PROJECTE SABER FER

Física

SÈRIE **INVESTIGA**

BATXILLERAT 2

El llibre *Física*, per a segon curs de Batxillerat, és una obra col·lectiva concebuda, dissenyada i creada al Departament d'Edicions Educatives de Grup Promotor / Santillana, sota la direcció de **Teresa Grence Ruiz** i **Pere Macià Arqué**.

En la realització hi ha participat l'equip següent:

Text:
Maria del Carmen Vidal Fernández
David Sánchez Gómez
Interlínia, SL (Sígfrid Maynegre)

Perfils professionals:
José M.ª Prada Carrillo

EDICIÓ
Laura Muñoz Ceballos
Interlínia, SL (Gerard Malet)

EDITOR EXECUTIU
David Sánchez Gómez

DIRECCIÓ DEL PROJECTE
Antonio Brandi Fernández

Les activitats d'aquest llibre no han de fer-se en cap cas al llibre. Les taules, esquemes i altres recursos que s'inclouen són models perquè l'alumne els traslladi a la seva llibreta.

SANTILLANA GRUP PROMOTOR

Esquema de les unitats

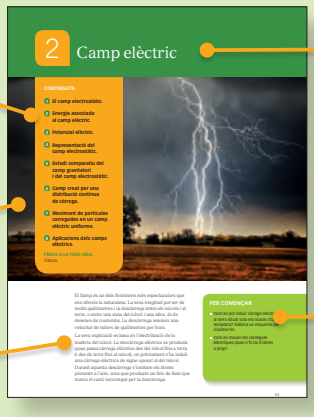
Pàgina d'introducció a la unitat

Al principi de cada unitat s'il·lustra el tema per reflexionar al voltant dels continguts i centrar l'atenció.

Continguts de la unitat. Un esquema de l'exposició dels continguts i les tècniques o els procediments.

Il·lustració. Una fotografia que apropa als continguts de la unitat.

Text. Una reflexió introductòria sobre la importància dels continguts.



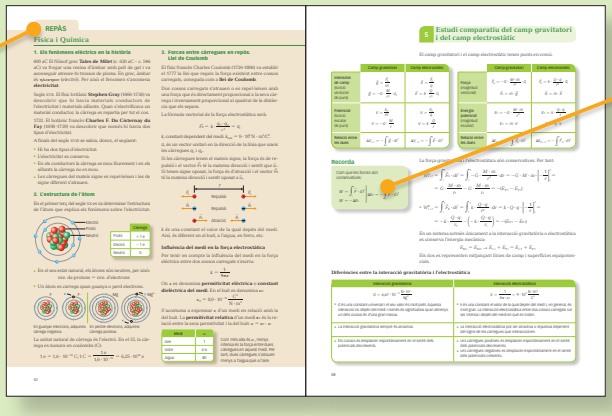
Títol de la unitat.

Per començar. Algunes preguntes que obren la reflexió, o el debat, en relació amb els continguts que s'estudiaran.

Pàgines de desenvolupament dels continguts

L'estructura del desenvolupament dels continguts està composta per diversos elements.

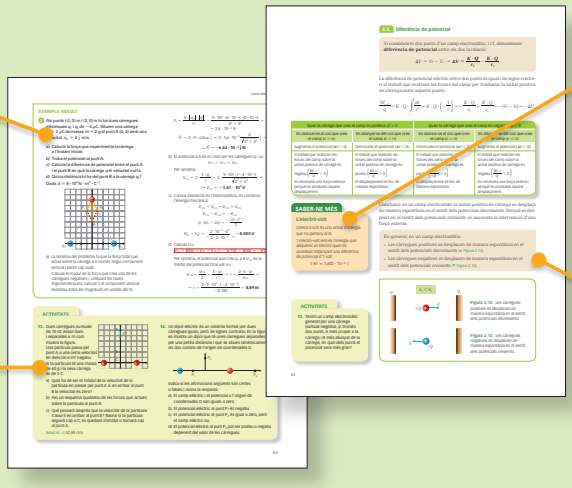
Repàs. Abans de tractar els continguts de cada unitat es recorden continguts de Matemàtiques o Física i Química necessaris abans d'encetar la unitat.



Recorda. Aquí s'inclouen continguts de cursos anteriors o estudiats en unitats precedents.

Exemples resolts. Al llarg de tota la unitat s'inclouen nombrosos exemples resolts, numèrics o no, que ajuden a posar en pràctica els conceptes exposats.

Activitats al peu. Recull activitats que acompanyen el treball dels continguts a prop d'allà on s'exposen.



Saber-ne més. S'inclouen continguts relacionats amb la matèria, però que no són essencials per al desenvolupament de la unitat.

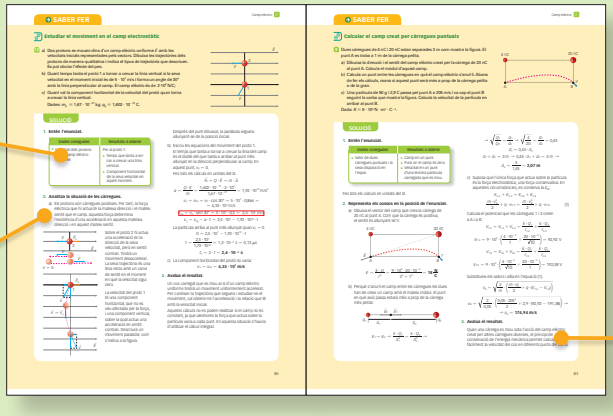
Destacats. Els continguts i definicions essencials apareixen destacats amb un fons de color.

Saber fer

Mostra procediments que han de dominar-se per mostrar que els continguts de la unitat han quedat assimilats.

Comprèn l'enunciat. Amb un esquema senzill s'invita a la lectura comprensiva de l'activitat proposada.

Desenvolupament. Pas a pas es van donant les indicacions de com desenvolupar l'activitat proposada.



Avalua el resultat. En cada cas s'ha de valorar el resultat aconseguit, dins del context de l'activitat.

Activitats finals

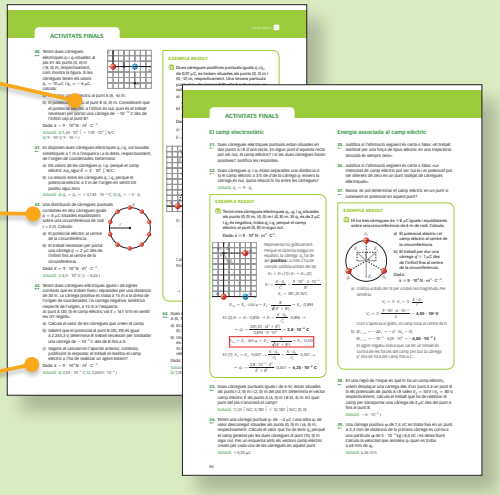
Col·lecció d'activitats que permeten consolidar l'aprenentatge.

Apartats. Les activitats estan classificades segons els continguts de la unitat.

Nivell de dificultat. La dificultat de cada activitat es mostra segons el codi:

●●● Fàcil ●●● Mitjà ●●● Difícil

Solució. Hi ha una línia amb el resultat per a les activitats amb solució numèrica. Així, es facilita el treball personal de l'alumnat.



Resum

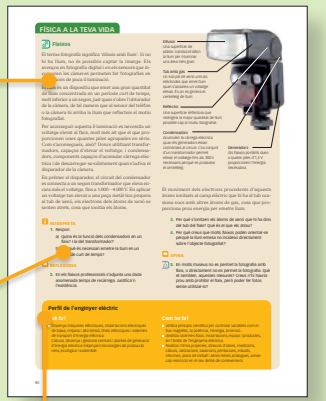
Un repàs dels continguts més importants de la unitat.

Física a la teva vida

Cada unitat es tanca amb material complementari.

Al final de cada unitat, en una pàgina s'exposa algun aspecte, més o menys quotidià, en relació amb el contingut de la unitat.

Les activitats del peu de pàgina conviden a la lectura comprensiva, desperten la reflexió i l'opinió i ajuden a posar en pràctica les TIC.



Al final de cada unitat s'assenyalen possibles sortides professionals relacionades.

Competències

Al llarg del llibre, diferents icones assenyalen i identifiquen la competència concreta que es treballa en cada activitat o apartat.

- Competència en el coneixement i la interacció amb el món
- Competència comunicativa
- Competència personal i interpersonal
- Competència digital
- Competència artística i cultural
- Competència en gestió i tractament de la informació
- Competència en recerca

Índex

1. Camp gravitatori **7**
1. El concepte de camp 10
2. Camp gravitatori creat per masses puntuals 11
3. Representació del camp gravitatori 23
4. El moviment dels cossos celestes 25
5. Camp gravitatori dels cossos celestes 33
6. Moviment de planetes i satèl·lits 38
Saber fer 45
Activitats finals 47
Física a la teva vida 50

2. Camp elèctric **51**
1. El camp electrostàtic 54
2. Energia associada al camp elèctric 58
3. Potencial elèctric 61
4. Representació del camp electrostàtic 66
5. Estudi comparatiu del camp gravitatori i del camp electrostàtic 68
6. Camp creat per una distribució contínua de càrrega 69
7. Moviment de partícules carregades en un camp elèctric uniforme 77
Saber fer 83
Activitats finals 86
Física a la teva vida 90

3. Camp magnètic **91**
1. El camp magnètic 93
2. Llei de Lorentz 94
3. Moviment de partícules carregades a l'interior de camps magnètics 96
4. Efecte d'un camp magnètic sobre un fil de corrent 104
5. Camp magnètic creat per càrregues i corrents 106
6. Camp magnètic creat per agrupacions de corrents 113
7. Comparació entre el camp magnètic i el camp electrostàtic 116
Saber fer 117
Activitats finals 119
Física a la teva vida 122

4. Inducció electromagnètica **123**
1. La inducció electromagnètica 125
2. Lleis de la inducció electromagnètica 127
3. Aplicacions de la inducció electromagnètica 136
Saber fer 145
Activitats finals 147
Física a la teva vida 150

5. Ones. El so **151**
1. El moviment ondulatori 154
2. Equació matemàtica de l'ona harmònica 157
3. La propagació de l'energia en el moviment ondulatori 161
4. Com es propaguen les ones. Principi de Huygens 166
5. Propietats de les ones 167
6. El so, un moviment ondulatori 175
Saber fer 187
Activitats finals 189
Física a la teva vida 192

6. Ones electromagnètiques **193**
1. La naturalesa de la llum: un problema històric 195
2. La mesura de la velocitat de la llum 199
3. La llum és una ona electromagnètica 201
4. Fenòmens ondulatoris de la llum 205
Saber fer 214
Activitats finals 217
Física a la teva vida 220

7. Relativitat **221**
1. La necessitat d'una nova física 224
2. La teoria de la relativitat especial 226
3. L'energia relativista 234
Saber fer 238
Activitats finals 240
Física a la teva vida 242

8. La física quàntica **243**
1. Els fets que no explica la física clàssica 246
2. El model atòmic de Bohr 256
3. La mecànica quàntica 260
4. Aplicacions de la física quàntica 266
Saber fer 267
Activitats finals 269
Física a la teva vida 272

9. Física nuclear **273**
1. El nucli atòmic 276
2. La radioactivitat. Desintegracions radioactives 278
3. Cinètica de la desintegració radioactiva 282
4. La radioactivitat artificial 284
5. Reaccions nuclears de fissió i fusió 285
6. Radiacions ionitzants 289
7. Aplicacions dels processos nuclears 290
Saber fer 295
Activitats finals 297
Física a la teva vida 300

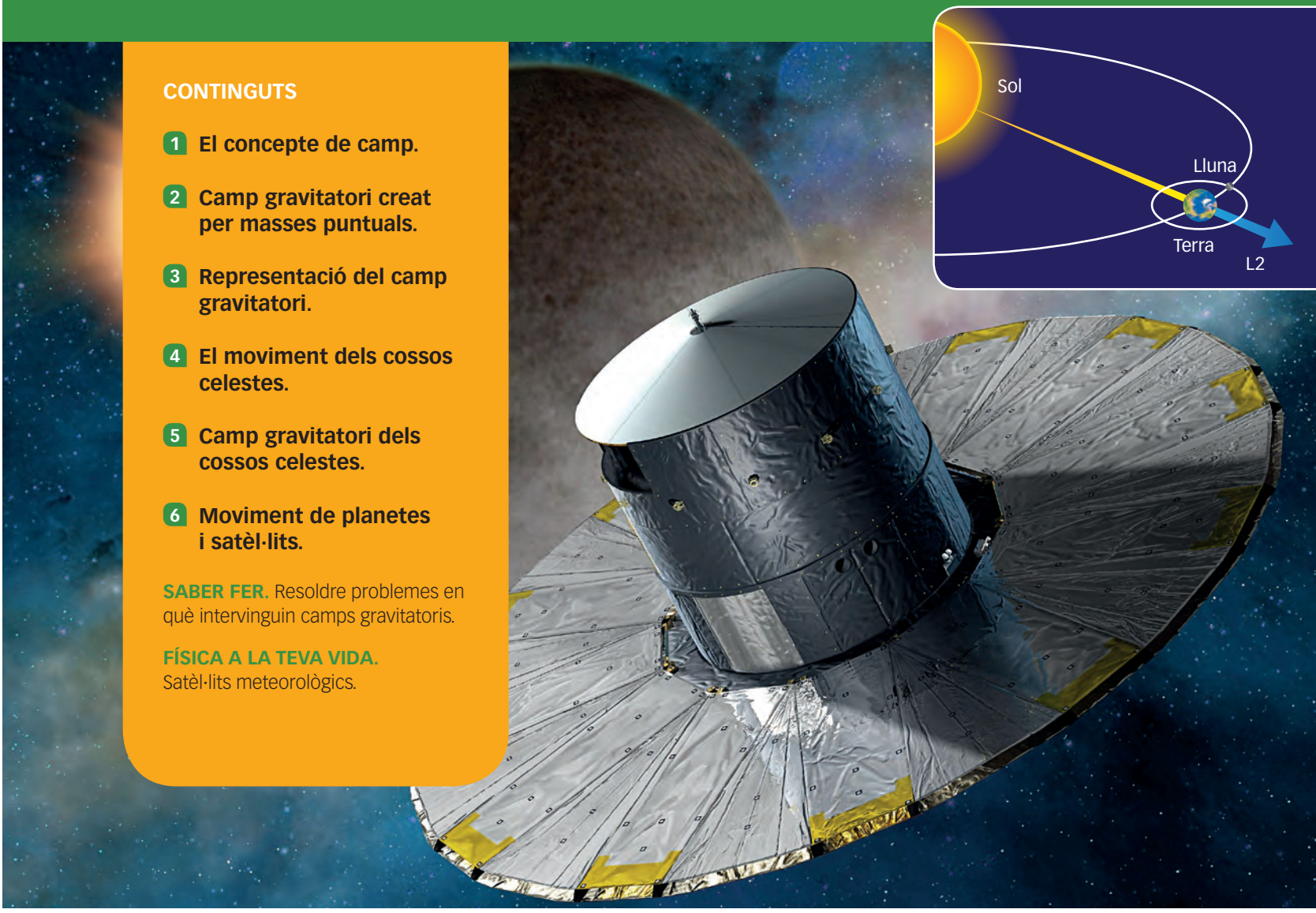
10. Física de partícules **301**
1. Partícules menors que l'àtom. Quarks 304
2. Les interaccions fonamentals 307
3. El model estàndard 309
4. Com es generen i es detecten les partícules 313
Saber fer 318
Activitats finals 320
Física a la teva vida 322

11. Història de l'univers **323**
1. L'expansió de l'univers i el *big bang* 325
2. Proves experimentals que confirmen la teoria del *big bang* 328
3. L'univers primerenc i les partícules 330
4. Matèria fosca i energia fosca 333
5. El model estàndard: fortaleses i debilitats 335
Saber fer 337
Activitats finals 339
Física a la teva vida 342

Annexos

I. Taula de constants físiques i químiques 343
II. Sistema periòdic dels elements 344

1 Camp gravitatori



CONTINGUTS

1. **El concepte de camp.**
2. **Camp gravitatori creat per masses puntuals.**
3. **Representació del camp gravitatori.**
4. **El moviment dels cossos celestes.**
5. **Camp gravitatori dels cossos celestes.**
6. **Moviment de planetes i satèl·lits.**

SABER FER. Resoldre problemes en què intervinguin camps gravitatoris.

FÍSICA A LA TEVA VIDA. Satèl·lits meteorològics.

