad un informe con cada una de las propuestas que consideráis viables. En ese informe deberéis incluir las dificultades que entrañaría realizar la actividad: estimación de gastos, disponibilidad de espacios para realizarla, adquisición de los recursos necesarios para su desarrollo… y cuantificar el beneficio económico que os puede reportar.

Pruebas PISA

Pago por superficie

134 Los habitantes de un edificio de pisos deciden comprar el edificio. Pondrán el dinero entre todos de modo que cada uno pague una cantidad proporcional al tamaño de su piso. Por ejemplo, una persona que viva en un piso que mida la quinta parte de la superficie total de todos los pisos, deberá pagar la quinta parte del precio total del edificio.

a) Justifica si las siguientes afirmaciones son correctas.

- La persona que vive en el piso más grande pagará más dinero por cada metro cuadrado de su piso que la persona que vive en el piso más pequeño.
- Si se conocen las superficies de dos pisos y el precio de uno de ellos, entonces se puede calcular el precio del otro.
- Si se conoce el precio del edificio y cuánto pagará cada propietario, entonces se puede calcular la superficie total de todos los pisos.
- Si el precio total del edificio se redujera en un 10 %, cada uno de los propietarios pagaría un 10 % menos.

b) Hay tres pisos en el edificio. El mayor de ellos, el piso 1, tiene una superficie total de 95 m^2. Los pisos 2 y 3 tienen superficies de 85 m^2 y 70 m^2, respectivamente.

El precio de venta del edificio es de 300 000 zeds.

¿Cuánto deberá pagar el propietario del piso 2?

(Prueba PISA 2008)

CLAVES PARA EMPEZAR

Calcular potencias de exponente positivo

Exponente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Base

EJEMPLO

- Si la base de una potencia es un número entero positivo, la potencia es positiva.

  $5^3 = 125$ $\qquad$ $10^4 = 10\,000$

- Si la base es un número entero negativo, la potencia es positiva si el exponente es par, y negativa, si es impar.

  $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$ $\qquad$ $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

- Para elevar una fracción a una potencia se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

  $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$ $\qquad$ $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = \frac{-8}{125} = -\frac{8}{125}$

ACTIVIDADES

1 Calcula las siguientes potencias.

a) 3^4 $\quad$ c) $(-2)^6$ $\quad$ e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$ $\quad$ g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3$

b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5$ $\quad$ d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$ $\quad$ f) $(-5)^7$ $\quad$ h) 2^5

Operar con potencias de exponente positivo

Producto de potencias de la misma base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$
Cociente de potencias de la misma base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \cdot 13)^2 = 4^2 \cdot 13^2$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4}$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(8^3)^6 = 8^{3 \cdot 6} = 8^{18}$
Casos particulares	$a^0 = 1$ $\quad$ $a^1 = a (a \neq 0)$	$6^0 = 1$ $\quad$ $6^1 = 6$

ACTIVIDADES

2 Simplifica y expresa el resultado como potencia.

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^4}{6^2 \cdot 3 \cdot 5^4}$ $\qquad$ b) $2^7 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2^3}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$

132

Se crea en China el primer antecesor del sismógrafo.