La **sonda Gaia** es va llançar a l'espai el 2013 per estudiar milers d'estrelles de la nostra galàxia, la Via Làctia. Es va instal·lar en un punt de l'espai anomenat punt de Lagrange L2, situat en la línia que uneix la Terra i el Sol, més enllà de la posició ocupada per la Terra, a 1,5 milions de quilòmetres del nostre planeta. Gràcies a la seva situació, la sonda gira sincronitzadament amb la Terra, de manera que roman sobre el mateix punt del cel.

L'avantatge és que així és més senzill calibrar l'instrument i, a més, la sonda està protegida de la radiació solar, ja que els instruments poden estar sempre orientats en la direcció oposada al Sol.

PER COMENÇAR

- S'anul·la la força gravitatòria exercida pel Sol i la Terra en el punt L2?
- I en algun punt situat en la línia que uneix el Sol i la Terra?
- Aleshores, per què la sonda Gaia romandrà estacionària en L2?

Matemàtiques

1. Magnituds vectorials

Són aquelles la definició de les quals requereix indicar el mòdul (la quantitat), la direcció i el sentit, com $\vec{v}$ o $\vec{F}$.

S'expressen en funció de components: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$

Càlcul del mòdul:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

2. Producte de vectors

Es poden multiplicar de dues maneres:

Producte vectorial de vectors

Donats dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, el seu producte escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ és un escalar, el valor del qual és aquest:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

α és l'angle que formen els vectors.

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és zero perquè $\cos 90° = 0$.

Producte vectorial de vectors

Donats dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$, el seu producte vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ és un vector $\vec{C}$, el mòdul, la direcció i el sentit del qual són aquests:

- Mòdul:
$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \alpha$$
α és l'angle que formen els vectors.
- Direcció: és perpendicular a $\vec{A}$ i $\vec{B}$.
- Sentit: està determinat per la regla de la mà dreta o del cargol. Coincideix amb el sentit d'un cargol que giri com si el primer vector s'acostés al segon pel camí més curt.

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és zero perquè $\sin 0° = 0$.

3. La derivada d'una funció

Donada una funció $y = f(x)$, la derivada de y respecte a x, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ representa: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Derivada de la funció constant:

  Sigui $y = K$ (constant) $\rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$
- Derivada de la funció producte per un nombre real:

  Sigui $y = K \cdot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = K$
- Derivada de la funció potencial:

  Sigui $y = x^n \rightarrow \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$

4. Derivada d'un producte de funcions vectorials

$$d(\vec{A} \cdot \vec{B}) = d\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot d\vec{B}$$

$$d(\vec{A} \times \vec{B}) = d\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times d\vec{B}$$

Aplicació: demostrarem que $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r \cdot r \cdot \cos 0° = r \cdot r$$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot d\vec{r} = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} \qquad [1]$$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d(r \cdot r) = dr \cdot r + r \cdot dr = 2r \cdot dr \qquad [2]$$

Si igualem [1] i [2], obtenim que:

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2r \cdot dr \rightarrow \vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$$

5. La integral d'una funció

La integral d'una funció f és una altra funció que, derivada, ens dóna la funció f. Per a una funció x:

$$\int dx = x + \text{ct.}$$

Un cop obtinguda la funció integral, es pot calcular el valor de la integral definida entre dos límits. És el valor de la funció per al límit superior menys el valor de la funció per al límit inferior:

$$\int_i^f dx = [x]^f - [x]^i$$

- Integral indefinida d'una constant:
$$\int k \cdot dx = k \cdot x + \text{ct.}$$
- Integral indefinida d'una potència:
$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{ct., si } n \neq -1$$
- Integral indefinida de la funció inversa:
$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + \text{ct.}$$

PRACTICA

1. Calcula: $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) =$.

Solució: $-\frac{1}{r^2}$

2. Calcula $\int_r^\infty \frac{1}{r^2} \cdot dr =$.

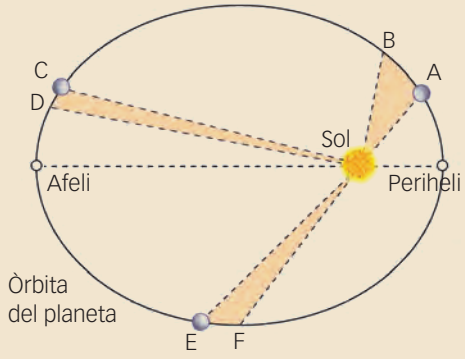
Solució: $\frac{1}{r}$

Física

1. Cinemàtica planetària. Les lleis de Kepler

Kepler va analitzar les posicions que ocupaven els cossos celestes i va enunciar les lleis que en regeixen el moviment:

- **1a llei:** tots els planetes giren al voltant del Sol descrivint òrbites el·líptiques. El Sol està situat en un dels focus de l'el·lipse.
- **2a llei:** els planetes giren amb velocitat areolar constant, és a dir, la línia que uneix la posició del planeta amb el Sol escombra àrees iguals en temps iguals. Com a conseqüència d'això, els planetes es mouen amb més velocitat lineal en el periheli que en l'afeli.



- **3a llei:** en el seu moviment al voltant del Sol, els planetes compleixen que: $\frac{T^2}{d^3} = \text{constant}$. T: període de translació; d: distància mitjana al Sol.

2. Dinàmica dels cossos celestes. Llei de la gravitació universal

Newton va determinar que l'atracció gravitatòria era la causant del moviment dels planetes al voltant del Sol i dels satèl·lits al voltant dels planetes.

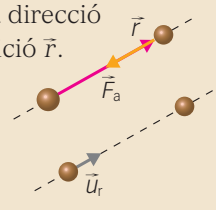
Va establir la llei de la gravitació universal, segons la qual dos cossos de massa m_1 i m_2 s'atrauen mútuament amb una força directament proporcional a les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa. En la seva formulació vectorial:

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

G és la constant de gravitació universal:
$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

$\vec{u}_r$ és un vector unitari amb la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector de posició $\vec{r}$.

El vector força té sentit oposat al vector de posició, ja que és una força d'atracció:



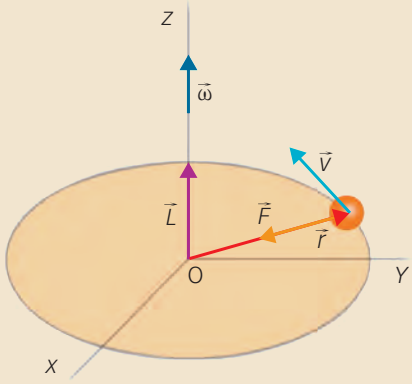
3. Moment angular

L'estat de moviment d'un cos que es desplaça amb moviment curvilini es caracteritza pel seu moment angular $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$$

$\vec{r}$ és el vector de posició del cos en moviment.

$\vec{p} = (m \cdot \vec{v})$ és la quantitat de moviment.



- Mòdul: $|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |(m \cdot \vec{v})| \cdot \text{sen}\ \alpha$, en què α és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{p}$.
- Direcció: és perpendicular al pla que formen els vectors $\vec{r}$ i $\vec{p}$.
- Sentit: ve donat per la regla de la mà dreta o del cargol.

De la segona llei de Kepler es dedueix que els planetes descriuen òrbites planes. Per tant, $\vec{L}$ és constant.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{L} = \text{constant} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}_G$ té la direcció de $\vec{r}$.

La força gravitatòria és una força central.

PRACTICA

3. Una massa de 20.000 kg està a una distància de 16 m d'una altra massa de 60.000 kg. Calcula la força d'atracció d'aquestes masses.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Solució: $3{,}13 \cdot 10^{-4}$ N

4. En quin punt la velocitat de la Terra és més gran, quan està més a prop o més lluny del Sol? Justifica la resposta.

Solució: més a prop.

5. Es coneix com a satèl·lits galileans les llunes més grans de Júpiter descobertes per Galileu el 1610. Ió, el satèl·lit galileà més proper a Júpiter, té un període orbital d'1,8 dies i el radi de la seva òrbita és, aproximadament, tres cops el diàmetre de Júpiter. Cal·listo, el quart satèl·lit galileà quant a la distància a Júpiter, té un període orbital de 16,7 dies. A més, saps que el radi de Júpiter és $7{,}15 \cdot 10^7$ m. Suposa que les òrbites són circulars i calcula, a partir d'aquestes dades, el radi de l'òrbita de Cal·listo.

Solució: $1{,}89 \cdot 10^9$ m

1 El concepte de camp

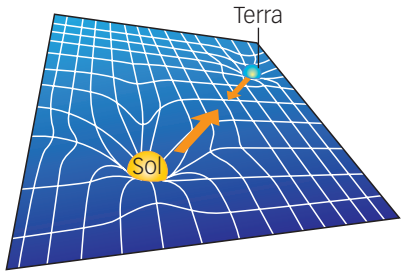


Figura 1.1. Segons la teoria d'Einstein, la massa del Sol i la de la Terra deformen l'espai que les envolta. Aquesta deformació fa que els dos cossos s'atreguin i que n'atreguin altres que s'hi acosten.

Un cos que es deixa lliure a prop de la superfície de la Terra cau. Diem que la Terra exerceix una atracció gravitatòria sobre el cos. Cossos carregats, separats una certa distància, s'atrauen o es repel·leixen segons el signe relatiu de les seves càrregues. Els imants s'atrauen o es repel·leixen segons l'orientació dels seus pols.

Les interaccions gravitatòria, elèctrica i magnètica es propaguen a distància. Els cossos implicats en la interacció no necessiten estar en contacte.

Per explicar formalment aquesta interacció a distància que es produïa entre cossos que tenien una propietat comuna, Michael Faraday (1791-1887) va encunyar el concepte de **camp** el 1831. El va aplicar a la interacció entre cossos carregats elèctricament i va idear les **línies de camp** per explicar com es transmetia la interacció entre un dels cossos i els altres que hi havia en diferents punts de l'espai.

Per explicar l'acció a distància, els científics van suposar l'existència d'un èter que omplia l'espai i que transmetia la interacció entre els cossos. La idea de l'*èter* es va mantenir vigent fins que les experiències fetes per Albert A. Michelson (1852-1931) i Edward Morley (1838-1923) el 1887 van posar-ne en dubte l'existència, i va ser Albert Einstein (1879-1955) qui, en els seus treballs de 1905, va demostrar que la seva existència no era necessària. Einstein va justificar que el cos causant de la pertorbació provocava distorsions espaciotemporals a la regió circumdant de l'espai i que són aquestes distorsions les que propaguen la pertorbació. (▸ Figura 1.1).

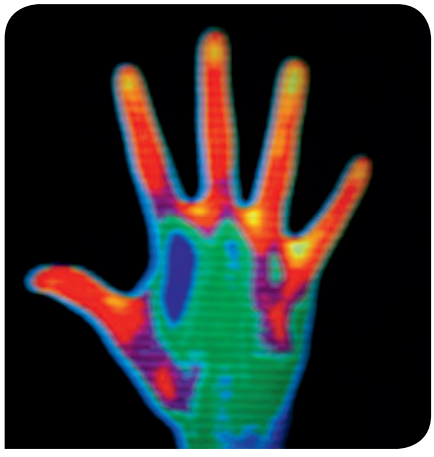


Figura 1.2. La termografia de la mà en mostra la temperatura de cada punt. És la representació d'un **camp escalar**, ja que la temperatura és una magnitud escalar.

Des de llavors, el concepte de camp s'ha generalitzat per estudiar qualsevol interacció que s'estengui a una regió de l'espai.

> Anomenem **camp** una regió de l'espai en què s'aprecia l'efecte de la pertorbació provocada per un cos que té una propietat que el fa interaccionar amb altres cossos que també tenen aquesta propietat.
>
> El cos que origina la pertorbació crea distorsions espaciotemporals que causen interaccions entre cossos que no estan en contacte.

Un cos que té massa interacciona amb d'altres que també tenen massa. Un cos que té càrrega interacciona amb d'altres que també tenen càrrega, etc.

Per definir un camp es fan servir magnituds que adquireixen un valor concret en cada punt de l'espai i en el temps. Segons com sigui la magnitud que defineix la pertorbació, hi ha dos tipus de camps:

- **Camps escalars.** Si la magnitud que mesura la pertorbació és escalar. Per exemple, un camp de temperatures (▸ Figura 1.2) o de pressions, on n'hi ha prou amb un nombre per determinar el valor del camp en un punt d'aquest.
- **Camps vectorials.** Si la magnitud que mesura la pertorbació és vectorial. Per exemple, un camp de forces gravitatòries o elèctriques (▸ Figura 1.3). En aquest cas, el valor del camp està determinat per un vector.

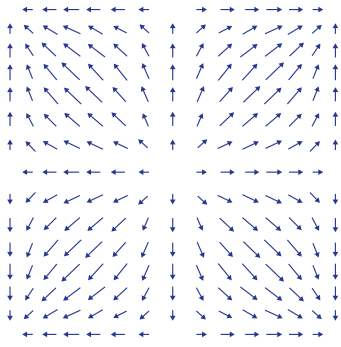


Figura 1.3. Representació del camp creat per una distribució de càrregues elèctriques. El seu valor en cada punt representa la força que actua sobre la unitat de càrrega en aquest punt. És un **camp vectorial**, ja que la força és una magnitud vectorial.

2 Camp gravitatori creat per masses puntuals

Un **camp gravitatori** és la regió de l'espai en què s'aprecia la pertorbació provocada per la massa d'un cos.

Perquè es posi de manifest, cal introduir en el camp un altre cos amb massa. La interacció que s'origina és una força d'atracció gravitatòria entre el cos que crea el camp i el que s'hi introdueix.

Començarem aquest estudi calculant el camp gravitatori creat per masses puntuals; és a dir, suposarem que el cos o els cossos que creen el camp són punts, sense dimensions, que tenen una massa M.

També es pot acceptar aquesta aproximació quan la mida dels cossos és molt més petita que la de la distància entre aquests. Per exemple, els planetes es poden considerar masses puntuals en la seva interacció amb el Sol.

2.1. Intensitat del camp gravitatori en un punt

Camp creat per una massa puntual *M*

Suposem que en un punt de l'espai existeix un cos de massa M. En un altre punt, la posició del qual respecte a M està definida pel vector $\vec{r}$, existeix un altre cos de massa m. Entre ambdós cossos apareix una força d'atracció gravitatòria que podem escriure així:

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

- G és la constant de gravitació universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.
- $\vec{u}_r$ és un vector unitari en la direcció i el sentit de $\vec{r}$.

Anomenem **intensitat del camp gravitatori** en un punt, $\vec{g}$, la força que una massa M exerceix sobre un cos de massa unitat col·locat en aquest punt. És una magnitud vectorial, el valor de la qual és aquest:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \frac{\dfrac{-G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r}{m} \rightarrow \boldsymbol{\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$

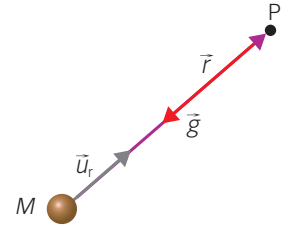


Figura 1.4. $\vec{g}$ i $\vec{r}$ ($\vec{u}_r$) tenen la mateixa direcció i sentits oposats, $\vec{r}$ (morat) va de la massa M al punt P, mentre que $\vec{g}$ (vermell) té el seu origen en P.

Com que la força gravitatòria és d'atracció, $\vec{g}$ i $\vec{u}_r$ tenen la mateixa direcció i sentits oposats (▸ Figura 1.4), d'aquí el signe negatiu en la fórmula. En el sistema internacional, $\vec{g}$ es mesura en **N/kg** o en **m/s²**.

Sovint anomenem pes la força d'atracció gravitatòria. Un cos que cau lliurement per l'acció de la força pes es mou amb un moviment uniformement accelerat; el valor de la seva acceleració és $\vec{g}$.

D'acord amb això, la intensitat del camp gravitatori en un punt, $\vec{g}$, és també l'acceleració de caiguda lliure dels cossos que es mouen sota l'acció de la força gravitatòria.

$$\boldsymbol{\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}}$$

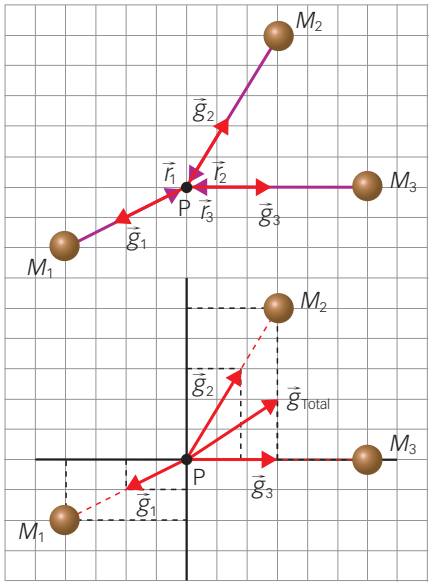


Figura 1.5. El camp total és la suma dels camps creats per cada massa.

Camp creat per una distribució de masses puntuals

Suposem que en una determinada regió de l'espai s'aprecia l'efecte de diversos punts materials de massa M_1, M_2, M_3, etc.

La intensitat del camp gravitatori creat per un conjunt de masses puntuals en un punt és la suma vectorial dels camps que crearia cada massa si estigués sola en aquesta regió de l'espai. Això es coneix com a **principi de superposició**.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i \left(-\frac{G \cdot M_i}{r_i^2}\right) \cdot \vec{u}_{ri}$$

En la figura 1.5 es representa el camp creat pels cossos de massa M_1, M_2 i M_3 en el punt P. El camp total és la suma dels camps creats per cada massa.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

$$\vec{g}_{\text{Total}} = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_{r3}$$

EXEMPLE RESOLT

1 **Dues masses puntuals, $m_1 = 5$ kg i $m_2 = 10$ kg, es troben en els punts del pla XY (1, 3) m i (1, 9) m, respectivament. Calcula la intensitat del camp gravitatori deguda a les dues masses en el punt (5, 6).**

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

D'acord amb el principi de superposició:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Com que coneixem les coordenades de cada un dels punts, el més senzill és calcular cada camp a partir de la definició de $\vec{g}$ En cada cas, obtindrem el vector unitari

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Utilitza unitats del SI per a cada magnitud.

- Calcula $\vec{g}_1$:

  $\vec{r}_1$ és un vector amb origen en el punt (1, 3) i extrem en el punt (5, 6).

$$\vec{r}_1 = (5-1)\vec{i} + (6-3)\vec{j} \rightarrow \vec{r}_1 = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{4\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4\vec{i} + 3\vec{j}}{5}$$

Per tant:

$$\vec{g}_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{5^2} \cdot \frac{4\vec{i} + 3\vec{j}}{5} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_1 = -1{,}07 \cdot 10^{-11}\vec{i} - 8{,}00 \cdot 10^{-12}\vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- Calcula $\vec{g}_2$:

  $\vec{r}_2$ és un vector amb origen en el punt (1, 9) i extrem en el punt (5, 6).

$$\vec{r}_2 = (5-1)\vec{i} + (6-9)\vec{j} \rightarrow \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{4\vec{i} - 3\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4\vec{i} - 3\vec{j}}{5}$$

Per tant:

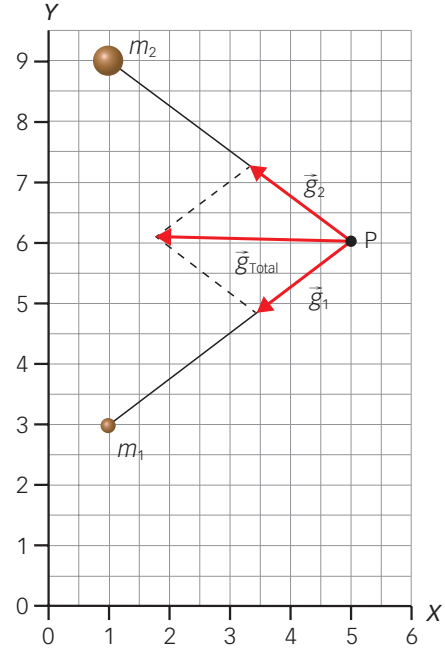
$$\vec{g}_2 = -\frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{5^2} \cdot \frac{4\vec{i} - 3\vec{j}}{5} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -2{,}14 \cdot 10^{-11}\vec{i} + 1{,}60 \cdot 10^{-11}\vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Aleshores:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-1{,}07 \cdot 10^{-11} + (-2{,}14 \cdot 10^{-11}))\vec{i} + (-8{,}00 \cdot 10^{-12} + 1{,}60 \cdot 10^{-11})\vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \mathbf{-3{,}21 \cdot 10^{-11}\vec{i} + 8{,}00 \cdot 10^{-12}\vec{j} \frac{N}{kg}}$$



2.2. Treball degut a les forces gravitatòries

Quan un cos de massa m es mou en el si del camp gravitatori creat per un altre cos de massa M, es produeix un treball, ja que el desplaçament té lloc sota l'acció d'una força, la força gravitatòria

Recorda

Càlcul del treball

Com ja vam veure en el curs anterior, quan un cos experimenta un desplaçament sota l'acció d'una força constant, es fa un treball el valor del qual es calcula multiplicant la força pel desplaçament (▸ Figura 1.6):

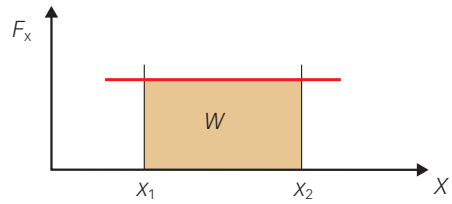
$$W_{i\to f} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Si la força no és constant, només podrem calcular el treball en un desplaçament infinitesimal, en el qual es considera que la força és constant (▸ Figura 1.7):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

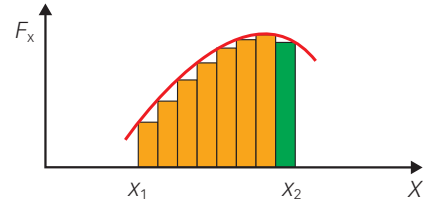
Per calcular el treball que es realitza quan es produeix un desplaçament entre dos punts qualssevol, cal sumar tots els treballs infinitesimals entre tots dos. Matemàticament, aquesta suma és la integral:

$$\boldsymbol{W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$



$$W_F = F_x \cdot (x_2 - x_1) = F_x \cdot \Delta_x$$

Figura 1.6. El treball és l'àrea ombrejada en la figura (rectangle).



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \to W = \int F_x \cdot dx$$

Figura 1.7. El treball és la suma de les àrees dels rectangles per aproximar l'àrea tancada per la corba.

Com que el seu valor canvia en cada punt, utilitzem el càlcul integral:

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f -\frac{G \cdot M \cdot m \cdot \vec{u}_r}{r^2} \cdot d\vec{r} \underset{(1)}{=} \int_i^f -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot dr$$

(1) $\vec{u}_r$ és un vector unitari que té la mateixa direcció i el mateix sentit que $\vec{r}$. Es pot demostrar que $\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = dr$.

$$W_{i\to f} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_i^f -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_i^f = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i}$$

EINES MATEMÀTIQUES

$$\int_A^B r^{-2} \cdot dr = [r^{-1}]_A^B = \left[\frac{1}{r}\right]_A^B = \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}$$

El camp gravitatori és un camp **conservatiu** perquè el treball realitzat per les forces del camp gravitatori només depèn del punt inicial i final del desplaçament, i no pas de la trajectòria seguida (▸ Figura 1.8).

$$W_{i\to f} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i} \qquad [1]$$

La força gravitatòria és una **força central**, ja que està dirigida cap al centre, i el seu mòdul depèn de la distància al centre. Podem generalitzar i dir que el treball degut a una força central és conservatiu.

En conseqüència:

- El treball de les forces del camp gravitatori al llarg d'una trajectòria tancada és zero.
- Si $r_f < r_i \to W_{i\to f} > 0$. El treball de les forces del camp gravitatori és positiu quan el cos s'acosta a la massa que crea el camp.
- Si $r_f > r_i \to W_{i\to f} < 0$. El treball de les forces del camp gravitatori és negatiu quan el cos s'allunya de la massa que crea el camp.

Això és degut al fet que les forces gravitatòries són sempre atractives i qualsevol cos que quedi lliure s'acostarà al que crea el camp.

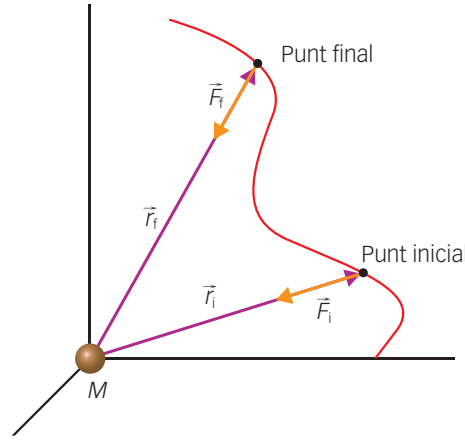


Figura 1.8. El treball de la força gravitatòria només depèn del punt inicial i final; no depèn de la trajectòria.

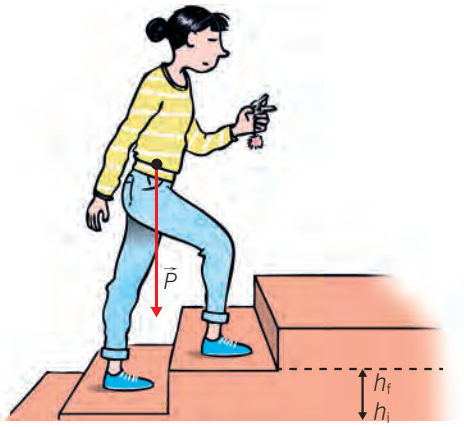
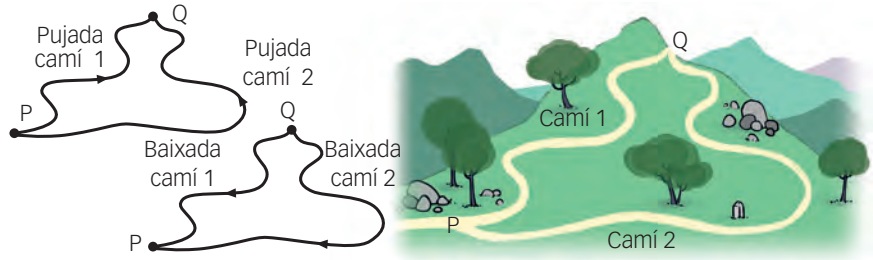


Figura 1.9. En fer cada pas es produeix un desplaçament en horitzontal (Δx) i un altre en altura (Δh). Com que la força pes és perpendicular al desplaçament horitzontal, no realitza treball en això. El treball de la força pes només depèn del desplaçament en altura.

Exemple de força conservativa

Observa la figura i veuràs que podem anar del punt P al Q per qualsevol dels dos camins assenyalats. En tots dos casos, la diferència d'altura és la mateixa, però el camí recorregut és diferent.



Per pujar la diferència d'altura hem de fer un treball en contra del nostre propi pes, i per recórrer el camí, hem de vèncer el fregament amb el terra.

El pes és una força conservativa, ja que el treball necessari per vèncer-lo només depèn del punt inicial i el final, mentre que el fregament és una força no conservativa, ja que el treball necessari per vèncer-lo depèn del camí.

Si completem la ruta per tornar al punt de partida P, el treball total degut a la força pes és nul. En canvi, el treball de la força de fregament no és nul, ja que hem de vèncer-la tant en el pas de P a Q com en l'invers.

EXEMPLE RESOLT

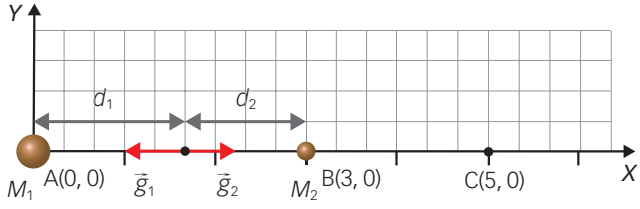
2 **Una massa de 50 kg està situada en el punt (0, 0) m i una altra de 30 kg, en el punt (3, 0) m.**

a) Calcula en quin punt (o punts) del pla *XY* el camp gravitatori resultant és nul.

b) Calcula el treball necessari per traslladar l'esfera de 30 kg fins al punt (5, 0) m. Interpreta el resultat obtingut.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

Representa el problema gràficament:



a) Es tracta de trobar un punt en què $\vec{g}_{\text{Total}} = 0$

D'acord amb el principi de superposició:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$$

Analitza la representació i observa que el punt que busques està en la línia que uneix M_1 i M_2.

El dibuix ens ajuda a expressar vectorialment $\vec{g}_1$ i $\vec{g}_2$.

No t'oblidis d'expressar totes les magnituds en unitats del sistema internacional.

- $\vec{g}_1 = -\dfrac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1}$
- $\vec{g}_2 = \dfrac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2}$

$$\vec{g}_1 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{d_1^2}\,\vec{i} = -\frac{3{,}34 \cdot 10^{-9}}{d_1^2}\,\vec{i}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = +\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 30}{d_2^2}\,\vec{i} = +\frac{2{,}00 \cdot 10^{-9}}{d_2^2}\,\vec{i}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Resol tenint en compte que:

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \rightarrow -\frac{3{,}34 \cdot 10^{-9}}{d_1^2}\,\vec{i}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} + \frac{2{,}00 \cdot 10^{-9}}{d_2^2}\,\vec{i}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 0$$

$$1{,}67 = \frac{d_1^2}{d_2^2} \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{1{,}67} = 1{,}29 \rightarrow d_1 = 1{,}29 \cdot d_2$$

Com que la distància entre les dues masses és de 3 m, substitueix i calcula:

$$d_1 + d_2 = 3 \rightarrow 1{,}29 \cdot d_2 + d_2 = 3 \rightarrow d_2 = \mathbf{1{,}31\ m}$$
$$d_1 = 3 - 1{,}31 \rightarrow d_1 = \mathbf{1{,}69\ m}$$

b) Utilitza l'expressió per calcular el treball en un camp gravitatori:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r_f} - \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r_i}$$

$$W_{B \rightarrow C} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$W_{B \rightarrow C} = \mathbf{-1{,}33 \cdot 10^{-8}\,J}$$

Interpretació: el treball és negatiu, és a dir, perquè el cos M_2 es desplaci de B a C cal realitzar un treball en contra de les forces del camp.

C està més allunyat de M_1 que B. Les forces del camp acostaran M_2 a M_1.

2.3. Energia potencial gravitatòria

En el camp gravitatori, com en tots els camps conservatius, es pot definir una energia potencial, de manera que:

$$W_{\text{conservatius}} = -\Delta E_P \rightarrow W_{i\rightarrow f} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i} = -(E_{Pf} - E_{Pi}) \quad [2]$$

Relacionant [1] (pàgina 13) i [2], trobem l'expressió per a l'energia potencial gravitatòria.

L'**energia potencial gravitatòria E_P** és aquella que té una massa perquè està sota la influència gravitatòria d'una altra o d'altres masses.

$$\boldsymbol{E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}}$$

L'energia potencial és una magnitud escalar, i en el SI es mesura en **joules (J)**.

Interpretació física: l'energia potencial d'un cos en un punt coincideix amb el treball que han de realitzar les forces del camp per portar-lo des d'aquest punt fins a fora del camp a velocitat constant. Matemàticament, un punt fora del camp està a una distància infinita de la massa que crea el camp.

$$W_{i\rightarrow\infty} = \int_i^\infty \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_i^\infty -\frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_i^\infty =$$

$$= \frac{G \cdot M \cdot m}{r_\infty} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i} \rightarrow W_{i\rightarrow\infty} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_i} = E_{Pi}$$

Observa que, dins del camp, l'energia potencial d'un cos sempre és negativa. La raó és que la força gravitatòria és una força atractiva i cal una força exterior per portar el cos des d'un punt del camp fins a fora d'aquest.

Diferència d'energia potencial

Quan un cos de massa m està en el camp gravitatori creat per un altre de massa M, la seva energia potencial depèn del punt on es trobi. En desplaçar-se a un altre punt, la seva energia potencial varia segons l'expressió:

$$E_{Pf} - E_{Pi} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_i}\right)$$

La diferència de l'energia potencial gravitatòria que experimenta el cos de massa m és igual i de signe contrari al treball que realitzen les forces del camp per traslladar el cos entre aquests punts:

$$W_{i\rightarrow f} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_i^f -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_i^f =$$

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i} = -(E_{Pf} - E_{Pi})$$

- Si el cos de massa m s'acosta al cos que crea el camp ($r_i > r_f$): el treball que realitzen les forces del camp és positiu i el cos perd energia potencial (▸ Figura 1.10A).
- Si el cos de massa m s'allunya del cos que crea el camp ($r_i < r_f$): el treball que realitzen les forces del camp és negatiu. Cal una força exterior perquè es produeixi el desplaçament i el cos guanyi energia potencial (▸ Figura 1.10B).

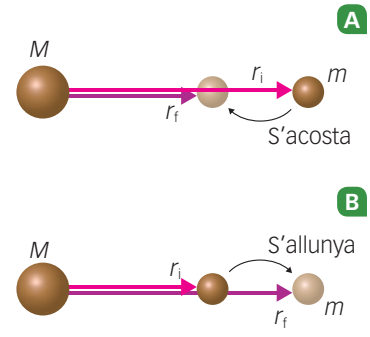


Figura 1.10. Si el cos de massa m s'acosta al cos que crea el camp M: $r_i > r_f$. En canvi, si la massa m s'allunya de la massa M: $r_i < r_f$.

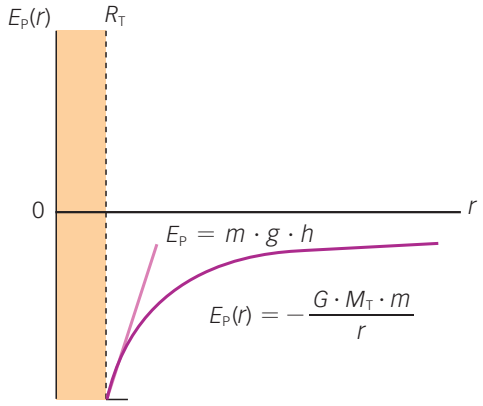


Figura 1.11. Per a petites distàncies sobre la superfície de la Terra es pot considerar que l'energia potencial varia linealment amb l'altura ($E_P = m \cdot g \cdot h$). Si les distàncies són més grans, l'energia potencial varia amb l'invers de la distància r i esdevé nul·la en l'infinit.

D'on ve $E_P = m \cdot g \cdot h$?

Fins ara, quan un cos estava a una altura h de la superfície de la Terra, tenia una energia potencial $E_P = m \cdot g \cdot h$. Quina relació té aquesta expressió amb el que acabem de deduir per al camp gravitatori?

Imaginem un cos que està sobre la superfície de la Terra i ascendeix a una altura h. La diferència d'energia potencial en els dos punts és aquesta:

$$\Delta E_P = E_{Ph} - E_{Psuperfície} = \left(-G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{1}{R_T + h}\right) - \left(-G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{1}{R_T}\right) =$$

$$G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{(R_T + h) - R_T}{R_T \cdot (R_T + h)} = G \cdot M_T \cdot m \frac{h}{R_T \cdot (R_T + h)}$$

Si considerem que el punt està a prop de la superfície de la Terra:

$$h << R_T \text{ i } R_T + h \approx R_T;\ g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

L'expressió es converteix en:

$$\Delta E_P = G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{h}{R_T^2} \rightarrow \Delta E_P = m \cdot g \cdot h \quad (\blacktriangleright \text{ Figura 1.11})$$

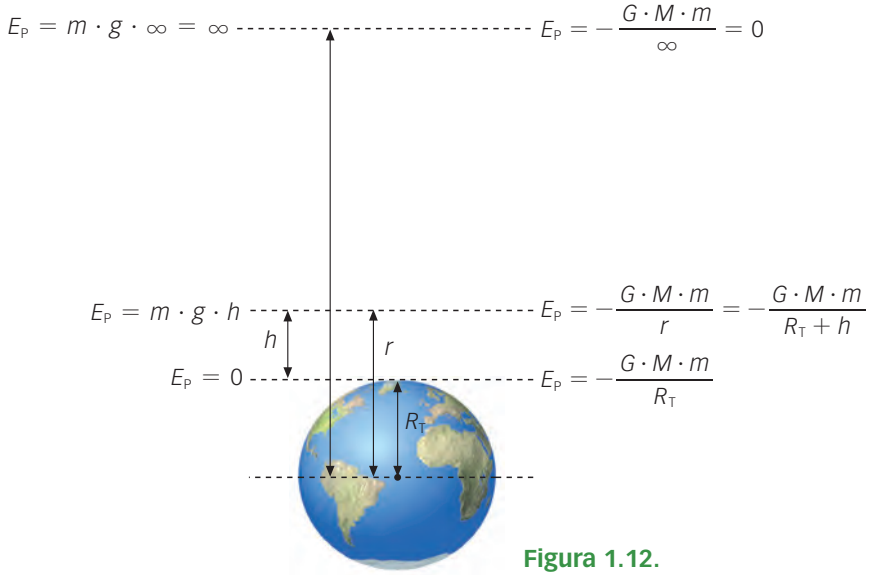


Figura 1.12.

En la figura 1.12 veiem la similitud entre les dues maneres d'expressar l'energia potencial. La diferència rau en el punt que prenem com a referència per considerar que un cos té energia potencial zero.

- Si aquest punt és la superfície de la Terra, a mesura que se n'allunya, el cos tindrà una energia potencial cada cop més gran i positiva.
- Si aquest punt és l'infinit, el cos tindrà sempre energia potencial negativa i de valor cada cop més petit a mesura que ens allunyem de la superfície de la Terra.

En tot cas, **el cos guanya energia potencial a mesura que s'allunya de la superfície de la Terra.**

EXEMPLE RESOLT

3 L'estació espacial MIR orbitava la Terra a uns 400 km de la seva superfície. Calcula la variació d'energia potencial que va experimentar quan va passar d'estar preparada per al seu llançament, a 10 m del terra, a estar en l'espai.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $R_T = 6.370$ km; $m = 2$ kg; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Fes el càlcul amb les dues expressions estudiades. Utilitza unitats del SI per a cada magnitud.

	$E_P = m \cdot g \cdot h$	$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{(R_T + h)}$
A 10 m	$E_{PA} = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 196$ J	$E_{PA} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2}{(6.370 \cdot 10^3 + 10)} = -125{,}23 \cdot 10^6$ J
A 400 km	$E_{PB} = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 400 \cdot 10^3 = 7{,}84 \cdot 10^6$ J	$E_{PB} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2}{(6.370 + 400) \cdot 10^3} = -117{,}83 \cdot 10^6$ J
ΔE_P	$E_{PB} - E_{PA} = 7{,}84 \cdot 10^6 - 196 =$ **$7{,}84 \cdot 10^6$ J**	$E_{PB} - E_{PA} = -117{,}83 \cdot 10^3 - (-125{,}23 \cdot 10^6) =$ **$7{,}40 \cdot 10^6$ J**

Interpretació: observa que el càlcul de l'esquerra té l'error de suposar que $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ a qualsevol distància, quan g només té aquest valor a la superfície de la Terra.

2.4. Conservació de l'energia mecànica en un camp gravitatori

El curs passat vam veure el teorema de les forces vives, que diu que el treball de totes les forces que actuen sobre un cos provoca una variació en la seva energia cinètica.

$$W_{i\to f} = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} \qquad [3]$$

Per treball total entenem el treball de totes les forces, tant les forces conservatives com les forces no conservatives (per exemple, les forces de fregament).

Si el nostre sistema només està sotmès a l'acció de forces conservatives (per exemple, a l'acció de forces gravitatòries):

$$W_{i\to f} = W_{\text{conservatives}} + W_{\text{no conservatives}} \to$$
$$\to W_{i\to f} = -\Delta E_P + 0 = E_{Pi} - E_{Pf} \qquad [4]$$

Si relacionem les expressions [3] i [4], obtenim que:

$$E_{Cf} - E_{Ci} = E_{Pi} - E_{Pf}$$

Aquesta expressió és el teorema de conservació de l'energia mecànica.

Teorema de conservació de l'energia mecànica: quan un sistema només està sotmès a l'acció de forces conservatives, la seva energia mecànica es conserva (▶ Figura 1.13).

$$E_{Cf} + E_{Pf} = E_{Ci} + E_{Pi} = E_M$$

EINES MATEMÀTIQUES

Teorema de les forces vives

Quan un cos es desplaça sota l'acció d'una o més forces:

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f m\cdot\vec{a}\cdot d\vec{r} =$$
$$= \int_i^f m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$
$$W_{i\to f} = \int_i^f m\cdot\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int_i^f m\cdot v\cdot dv =$$
$$= \frac{1}{2}m\cdot v_f^2 - \frac{1}{2}m\cdot v_i^2$$

Forces conservatives

Les forces conservatives s'anomenen així perquè quan són les úniques que actuen sobre un sistema es conserva l'energia mecànica d'aquest.

Figura 1.13. Si no existís fregament, el moviment seria infinit i aniria d'un costat a l'altre de la pista constantment, ja que l'energia potencial s'estaria convertint en cinètica, i viceversa. La força de fregament és una força no conservativa.

EXEMPLE RESOLT

4 **Un meteorit de 200 kg que es dirigeix en caiguda lliure cap a la Terra té una velocitat de 10 m/s a una altura h = 750 km sobre la superfície terrestre. Determina el pes del meteorit a aquesta altura i la velocitat amb què impactarà sobre la superfície terrestre. Menysprea la fricció amb l'atmosfera.**

Dades: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; R_T = 6.370 km.

Expressa totes les magnituds en unitats del SI.

El pes coincideix amb el valor de la força gravitatòria que la Terra hi exerceix a sobre:

$$P = F_G = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{(R_T+h)^2}$$

$$P = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{((6.370+750)\cdot10^3)^2} = \mathbf{1.573{,}6\ N}$$

L'energia mecànica del meteorit es conserva, ja que només està sotmès a la força gravitatòria:

$$E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf}$$
$$\frac{1}{2}\cdot200\cdot10^2 - \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{(6.370+750)\cdot10^3\ \text{m}} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot200\cdot v^2 - \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{6.370\cdot10^3} \to$$
$$\to v = \sqrt{\frac{10^4 - 1{,}12\cdot10^{10} + 1{,}25\cdot10^{10}}{100}} = \mathbf{3.632\ m/s}$$

2.5. Potencial gravitatori en un punt

En les pàgines anteriors hem vist que una massa, M, origina un camp gravitatori i que, a causa d'això, una altra massa, m, adquireix certa energia potencial deguda a la posició que ocupa en aquest camp. Resulta molt útil considerar l'energia potencial per unitat de massa, ja que així obtenim una magnitud que només depèn de la massa, M, que crea el camp.

S'anomena **potencial en un punt V** l'energia potencial per unitat de massa en aquest punt:

$$V = \frac{E_P}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

El potencial és una magnitud escalar i, en el sistema internacional, es mesura en **J/kg**.

Interpretació física: el potencial en un punt és el treball que realitzen les forces del camp per portar la unitat de massa des d'aquest punt fins a fora del camp a velocitat constant.

$$\frac{W_{i\to\infty}}{m} = \int_i^\infty \frac{\vec{F}_G}{m} \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot \int_i^\infty -\frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_i^\infty = \frac{G \cdot M}{r_\infty} - \frac{G \cdot M}{r_i} \to$$

$$\to \frac{W_{i\to\infty}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r_i} = V_i$$

El potencial en l'infinit (fora del camp) és zero, i en qualsevol altre punt del camp és negatiu, ja que la força gravitatòria és atractiva.

Podem dir que el potencial gravitatori és un **camp escalar**, ja que permet estudiar la interacció gravitatòria com una funció escalar de punt, és a dir, en cada punt del camp el potencial té un valor.

Potencial en un punt degut a una distribució de masses puntuals

D'acord amb el **principi de superposició**, si en una determinada regió de l'espai s'aprecia l'efecte de diversos punts materials de massa M_1, M_2, M_3, etc., el potencial gravitatori en un punt P és la suma dels potencials que crearia cada un d'aquests cossos si estigués sol en aquesta regió de l'espai (▶ Figura 1.14).

Com que el potencial és un escalar, el potencial total és el resultat de la suma escalar dels potencials creats per cada punt material.

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 \to$$

$$\to V_T = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3}$$

En general, el potencial creat per un sistema de masses puntuals és aquest:

$$V_T = \sum_i V_i = \sum_i -\frac{G \cdot M_i}{r_i}$$

Un cop coneixem el potencial que crea un conjunt de masses puntuals en un punt, podrem conèixer l'energia d'un cos de massa m col·locat en aquest punt mitjançant aquesta expressió:

$$E_{P\,\text{en}\,P} = m \cdot V_{T\,\text{en}\,P}$$

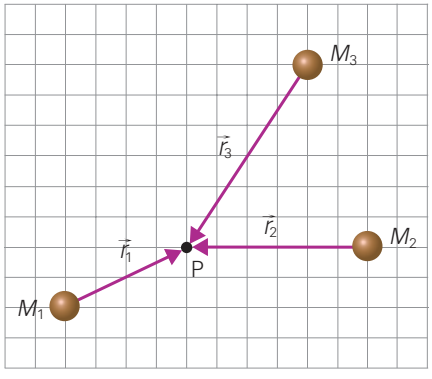


Figura 1.14. En P, $V_T = V_1 + V_2 + V_3$.

Diferència de potencial

Si considerem dos punts d'un camp gravitatori, *i* i *f*, anomenem **diferència de potencial** entre tots dos la relació $V_f - V_i$:

$$\Delta V = V_f - V_i \rightarrow \boldsymbol{\Delta V = -\frac{G \cdot M}{r_f} - \left(-\frac{G \cdot M}{r_i}\right)}$$

La diferència de potencial gravitatori entre dos punts és igual i de signe contrari al treball que realitzen les forces del camp per traslladar la unitat de massa entre aquests punts:

$$\frac{W_{i\to f}}{m} = \int_i^f \frac{\vec{F}_G}{m} \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot \int_i^f -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_i^f =$$

$$= \frac{G \cdot M}{r_f} - \frac{G \cdot M}{r_i} = -(V_f - V_i) = -\Delta V \rightarrow \frac{W_{i\to f}}{m} = -\Delta V$$

- Si $r_i > r_f$, $\Delta V < 0$. El potencial disminueix en acostar-se al cos que crea el camp.
- Si $r_i < r_f$, $\Delta V > 0$. El potencial augmenta en allunyar-se del cos que crea el camp.

EXEMPLE RESOLT

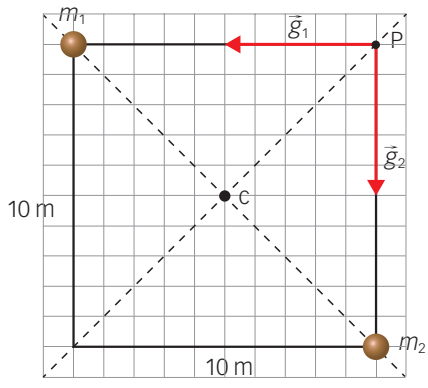
5 Dues masses puntuals de 300 kg cada una estan situades en els vèrtexs oposats d'un quadrat de 10 m de costat:

a) Dibuixa i calcula el camp gravitatori produït per aquestes dues masses en un altre dels vèrtexs del quadrat.

b) Troba el potencial gravitatori degut a les dues masses en el punt central del quadrat.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Representa el problema gràficament:



a) Calcula el camp en el punt P. D'acord amb el principi de superposició:

$$\vec{g}_{Total} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

El dibuix t'ajuda a expressar vectorialment $\vec{g}_1$ i $\vec{g}_2$.

- $\vec{g}_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1}$
- $\vec{g}_2 = -\frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2}$

$$\vec{g}_1 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 300\ kg}{10^2\ m^2}\ \vec{i} = -2{,}00 \cdot 10^{-10}\ \vec{i}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 300\ kg}{10^2\ m^2}\ \vec{j} = -2{,}00 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_{Total} = \boldsymbol{-2{,}00 \cdot 10^{-10}\ \vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ \frac{N}{kg}}$$

b) Per calcular el potencial en el punt C, fes servir el principi de superposició:

$$V_T = V_1 + V_2$$

Les dues masses estan a una distància de C igual a la meitat de la diagonal del quadrat:

$$r = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{(10^2 + 10^2)}}{2} = 7{,}07\ m$$

$$V_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 300\ kg}{7{,}07\ m} = -2{,}83 \cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}$$

$$V_T = V_1 + V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot (-2{,}83 \cdot 10^{-9})$$

$$V_T = \boldsymbol{-5{,}66 \cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}}$$

Interpretació: el potencial gravitatori en un punt sempre és un nombre negatiu.

En resum

Existeixen dues magnituds per descriure el camp gravitatori i dues magnituds per descriure la interacció del camp gravitatori amb una partícula.

Magnituds que descriuen el camp gravitatori		Magnituds que descriuen la interacció gravitatòria	
Intensitat de camp (funció vectorial de punt)	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$	Força gravitatòria	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$
Potencial (funció escalar de punt)	$V = \frac{E_P}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$	Energia potencial	$E_P = m \cdot V = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$

En cada cas, podrem fer una descripció dinàmica, per mitjà de les magnituds $\vec{g}$ i $\vec{F}_G$, o una descripció energètica, per mitjà de les magnituds V i E_P. Els detalls del problema que se'ns presenti ens indicaran si hem de fer l'estudi mitjançant les magnituds vectorials o les escalars.

A més, partint de les magnituds que descriuen la interacció gravitatòria, es pot establir una relació entre les dues magnituds que descriuen el camp:

$$W_{i \to f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_{P\,f} - E_{P\,i}) \to \int_i^f \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r} = -\left(\frac{E_{p\,f}}{m} - \frac{E_{p\,i}}{m}\right) \to$$

$$\to \int_i^f \vec{g} \cdot d\vec{r} = -(V_f - V_i)$$

Podem arribar a aquesta mateixa conclusió desenvolupant la primera part de la igualtat, si tenim en compte les definicions i les eines matemàtiques que fem servir en els apartats anteriors.

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{r} = -\int G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -G \cdot M \int \frac{1}{r^2} \cdot dr = \left[-G \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\right]_{r_i}^{r_f} =$$

$$= G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = -(V_f - V_i) \to \int \vec{g} \cdot d\vec{r} = -(V_f - V_i)$$

Camp creat per diverses masses puntuals

Quan en una regió de l'espai se superposa el camp creat per un conjunt de masses puntuals, M_1, M_2, M_3, el més adequat és calcular el camp total i el potencial total en un punt i utilitzar aquest valor per calcular la força gravitatòria o l'energia potencial que actuen sobre una partícula m col·locada en aquest punt.

Magnituds que descriuen el camp gravitatori	Magnituds que descriuen la interacció gravitatòria	
$\vec{g}_{Total} = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_{r3}$	Força gravitatòria	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}_{Total}$
$V_T = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3}$	Energia potencial	$E_P = m \cdot V_T$
	Treball en un desplaçament	$W_{i \to f} = -(E_{P\,f} - E_{P\,i}) = -m \cdot (V_{T\,f} - V_{T\,i})$

EXEMPLE RESOLT

6 En els tres vèrtexs d'un triangle equilàter de 10 m de costat hi ha col·locats cossos puntuals de massa 2, 3 i 0,5 kg. Calcula:

a) El valor del camp gravitatori en el centre del triangle.

b) La força que s'exercirà sobre un cos de 5 kg de massa que se situï en el centre del triangle.

c) El treball que realitza el camp per portar aquest cos des del centre del triangle fins al punt mitjà del costat on hi ha les masses de 2 i 3 kg. Interpreta el signe del resultat.

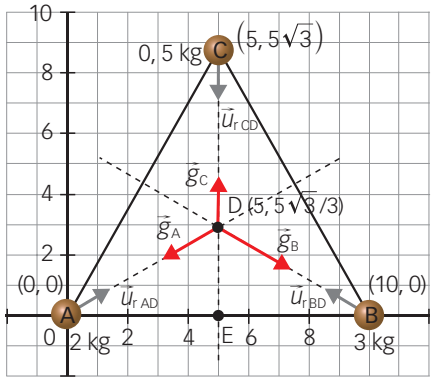
d) Suposant que la massa de 5 kg es deixa en repòs en el centre del triangle, amb quina velocitat arribarà al punt mitjà del costat oposat?

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

Estableix un sistema de coordenades per determinar la posició de cada un dels cossos i el punt on es crea el camp.

El centre del triangle (D) és el baricentre; dista de cada vèrtex 2/3 de l'altura.

Representa el problema gràficament:



a) Calcula el camp en el centre del triangle:

$$\vec{g}_{Total} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_{Total} = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AD}^2} \cdot \vec{u}_{r\,AD} - \frac{G \cdot M_B}{r_{BD}^2} \cdot \vec{u}_{r\,BD} - \frac{G \cdot M_A}{r_{CD}^2} \cdot \vec{u}_{r\,CD}$$

Al «Saber fer» de la pàgina 44 veuràs una altra manera de resoldre problemes en els quals intervenen vectors aprofitant la simetria del cas.

- $\vec{r}_{AD}$ és un vector amb origen en el punt (0, 0) i extrem en $\left(5, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$\vec{r}_{AD} = 5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{r\,AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3}/3)^2}} =$$

$$= \frac{5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{10\sqrt{3}/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_A = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AD}^2} \cdot \vec{u}_{r\,AD} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 2\,\mathrm{kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2\,\mathrm{m^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}\right) =$$

$$= -3{,}47 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

- $\vec{r}_{BD}$ és un vector amb origen en el punt (10, 0) i extrem en $(5, 5\sqrt{3}/3)$.

$$r_{BD} = -5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{r\,BD} = \frac{\vec{r}_{BD}}{|\vec{r}_{BD}|} = \frac{-5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3}/3)^2}} =$$

$$= \frac{-5\,\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{10\sqrt{3}/3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_B = -\frac{G \cdot M_B}{r_{BD}^2} \cdot \vec{u}_{r\,BD} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 3\,\mathrm{kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2\,\mathrm{m^2}} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}\right) =$$

$$= 5{,}20 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 3{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

- $\vec{r}_{CD}$ és un vector amb origen en el punt $(5, 5\sqrt{3})$ i extrem en $\left(5, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$\vec{r}_{CD} = 0\,\vec{i} - 10\sqrt{3}/3\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{r\,CD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{|\vec{r}_{CD}|} = \frac{-10\sqrt{3}/3\,\vec{j}}{\sqrt{(10\sqrt{3}/3)^2}} = -\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_C = -\frac{G \cdot M_C}{r_{CD}^2} \cdot \vec{u}_{r\,CD} =$$

$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2\,\mathrm{m^2}} \cdot (-\vec{j}) =$$

$$= 1{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Per tant:

$$\vec{g}_{Total} = (-3{,}47 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}) + (5{,}20 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 3{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}) + 1{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_{Total} = \mathbf{1{,}73 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 4{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}}$$

b) Calcula la força: $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}_{Total}$.

$$\vec{F}_G = 5\,\mathrm{kg} \cdot (1{,}73 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 4{,}00 \cdot 10^{-12}\,\vec{j})\,\mathrm{N/kg} \rightarrow$$

$$\vec{F}_G = \mathbf{0{,}87 10^{-11}\,\vec{i} - 2{,}00 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ N}$$

continua

Nota

Observa que el resultat del problema canvia si col·loques les masses en una altra posició.

c) Utilitza les unitats del sistema internacional per a totes les magnituds.

$$W_{D\to E} = -\Delta E_P = -(E_{PE} - E_{PD}) = -m \cdot (V_{TE} - V_{TD})$$

Calcula el potencial total que les tres masses creen en cada un d'aquests punts:

$$V_{TD} = V_{AD} + V_{BD} + V_{CD} = -\frac{G \cdot m_A}{r_{AD}} - \frac{G \cdot m_B}{r_{BD}} - \frac{G \cdot m_C}{r_{CD}}$$

$$V_{TD} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{10\sqrt{3}/3} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{10\sqrt{3}/3} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}5}{10\sqrt{3}/3}$$

$$V_{TD} = -6{,}354 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_{TE} = V_{AE} + V_{BE} + V_{CE} = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AE}} - \frac{G \cdot M_B}{r_{BE}} - \frac{G \cdot M_C}{r_{CE}}$$

$$V_{TE} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{5} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{5} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}5}{5\sqrt{3}}$$

$$V_{TE} = -7{,}055 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$W_{D\to E} = -m \cdot (V_{TE} - V_{TD})$$

$$W_{D\to E} = -5 \cdot (-7{,}055 \cdot 10^{-11} - (-6{,}354 \cdot 10^{-11})) =$$

$$= +\mathbf{3{,}51 \cdot 10^{-11} \frac{J}{kg}}$$

Interpretació: $W_{D\to E} > 0$, la qual cosa vol dir que les forces de camp desplaçaran la massa de 5 kg des del centre del triangle fins al mig del vèrtex oposat.

d) Suposa que les úniques forces que actuen sobre el sistema són les forces gravitatòries:

$$E_{CD} + E_{PD} = E_{CE} + E_{PE} \to$$

$$E_{CD} + m \cdot V_{TD} = E_{CE} + m \cdot V_{TE}$$

$$0 + 5 \cdot (-6{,}354 \cdot 10^{-11}) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot v_E^2 + 5 \cdot (-7{,}055 \cdot 10^{-11})$$

$$\to v_E = \mathbf{3{,}8 \cdot 10^{-6}\ m/s}$$

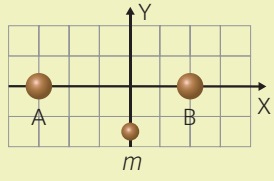
ACTIVITATS

6. Justifica si l'afirmació següent és vertadera o falsa: «El potencial gravitatori és nul en el punt mitjà del segment que uneix dues masses iguals».

7. Si ens desplacem des d'un punt situat a gran altura en direcció a la superfície de la Terra, l'energia potencial gravitatòria augmentarà o disminuirà? Raona la resposta.

8. Al peu d'una muntanya un alpinista pot agafar dues rutes diferents per escalar-la. Un dels pendents és suau i l'altre, en canvi, és molt més pronunciat. Creus que el valor del treball realitzat per la força gravitatòria sobre el cos del muntanyenc depèn del camí triat? Raona la resposta.

9. En els punts A (–30, 0) i B (+20, 0) hi ha fixes dues masses puntuals de 10^5 kg cada una. En el punt (0, –15) hi ha una petita esfera de 400 g de massa, que pot moure's lliurement. Tingues en compte que les distàncies estan expressades en metres i calcula:



a) La força exercida (mòdul, direcció i sentit) sobre l'esfera en la seva posició inicial.

b) L'acceleració que experimentarà l'esfera just quan es trobi en el punt (0, 0) entre els cossos A i B.

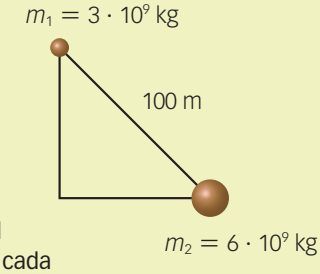
c) Finalment, enuncia i explica breument el principi de superposició de camps.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solució: a) $1{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{i} + 3{,}62 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}$ N; $3{,}84 \cdot 10^{-9}$ N
b) $9{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{i}$ m/s²

10. Explica quina relació existeix entre una força conservativa i l'energia potencial.

11. Hi ha dues masses de $3 \cdot 10^9$ kg i $6 \cdot 10^9$ kg, respectivament, en els extrems de la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles.



a) Fes un esquema del camp gravitatori de cada massa i del camp total en el vèrtex lliure.

b) Si la hipotenusa del triangle mesura 100 m, calcula el mòdul del camp gravitatori en aquest vèrtex.

c) En quin punt del triangle el camp gravitatori serà nul?

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solució: b) $8{,}95 \cdot 10^{-5}$ m/s²; c) $41{,}\widehat{42}$ m de la massa més petita.

12. Tenim dues masses de 4.000 i 10.000 kg, respectivament. La massa 1 és en l'origen de coordenades, punt (0, 0). A 200 m i a la seva dreta hi ha la massa 2, punt (200, 0).

a) Dibuixa i calcula el valor del camp gravitatori en el punt mitjà C entre totes dues.

b) Troba el potencial gravitatori en el punt C.

c) Troba el treball necessari per portar una massa d'1 kg des del punt C fins a una distància de 40 m a l'esquerra de la primera massa, punt (–40, 0).

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solució: a) $4 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}$ N/kg; b) $-9{,}34 \cdot 10^{-9}$ J/kg;
c) $1{,}11 \cdot 10^{-10}$ J

3 Representació del camp gravitatori

El camp gravitatori es pot representar gràficament de dues formes, que es relacionen amb les dues magnituds que el descriuen:

- Les **línies de camp**.
- Les **superfícies equipotencials**.

3.1. Línies de camp

Les línies de camp són línies tangents al vector intensitat de camp en cada punt.

Es dibuixen de tal manera que el nombre de línies de camp que travessen una unitat de superfície perpendicular a les línies és proporcional a la intensitat del camp en el punt.

- Si tenim un camp creat per una única massa puntual, les línies de camp tenen direcció radial i sentit cap al cos que crea el camp (▶ Figura 1.15).
- Si tenim un camp creat per dues masses, a la zona intermèdia les línies de camp es deformen, cosa que indica que hi ha un punt entre ambdues masses on el camp és nul.

  Si les masses són iguals, el punt on s'anul·la el camp està enmig de les dues masses (▶ Figura 1.16).
- Si una de les masses és més gran que l'altra, el punt on s'anul·la el camp està més a prop del cos que té menys massa (▶ Figura 1.17).

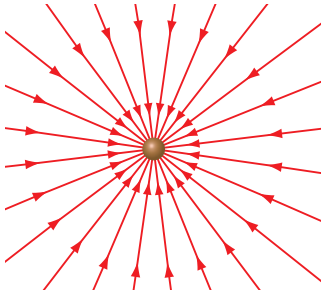


Figura 1.15. Línies de camp creat per una massa puntual.

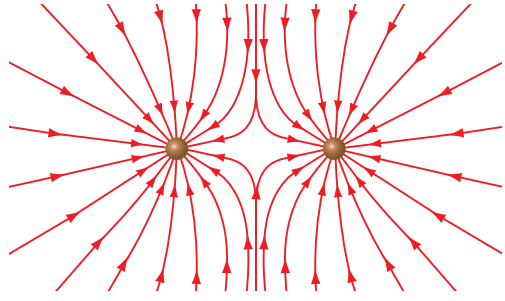


Figura 1.16. Línies de camp creat per dues masses iguals.

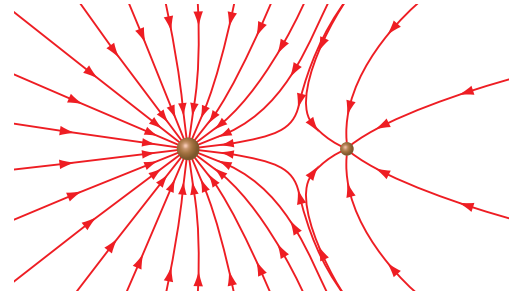


Figura 1.17. Línies de camp creat per dues masses diferents.

Propietats de les línies de camp

Les línies de camp no es poden encreuar.

Si s'encreuessin dues línies de camp, en el punt de tall hi hauria dos valors per a la intensitat del camp gravitatori, la qual cosa és impossible, ja que, segons el principi de superposició, la intensitat del camp té un valor únic en cada punt.

Observa el que passa en el punt P de la figura 1.18.

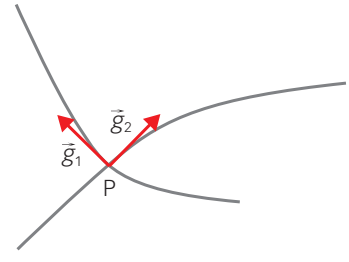


Figura 1.18. Les línies de camp no es poden encreuar.

3.2. Superfícies equipotencials

Les superfícies equipotencials són regions de l'espai en què el potencial gravitatori té el mateix valor.

En conseqüència, **el treball necessari per desplaçar una massa d'un punt a un altre d'una mateixa superfície equipotencial és nul**:

$$W_{i \to f} = -(E_{Pf} - E_{Pi}) = -(m \cdot V_f - m \cdot V_i) = 0$$

- Si el camp està creat per una única massa puntual, les superfícies equipotencials són esferes, amb centre en la massa puntual (▶ Figura 1.19).
- Si està creat per dues masses, les superfícies equipotencials es deformen a la zona on s'aprecia l'efecte de les dues masses; la deformació és simètrica si les dues masses són iguals (▶ Figura 1.20).
- En el cas de dues masses, la deformació és asimètrica si una és més gran que l'altra (▶ Figura 1.21).

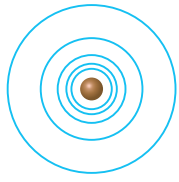


Figura 1.19. Superfícies equipotencials del camp creat per una sola massa.

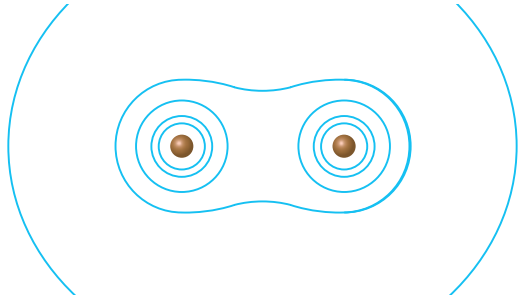


Figura 1.20. Superfícies equipotencials del camp creat per dues masses iguals.

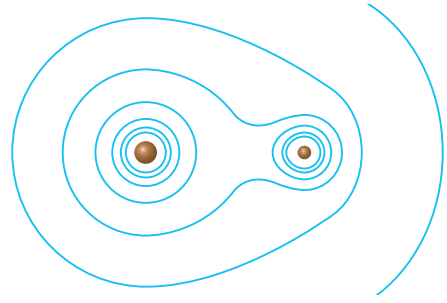


Figura 1.21. Superfícies equipotencials del camp creat per una massa que és el doble que l'altra.

Propietats de les superfícies equipotencials

Les superfícies equipotencials no es poden tallar.

Si ho fessin, el punt de tall tindria dos valors de potencial, la qual cosa és impossible perquè el potencial té un valor únic en cada punt.

Les superfícies equipotencials són perpendiculars a les línies de camp.

Observa en les figures 1.22, 1.23 i 1.24 el resultat de representar, en cada cas, les línies de camp i les superfícies equipotencials:

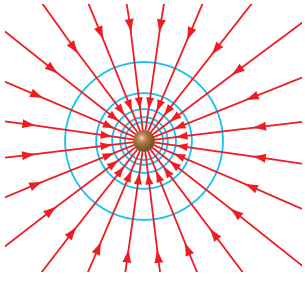


Figura 1.22. Línies de camp i superfícies equipotencials del camp creat per una sola massa.

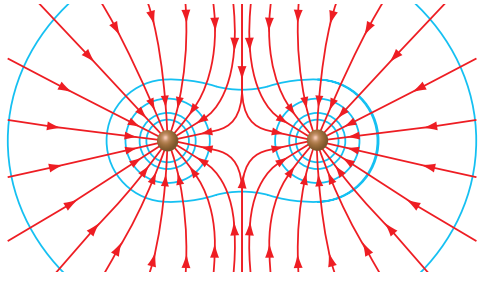


Figura 1.23. Línies de camp i superfícies equipotencials del camp creat per dues masses iguals.

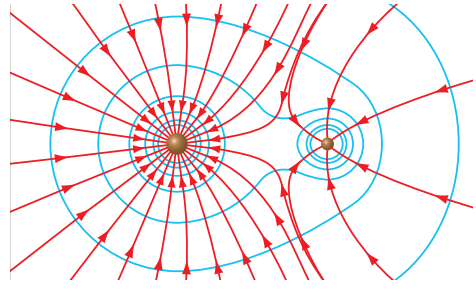


Figura 1.24. Línies de camp i superfícies equipotencials del camp creat per dues masses, on una massa és el doble que l'altra.

4 El moviment dels cossos celestes

Resulta fàcil imaginar que una de les primeres preguntes que l'ésser humà es devia fer quan va tenir consciència d'ell mateix va ser què representaven els cossos brillants que veia al cel les nits clares. La curiositat el va portar a adonar-se que alguns d'aquests astres canviaven de posició d'una nit a l'altra, mentre que d'altres semblaven immòbils (▸ Figura 1.26).

D'aquesta manera va néixer l'**astronomia** com a activitat científica dedicada, en primer terme, a fer els mesuraments que havien de permetre descriure els fenòmens que s'observaven al cel. El segon pas era trobar la causa que provocava aquests fenòmens.

Les primeres teories explicaven que la Terra era el centre de l'univers i que al seu voltant giraven els astres que s'observava que es movien. Aquestes teories s'anomenen **geocèntriques**, i es basaven en l'experiència pròpia dels observadors, que sentien que ells mateixos es mantenien immòbils, mentre que altres cossos es desplaçaven de manera més o menys uniforme a la volta celeste. Tret d'algunes excepcions, aquestes teories es van mantenir fins al segle XVI, l'època en què es van començar a obrir pas les teories **heliocèntriques**, que consideraven que el Sol era el centre de l'univers i al seu voltant giraven els altres astres.

Figura 1.26. Els estels i els planetes canvien de posició al llarg de la nit a causa de la rotació terrestre, tal com s'aprecia en aquesta fotografia de llarga exposició. Tot i així, la posició dels estels no varia d'una nit a l'altra, mentre que els planetes «vaguen» pel cel. Les traces de colors corresponen a la llum que rebem dels estels (principalment) i dels planetes.

4.1. L'astronomia antiga

En l'antiguitat clàssica es coneixien set astres que es movien sobre el fons d'estels: el Sol, la Lluna, Mercuri, Venus, Mart, Júpiter i Saturn. Els cinc últims presentaven un moviment irregular quan s'observaven durant períodes llargs. Se n'estudiava el moviment i s'analitzaven les variacions que experimentava la seva brillantor en el decurs del temps: la brillantor augmentava quan eren més a prop. En un moment concret, Mart semblava que invertia el moviment i retrocedia en el cel; aquest efecte es coneixia amb el nom de **moviment retrògrad** (▸ Figura 1.25)

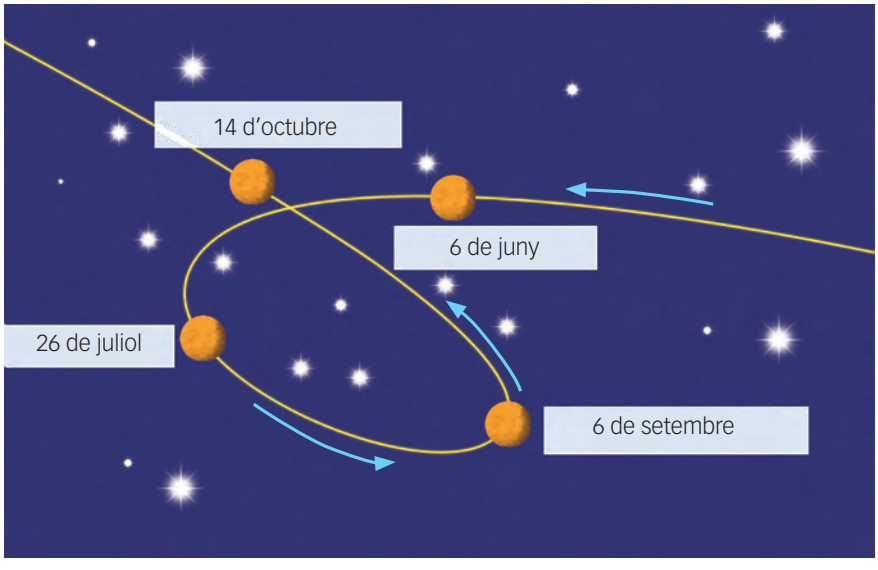


Figura 1.25. El moviment de Mart (representat pel punt taronja) no evolucionava de manera contínua. En un moment determinat semblava que el planeta s'endarreria respecte de la posició anterior: s'anomenava **moviment retrògrad**.

La paraula *planeta* procedeix del grec πλανητης, que vol dir "errant", sense rumb. Amb aquest nom els antics grecs designaven qualsevol cos que semblava que es mogués de *manera erràtica* sobre el fons d'estels fixos que formaven el cel nocturn.

Figura 1.27. Representació de la paral·laxi estel·lar. Si observem la posició de l'estel més proper en dos instants separats 6 mesos, veurem que canvia la seva posició aparent respecte dels estels més allunyats.

Aristòtil (384-322 aC) va prendre per certa la idea d'Èudox de Cnidos (408-355 aC) que l'univers estava constituït per 27 esferes concèntriques que giraven al voltant de la Terra. A la més exterior, que va anomenar esfera celeste, suposava que hi havia els estels en posicions fixes, ja que no se n'apreciava moviment. Aquesta esfera celeste feia una volta completa cada dia, girant d'est a oest, al voltant d'un eix que passava pels pols Nord i Sud de la Terra. Més enllà de l'esfera celeste va suposar que n'hi havia una altra, en la qual hi havia el **mòbil primari** (*primum mobile*), que la feia girar a un ritme regular.

Després de fer diversos estudis, Aristòtil hi va afegir 29 esferes més per mirar d'explicar el moviment irregular dels planetes. Amb tot, no va poder justificar que el Sol i els planetes de vegades apareguessin més pròxims a la Terra i altres vegades més allunyats (el moviment retrògrad).

Aristarc de Samos (310-230 aC) va imaginar un sistema **heliocèntric** segons el qual el Sol era el centre de l'univers, i la Terra, la Lluna i els altres cinc planetes giraven al seu voltant, cadascun amb la seva velocitat i en òrbites de radis diferents. La Terra també girava al voltant de si mateixa; per tant, tenia dos moviments: un de rotació, amb periodicitat diària, i l'altre de **translació**, amb periodicitat anual. El conjunt estava situat dins una esfera d'estels que no tenia cap mena de rotació.

Aristarc recollia les idees que havia exposat el segle anterior **Heràclides del Pont** (388-315 aC), que, en considerar el Sol com la font de l'escalfor i la vida, suposava que havia d'estar al centre de l'univers.

Aquesta teoria va ser rebutjada davant les geocèntriques, no tan sols perquè s'oposava a la idea filosòficament indiscutible que la Terra era el centre de l'univers, sinó perquè, si fos certa, un mateix estel s'hauria de veure en diferents posicions del fons celeste segons la posició que tingués la Terra dins el gir anual que feia al voltant del Sol.

Aquest fenomen, conegut com a **paral·laxi estel·lar**, no l'havia observat cap astrònom fins aquell moment, i hauria de ser evident amb els estels més pròxims a la Terra. Aristarc va justificar el fet que no s'observés amb l'argument que tots els estels es trobaven molt allunyats de la Terra.

Al segle XIX, **Friedrich Bessel** (1784-1846) va fer observacions més precises que van demostrar l'existència del fenomen de la paral·laxi dels estels (▸ Figura 1.27) i va ser capaç de determinar la distància de 61 Cygni i d'altres estrelles «pròximes» al sistema solar. Aquesta va ser històricament la primera prova de la rotació de la Terra al voltant del Sol.

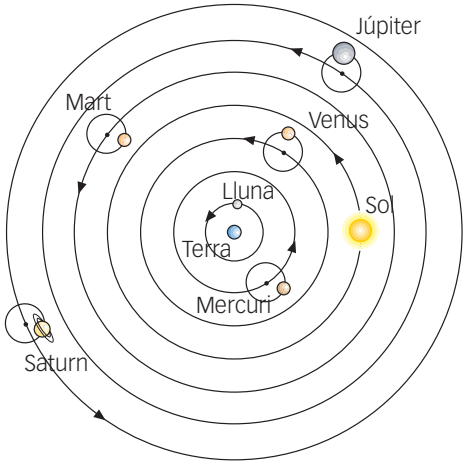


Figura 1.28. Disposició dels astres a l'univers, segons el **model geocèntric** de Ptolemeu. Va publicar la seves teories a l'obra *Gran Sintaxi Matemàtica*, coneguda a Occident com a *Almagest* per la seva traducció a l'àrab.

4.2. El model ptolemaic

Claudi Ptolemeu (90-168 dC aprox.) va ser un dels astrònoms que més va contribuir al manteniment de les **teories geocèntriques**. Va elaborar un complex model geomètric que permetia donar una explicació a les distàncies canviants entre els planetes i la Terra, mantenint la immobilitat d'aquesta i la seva posició com a element central de l'univers. Va publicar les seves teories a l'obra *Gran Sintaxi Matemàtica*, coneguda com a *Almagest* per la traducció a l'àrab.

Va imaginar que els planetes giraven al voltant de la Terra descrivint petites òrbites circulars que va anomenar **epicicles**, el centre de les quals es

desplaçava descrivint una òrbita circular al voltant de la Terra, que va anomenar **deferent** (▸ Figura 1.28).

Aquests dos girs, el de l'epicicle i el de la deferent, podien tenir velocitats, direccions i radis independents, la qual cosa explicava les irregularitats observades en el moviment dels planetes; concretament, explicava el **moviment retrògrad**.

Per acabar d'ajustar les dades, Ptolemeu va suposar que els planetes descrivien òrbites excèntriques, és a dir, que la Terra no estava situada al centre de l'òrbita, sinó a una certa distància. Va establir un punt, anomenat **equant**, que es troba en el diàmetre de l'òrbita, a la mateixa distància del centre que la Terra (▸ Figura 1.29).

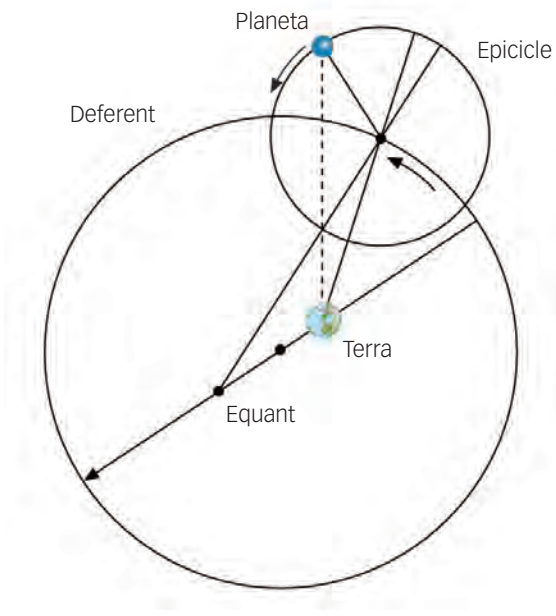
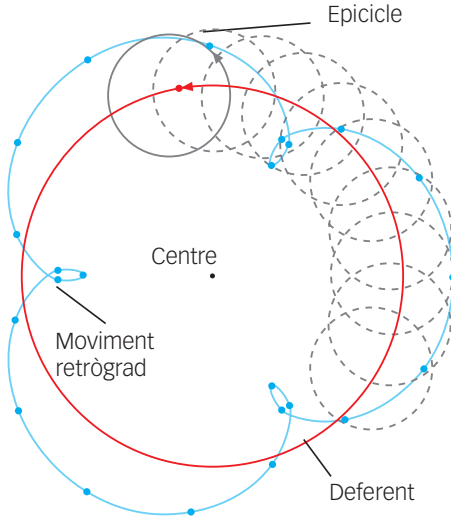


Figura 1.29. Explicació del moviment observat dels planetes mitjançant deferents i epicicles. En punts concrets del recorregut sembla que el planeta es mou cap enrere (moviment retrògrad).

Va proposar que els planetes descrivien una òrbita circular, amb un moviment circular uniforme respecte de l'equant, la qual cosa explicava el fet que el Sol semblés que es movia més ràpidament a l'hivern que a l'estiu, tal com observem a l'hemisferi nord (el període tardor-hivern dura sis dies menys que el període primavera-estiu).



En realitat, això es deu al fet que l'òrbita no és exactament circular i la velocitat de la Terra augmenta quan està més a prop del Sol (hivern a l'hemisferi nord) que quan n'està més allunyada (estiu).

Figura 1.30. L'*Almagest* va ser escrit per Claudi Ptolemeu cap a l'any 150 dC. Claudi Ptolemeu va realitzar les seves observacions a Alexandria (Egipte). Com que va ser l'astrònom i geògraf més influent de la seva època, la seva teoria geocèntrica va prevaler durant 1.400 anys.

L'*Almagest* (traducció àrab) va ser escrit en grec. El títol original és *Mathematike Syntaxis*. És un tractat astronòmic que consta de 13 llibres on s'explica el moviment del Sol, els planetes i la Lluna.

Figura 1.31. Nicolau Copèrnic.

Cos celeste	Símbol	Element químic associat
Sol	☉	or
Mercuri	☿	mercuri
Venus	♀	coure
Terra	—	–
Lluna	☾	plata
Mart	♂	ferro
Júpiter	♃	estany
Saturn	♄	plom

Símbols dels planetes.

4.3. El model copernicà

Nicolau Copèrnic (1473-1543) va idear un model matemàtic molt més simple que el de Ptolemeu, que permetia explicar les dades conegudes pel que fa al moviment dels astres. Va plantejar un sistema **heliocèntric**, amb el Sol al centre de l'univers, els planetes girant al seu voltant i la Lluna girant al voltant de la Terra. El gran avantatge del model copernicà era la seva senzillesa.

També suposava l'existència d'una esfera immòbil on es localitzaven els estels, que estaven fixos. Va explicar que el moviment aparent dels estels era conseqüència de la rotació de la Terra. Les trajectòries irregulars que seguien els planetes quan s'observaven des de la Terra (moviment retrògrad) també eren conseqüència del moviment d'aquesta.

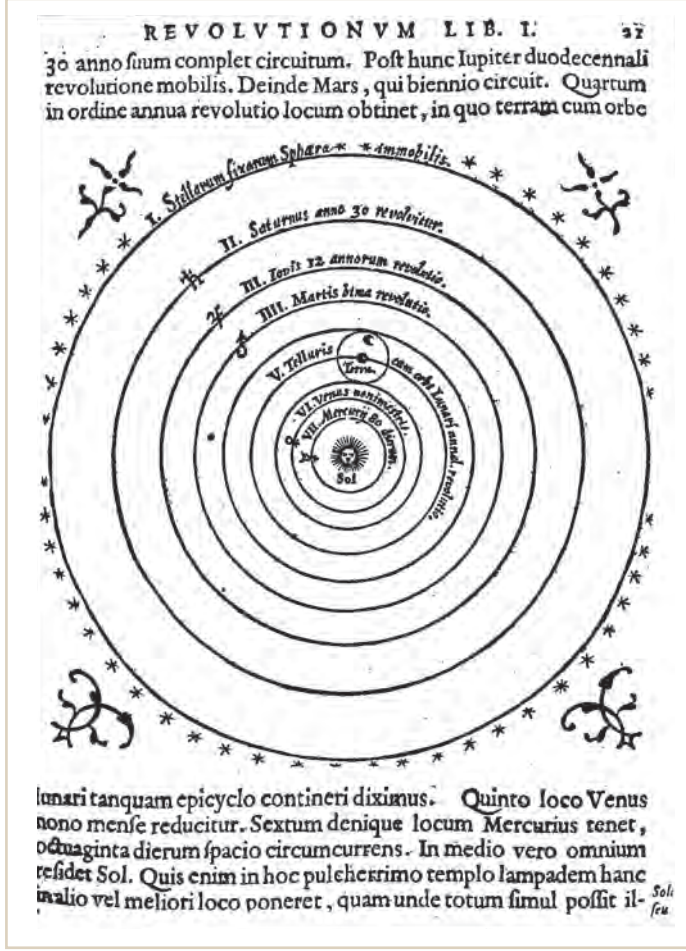


Figura 1.32. Model heliocèntric de Nicolau Copèrnic.

I. Esfera immòbil dels estels.
II. Saturn. Període: 30 anys.
III. Júpiter. Període: 12 anys.
IV. Mart. Període: 2 anys.
V. Terra. Període: 1 any, amb l'òrbita de la Lluna.
VI. Venus. Període: 9 mesos.
VII. Mercuri. Període: 80 dies.

Copèrnic va publicar totes aquestes conclusions a l'obra *Sobre les revolucions dels cossos celestes* (a l'original llatí, *De Revolutionibus Orbium Coelestium*) l'any 1543. També va arribar a establir dades bastant precises dels períodes orbitals dels planetes al voltant del Sol. A la figura 1.32 es mostra una imatge de la seva representació de l'univers i les dades corresponents.

De Copèrnic a Galileu

Tycho Brahe (1546-1601) va ser un astrònom destacat, i la seva principal contribució a l'avenç de l'astronomia fou el fet d'haver obtingut mesures molt precises de les posicions angulars dels planetes i els estels. Per fer-ho va utilitzar sextants i brúixoles, ja que encara no s'havia inventat el telescopi.

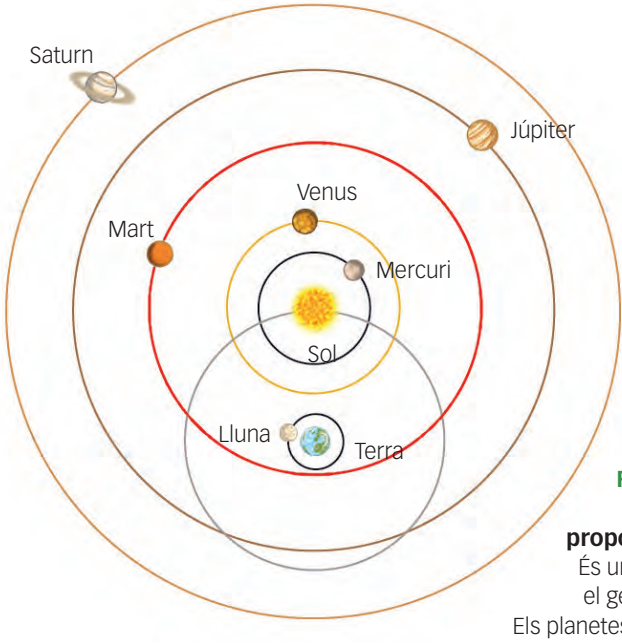


Figura 1.33. Esquema del model d'univers proposat per Tycho Brahe. És un model intermedi entre el geocèntric i l'heliocèntric. Els planetes giren al voltant del Sol, mentre que aquest gira al voltant de la Terra.

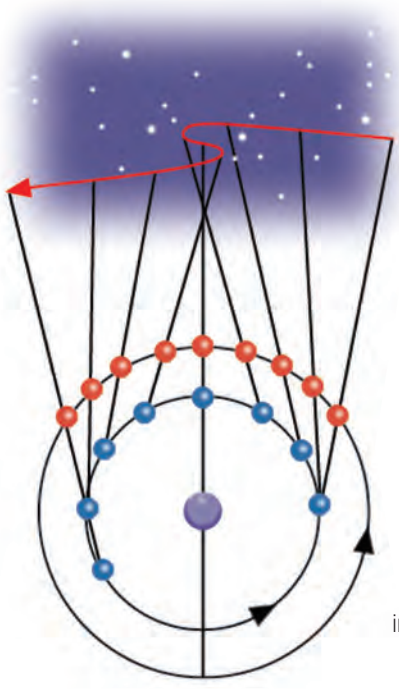


Figura 1.34. El model heliocèntric de Copèrnic permet explicar fàcilment el moviment retrògrad de Mart que s'observa des de la Terra. En el dibuix es mostra la imatge que veuríem des de la Terra en projectar la imatge de Mart en la volta celeste.

Com a resultat d'aquestes mesures, va proposar un model d'univers en el qual **Galileu Galilei** (1562-1642) va perfeccionar el telescopi que havia inventat un holandès, probablement **Hans Lippershey** (1570-1619), i el va fer servir per fer observacions astronòmiques, cosa que va permetre obtenir proves indiscutibles de l'exactitud del sistema de Copèrnic. Va observar satèl·lits girant al voltant de Júpiter, taques al Sol, fases a Venus i zones clares i fosques a la Lluna. Tot i això, es va oposar a les òrbites el·líptiques que havia apuntat Kepler. Segons ell, el cercle era la corba perfecta.

Figura 1.35. Tycho Brahe (1546-1601). Aquest astrònom danès va realitzar diverses mesures astronòmiques sobre el sistema solar i més de 700 estels. Va adoptar una teoria intermèdia entre la teoria de Ptolemeu i la de Copèrnic. Va suposar que els cinc planetes coneguts giraven al voltant del Sol, alhora que feia girar aquest al voltant de la Terra. Tot i que la seva teoria era poc encertada, les seves mesures astronòmiques van ser utilitzades pel seu ajudant, Johannes Kepler, i van tenir un paper fonamental en la formulació de les tres lleis de Kepler sobre el moviment dels planetes.

Figura 1.36. Galileu Galilei (1564-1642). Aquest matemàtic, físic, filòsof i astrònom italià, a més de la seva aportació en el camp de les matemàtiques i de la física, és conegut per les seves observacions astronòmiques, les quals el van portar a defensar el sistema heliocèntric de Copèrnic. La seva acèrrima defensa d'aquest model –es diu que més que la defensa van ser els insults que dirigia a diferents personalitats eclesiàstiques– va ser la causa que el Sant Ofici el condemnés el 1633 a l'obligació de resar una vegada a la setmana durant tres anys i a la reclusió a la seva vil·la d'Arcetri.

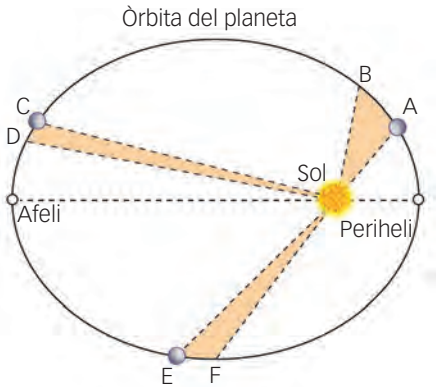


Figura 1.37. D'acord amb els estudis de Kepler, un planeta tarda el mateix temps a passar de A a B que de C a D o de E a F. En conseqüència, la seva velocitat és més gran al periheli que a l'afeli.

Figura 1.38. Johannes Kepler, el creador de les lleis que porten el seu nom.

4.4. La cinemàtica dels planetes

Els estudis de **Johannes Kepler** (1571-1630) van permetre descriure el moviment dels planetes. Va utilitzar els seus grans coneixements matemàtics per trobar relacions entre les dades que havia observat el seu mestre, Brahe, i amb elles va compondre un model heliocèntric de l'univers.

Va començar treballant de la manera tradicional, plantejant trajectòries excèntriques i moviments en epicicles, però a l'hora d'intentar ajustar l'òrbita de Mart a les dades de Brahe va trobar que aquelles dades el situaven 8 minuts d'arc fora de l'esquema que havia establert Copèrnic. Això li va fer pensar que Mart no descrivia una òrbita circular. Va provar altres formes per a les òrbites i va trobar que les dades concordaven amb el fet que els planetes descrivien òrbites el·líptiques que tenien el Sol en un dels focus. L'excentricitat d'aquelles el·lipses va resultar molt petita, fora del cas de l'òrbita de Mercuri, cosa que indica que les òrbites són gairebé circulars.

En analitzar les dades de Brahe, Kepler també va descobrir que la velocitat dels planetes no és constant, sinó que el radi vector que els uneix amb el Sol descriu àrees iguals en temps iguals. En conseqüència, la velocitat dels planetes és més gran quan estan pròxims al Sol (al periheli) i més petita quan es mouen per les zones més allunyades (a l'afeli) (▸ Figura 1.37).

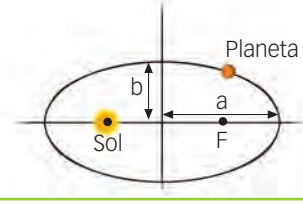
Finalment, va trobar una relació entre la mida de les òrbites i el període de translació dels planetes al voltant del Sol.

Les lleis de Kepler

Com a conseqüència dels seus estudis, va enunciar les tres lleis del moviment planetari (conegudes com a lleis de Kepler). Les lleis de Kepler representen una descripció cinemàtica del sistema solar.

Primera llei

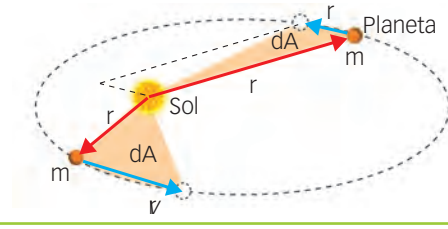
1. Tots els planetes es mouen al voltant del Sol seguint òrbites el·líptiques. El Sol està en un dels focus de l'el·lipse. (Al dibuix, *a* i *b* són els semieixos de l'el·lipse.)



Segona llei

2. Els planetes es mouen amb velocitat areolar constant. És a dir, el vector de posició de cada planeta respecte del Sol, *r*, escombra àrees iguals en temps iguals.

$$\frac{dA}{dt} = \text{const.}$$



Tercera llei

3. Per a tots els planetes:

$$\frac{T^2}{a^3} = k \text{ (constant)}$$

on *a* és el semieix major de l'el·lipse i *T* és el període de translació del planeta.

(Nota: en la pràctica, *a* és la distància mitjana del planeta al Sol.)

Planeta	Distància al Sol (m)	Període (s)	T^2/a^3 (s^2/m^3)
Mercuri	$5{,}79 \cdot 10^{10}$	$7{,}73 \cdot 10^{6}$	$3{,}08 \cdot 10^{-19}$
Venus	$1{,}08 \cdot 10^{11}$	$1{,}93 \cdot 10^{7}$	$2{,}96 \cdot 10^{-19}$
Terra	$1{,}50 \cdot 10^{11}$	$3{,}16 \cdot 10^{7}$	$2{,}96 \cdot 10^{-19}$
Mart	$2{,}27 \cdot 10^{11}$	$5{,}93 \cdot 10^{7}$	$3{,}01 \cdot 10^{-19}$
Júpiter	$7{,}78 \cdot 10^{11}$	$3{,}73 \cdot 10^{8}$	$2{,}95 \cdot 10^{-19}$
Saturn	$1{,}43 \cdot 10^{12}$	$9{,}27 \cdot 10^{8}$	$2{,}94 \cdot 10^{-19}$
Urà	$2{,}87 \cdot 10^{12}$	$2{,}65 \cdot 10^{9}$	$2{,}97 \cdot 10^{-19}$
Neptú	$4{,}50 \cdot 10^{12}$	$5{,}19 \cdot 10^{9}$	$2{,}96 \cdot 10^{-19}$

Les lleis de Kepler són **lleis empíriques** que no expliquen les causes d'aquests moviments; per fer una anàlisi d'aquestes causes caldrà esperar els treballs posteriors de Newton.

Amb tot, l'estudi del moviment dels planetes ens portarà a algunes conclusions fonamentals per conèixer la causa que el provoca. Ho abordarem en els apartats següents.

Les distàncies astronòmiques

Quan estudiem el sistema solar treballem amb distàncies molt grans; per això, en comptes d'expressar-les amb metres sovint es fan servir altres unitats, com ara:

- **Unitat astronòmica** (UA). És la distància mitjana entre la Terra i el Sol:

  $$1 \text{ UA} = 149.600.000.000 \text{ m} = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

  Parlem de distància mitjana perquè l'òrbita de la Terra és una el·lipse i no sempre es troba a la mateixa distància del Sol. Aquesta distància és el semieix major de l'el·lipse.

- **Any llum**. És la distància que recorre la llum en un any:

  $$1 \text{ any llum} = 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

  Si utilitzem les determinacions més precises:

  $$1 \text{ any llum} = 63.241 \text{ UA}$$

- **Parsec** (pc). És la distància a la qual 1 UA subtendeix un angle d'1 segon d'arc (▸ Figura 1.39).

  Podem dir que un estel es troba a una distància d'1 pc si la seva paral·laxi és 1 segon d'arc.

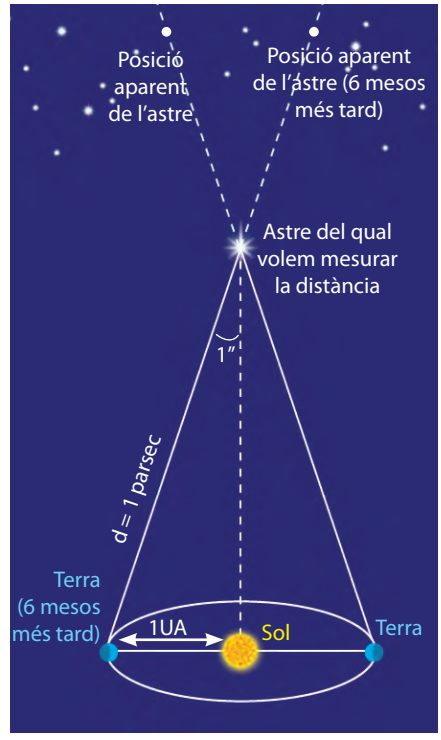


Figura 1.39. Representació del parsec, 1 pc · 3,26 anys llum.

EXEMPLE RESOLT

7 A l'exterior del sistema solar s'hi detecta un nou planeta nan que és a una distància del Sol el doble del radi de l'òrbita de Neptú. Si suposem que recorre una òrbita circular, quant de temps tardarà a fer la volta al Sol?

El període de Neptú en la seva òrbita al voltant del Sol és $T_{\text{Neptú}} = 5{,}2 \cdot 10^9$ s.

Els dos planetes giren al voltant del Sol. D'acord amb la tercera llei de Kepler:

$$\frac{T^2_{\text{planeta}}}{r^3_{\text{planeta}}} = \frac{T^2_{\text{Neptú}}}{r^3_{\text{Neptú}}} \rightarrow \frac{T^2_{\text{planeta}}}{(2 \cdot r_{\text{Neptú}})^3} = \frac{T^2_{\text{Neptú}}}{r^3_{\text{Neptú}}} \rightarrow \frac{T^2_{\text{Planeta}}}{2^3 \cdot r^3_{\text{Neptú}}} = \frac{T^2_{\text{Neptú}}}{r^3_{\text{Neptú}}} \rightarrow T_{\text{planeta}} = \sqrt{2^3 \cdot T^2_{\text{Neptú}}} = \sqrt{2^3 \cdot (5{,}2 \cdot 10^9)^2 \text{ s}^2} = 1{,}5 \cdot 10^{10} \text{ s}$$

ACTIVITATS

13. Tenint en compte les lleis de Kepler, explica, servint-te d'un dibuix, en quina part de la seva òrbita al voltant del Sol (afeli o periheli) es troba la Terra a l'hivern i a l'estiu, si s'acompleix que a l'hemisferi nord el període tardor-hivern dura sis dies menys que el de primavera-estiu.

14. La distància mitjana de Mart al Sol és 1,468 vegades la de la Terra al Sol. Troba el nombre d'anys terrestres que dura un any marcià.

15. El període de rotació de Júpiter al voltant del Sol és 12 vegades més gran que el període que correspon a la Terra. Calcula quantes vegades és superior la distància mitjana (semieix de l'el·lipse) des de Júpiter fins al Sol a la distància mitjana entre la Terra i el Sol.

Obres escrites per Kepler

Kepler va publicar les dues primeres lleis a l'obra *Astronomia nova* (1609), i la tercera a *De Harmonices mundi* (1619). Hi ha altres obres en què va descriure els seus descobriments: *Mysterium cosmographicum* (1596), *Epitome astronomiae copernicanae* (1618) i les *Taules rudolfines* (1627), que són un compendi de les dades que havia obtingut Tycho Brahe i les conclusions que ell mateix va establir a partir d'aquestes dades.

4.5. La dinàmica dels planetes

Els estudis de **Kepler** van permetre descriure el moviment dels planetes en termes físics, però per què tenen aquest moviment? Quina és la causa que els obliga a descriure aquestes òrbites? Resoldre el problema de la causalitat del moviment planetari no va ser gens fàcil per als científics de l'època. Hooke i Halley van suposar que el moviment dels planetes era causat per una força atractiva que exercia el Sol, el valor de la qual depenia del quadrat de la distància al planeta. Kepler va pensar que aquesta força era de tipus magnètic.

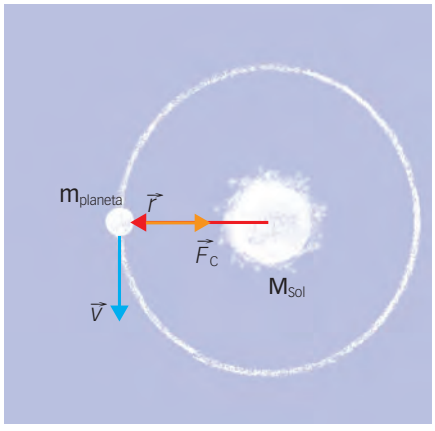


Figura 1.40. El Sol exerceix una acció a distància sobre els planetes.

Va ser **Newton** qui va trobar la resposta. Partint de les lleis de Kepler va arribar a determinar l'existència de la llei de la gravitació universal, amb la qual va explicar no tan sols que el Sol atrau els planetes amb una força el valor de la qual varia inversament amb el quadrat de la distància i que és la responsable del seu moviment, sinó també que la interacció gravitatòria és una acció a distància. Newton va arribar a determinar l'expressió matemàtica de la força responsable de la interacció gravitatòria. Vegem com ho va fer.

Tal com passa amb qualsevol cos que gira, el moviment d'un planeta està causat per una força centrípeta (▸ Figura 1.40):

$$\vec{F}_C = m \cdot \vec{a}_C = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_r \qquad [1]$$

Tenint en compte la relació que hi ha entre magnituds lineals i angulars, i que el moviment dels planetes és periòdic:

$$v = \omega \cdot r; \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_C = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r \rightarrow F_C = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r \qquad [2]$$

La tercera llei de Kepler estableix una relació entre el període dels planetes i el seu radi vector: $T^2 = k \cdot r^3$. Substituïm aquesta expressió a [2]:

$$F_C = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = m \cdot \frac{4\pi^2}{k \cdot r^3} \cdot r = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2}$$

Arribem a la conclusió que la força centrípeta que explica el moviment dels planetes varia inversament amb el quadrat de la distància (i és proporcional a la massa del planeta, m). És a dir:

$$F_C = f \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Com que el Sol havia de ser el causant de la força que movia els planetes, Newton va establir que $\frac{4\pi^2}{k}$ havia de ser proporcional a la massa del Sol, M:

$$\frac{4\pi^2}{k} = G \cdot M$$

Aquest pas genial va obrir el camí cap a una nova física. Newton va completar la fórmula que proporciona la força atractiva que exerceix el Sol sobre els planetes i que actua com una força centrípeta, responsable del seu moviment:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

- M: massa del Sol.
- m: massa del planeta.
- r: distància del Sol al planeta.
- G: constant de gravitació universal.

5 Camp gravitatori dels cossos celestes

En l'univers existeixen cossos i sistemes amb una gran massa, com galàxies, estrelles, planetes o satèl·lits, i cada un crea un camp gravitatori. El moviment dels satèl·lits al voltant dels planetes i d'aquests al voltant d'una estrella o la rotació galàctica són conseqüència de la força d'atracció gravitatòria que els uns exerceixen sobre els altres.

Analitzarem l'univers des del punt de vista de la interacció gravitatòria per intentar comprendre'n l'evolució. Relacionarem l'òrbita que descriuen amb la seva energia. De vegades, l'anàlisi ens portarà a suposar l'existència de matèria no visible, l'anomenada **matèria fosca**, imprescindible per explicar el moviment de les galàxies.

5.1. El camp gravitatori de la Terra i els planetes

La Terra i qualsevol dels planetes són cossos que exerceixen una atracció gravitatòria sobre qualsevol altre cos que estigui a prop. Aquesta força, que habitualment anomenem **pes**, és la responsable que els cossos caiguin lliurement.

Considerem un cos de massa m que està a una distància r d'un planeta de massa M_P. Comparem l'expressió de la força gravitatòria i la força pes:

$$F_G = \frac{G \cdot M_P \cdot m}{r^2}; \qquad P = m \cdot g$$

I deduïm que el valor de g, l'acceleració de la gravetat, depèn de la massa del planeta i de la distància a què es troba el cos; g és més petita com més gran sigui la distància al centre del cos.

$$F_G = P \rightarrow \frac{G \cdot M_P \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot g \rightarrow g = \frac{G \cdot M_P}{r^2}$$

Sovint s'anomena g_0 el valor de g a la superfície del planeta. En aquest cas, r coincideix amb el radi del planeta (▶ Taula 1.1).

Astre	Massa (kg)	Radi (m)	g (m/s^2)
Terra	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	9,81
Lluna	$7{,}2 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	1,59
Mart	$6{,}5 \cdot 10^{23}$	$3{,}38 \cdot 10^{6}$	3,80

Taula 1.1. Alguns valors del camp gravitatori a la superfície de planetes o satèl·lits.

ACTIVITATS

16. Si una persona de 75 kg de massa és en un planeta la massa i el radi del qual són la quarta part dels de la Terra, quin serà el seu pes en aquest planeta?

Dada: $g_{0\,\text{Terra}} = 9{,}8$ m/s^2.

Solució: 2.940 N

EXEMPLE RESOLT

8 Contesta.

a) Quin pes té un objecte que s'eleva des del nivell del mar fins a una altura igual a dues vegades el radi terrestre?

b) Júpiter té una densitat mitjana d'$1{,}34 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}. Quin és el valor de l'acceleració de la gravetat a la seva superfície?

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}; $R_J = 7{,}18 \cdot 10^7$ m.

a) El valor de g a aquesta altura és el següent:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{(3 \cdot R_T)^2} = \frac{G \cdot M_T}{9 \cdot R_T^2} = \frac{g_0}{9} \rightarrow P = m \cdot g = \frac{1}{9}\,\text{m} \cdot \text{g}$$

El pes, com el valor de g, **es redueix a la novena part**.

b) El valor de g a la superfície de Júpiter és el següent:

$$g = \frac{G \cdot M_J}{R_J^2} \qquad [1]$$

Relaciona la densitat amb la massa i el volum:

$$d = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_J^3}$$

Aïlla M_J i substitueix-la en l'expressió [1]:

$$g = \frac{G \cdot d \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_J^3}{R_J^2} = G \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot d \cdot R_J \rightarrow$$

Escriu totes les magnituds en unitats del SI:

$$\rightarrow g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1{,}34 \cdot 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 7{,}18 \cdot 10^7\,\text{m}$$

$$g = \mathbf{26{,}88\ N/kg}$$

5.2. El camp gravitatori del Sol i el sistema solar

Podem considerar el Sol com una gran massa de forma esfèrica al voltant de la qual giren els planetes amb òrbites el·líptiques. En la majoria dels casos, l'excentricitat de l'el·lipse és petita, per la qual cosa podem aproximar-la a òrbites esfèriques.

A més, els planetes estan molt lluny del Sol, de manera que tots es poden considerar masses puntuals.

Podem fer servir les expressions deduïdes per a una massa puntual per calcular el camp gravitatori creat pel Sol a una distància r i la força d'atracció gravitatòria que exerceix sobre un planeta situat en aquest punt:

$$\vec{g} = -\frac{G \cdot M_{Sol}}{r^2} \cdot \vec{u}_r \; ; \; \vec{F}_G = m_{planeta} \cdot \vec{g} = -\frac{G \cdot M_{Sol} \cdot m_{planeta}}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad [1]$$

El moviment dels planetes

Tal com va enunciar Newton, la força gravitatòria que exerceix el Sol sobre els planetes és la força centrípeta responsable del seu moviment circular (▸ Figura 1.41).

$$\vec{F}_C = m_{planeta} \cdot \vec{a}_C = -m_{planeta} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_r \qquad [2]$$

Si relacionem les expressions [1] i [2], obtenim que:

$$\frac{G \cdot M_{Sol} \cdot m_{planeta}}{r^2} = m_{planeta} \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Sol}}{r}} \qquad [3]$$

Conclusió: els planetes giren a una velocitat més petita com més gran és la seva distància al Sol. La velocitat a què gira un planeta no depèn de la seva massa; només depèn de la massa del Sol i de la distància del planeta al Sol.

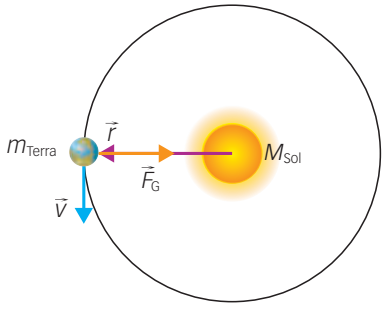


Figura 1.41. La força gravitatòria amb què la Terra és atreta pel Sol és la força centrípeda responsable del seu moviment circular al voltant del Sol.

Si relacionem la velocitat lineal del planeta amb el seu període de revolució, $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, i el substituïm a [3], obtenim que:

$$\frac{2\pi}{T} \cdot r = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Sol}}{r}}$$

Si elevem al quadrat i reordenem, obtenim que:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{G \cdot M_{Sol}}$$

Conclusió: per a qualsevol planeta que giri al voltant del Sol, $\frac{T^2}{r^3} = \text{ct.}$ Aquesta conclusió és la tercera llei de Kepler.

Altres sistemes planetaris

A l'univers podem trobar altres sistemes similars al descrit, en què un cos central de gran massa exerceix una atracció gravitatòria sobre altres cossos de menys massa que giren al seu voltant.

Dins del sistema solar hi ha planetes com la Terra, Mart, Júpiter o Saturn que tenen diversos satèl·lits que giren al seu voltant. Fora del sistema solar hi ha estrelles amb els seus propis sistemes planetaris. En tots els casos, es compleix que:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_C; \; v_{cos\ que\ gira} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{cos\ central}}{r}}$$

$\left(\frac{T^2}{r^3}\right)_{cos\ que\ gira} = \text{ct.}$ El valor de la constant depèn de $M_{cos\ central}$.

5.3. L'energia del cos que gira

Els planetes que giren al voltant del Sol i els satèl·lits que giren al voltant dels planetes tenen una energia cinètica deguda al seu moviment i una energia potencial deguda a la posició que ocupen respecte al cos que crea el camp.

Imaginem que M és la massa del cos central i m, la massa del cos que gira:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Per al cos que orbita, $F_G = F_C$, d'on es dedueix que:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Això ens permet obtenir una forma més simplificada per a la seva energia mecànica, E_M:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Conclusió: els cossos que giren al voltant d'un altre cos amb una massa més gran que els atrau tenen una energia mecànica negativa el valor de la qual és inversament proporcional a la distància entre aquests.

L'energia mecànica del cos que gira esdevé zero quan està a una distància infinita respecte al cos que crea el camp, és a dir, quan surt del seu camp gravitatori.

5.4. Velocitat d'escapament

Anomenem **velocitat d'escapament** la velocitat que ha de tenir un cos per alliberar-se de l'atracció gravitatòria d'un altre cos.

Segons el que s'acaba de deduir, aquesta velocitat ha de fer que el cos aconsegueixi una $E_M \geq 0$.

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \geq 0$$

Reordenant l'expressió, la velocitat d'escapament ha de ser la següent:

$$v_{\text{escapament}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}}$$

Observa que la velocitat d'escapament no depèn de la massa del cos que gira, sinó que depèn d'aquests dos factors:

- La massa del cos que crea el camp gravitatori M.
- La distància a què es troba del centre d'aquest cos r.

Sovint es parla de la velocitat d'escapament d'un planeta per referir-se a la velocitat a què cal llançar un cos des de la seva superfície perquè surti del camp gravitatori que crea el planeta. En aquest cas, M és la massa del planeta, i r, el seu radi.

Velocitat d'escapament per a diversos cossos celestes

	Sol	Mercuri	Venus	Terra	Mart	Júpiter	Saturn	Urà	Neptú
Radi (km)	695.000	2.440	6.052	6.370	3.397	71.492	60.268	25.560	24.746
Massa (kg)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$3{,}30 \cdot 10^{23}$	$4{,}87 \cdot 10^{24}$	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$5{,}69 \cdot 10^{26}$	$8{,}69 \cdot 10^{25}$	$1{,}02 \cdot 10^{26}$
$v_{\text{escapament}}$ (km/s)	618,02	4,25	10,36	11,21	5,02	59,56	35,49	21,29	23,50

EXEMPLE RESOLT

9 CoRoT-7b, un dels planetes extrasolars més petits, gira al voltant de l'estrella CoRoT-7 en una òrbita gairebé circular de $2{,}58 \cdot 10^9$ m de radi i un període de 20,5 h. La massa del planeta és de $2{,}90 \cdot 10^{25}$ kg i el radi és d'$1{,}07 \cdot 10^7$ m. Calcula:

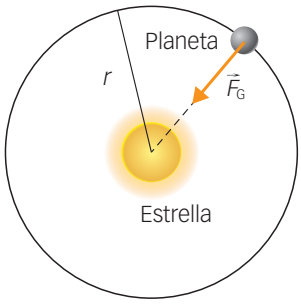
a) La massa de l'estrella CoRoT-7.

b) L'acceleració de la gravetat a la superfície del planeta CoRoT-7b.

c) La velocitat d'escapament d'aquest planeta.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Per resoldre el problema, utilitza totes les magnituds en unitats del SI.



a) Per al planeta que gira al voltant de la seva estrella:

$$F_C = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M_E \cdot m_P}{r^2} = \frac{m_P \cdot v^2}{r}$$

$$\rightarrow G \cdot \frac{M_E}{r} = v^2 \qquad [1]$$

Relaciona v amb T:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$$

Substitueix en [1] i aïlla la massa de l'estrella:

$$M_E = \frac{(2\pi)^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

$$M_E = \frac{(2\pi)^2 \cdot (2{,}58 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (20{,}5 \cdot 3.600)^2} = \mathbf{1{,}87 \cdot 10^{30}\ kg}$$

b) Calcula g a la superfície del planeta:

$$g = \frac{G \cdot m_P}{R_P^2}$$

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}90 \cdot 10^{25}}{(1{,}07 \cdot 10^7)^2} = \mathbf{16{,}89\ \frac{m}{s^2}}$$

c) La velocitat d'escapament a la superfície del planeta és aquella que fa que un cos en aquest punt tingui una $E_M \geq 0$.

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot m_P \cdot m}{r} \geq 0$$

$$v_{escapament} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot m_P}{R_P}}$$

$$v_{escapament} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}90 \cdot 10^{25}}{1{,}07 \cdot 10^7}} = \mathbf{1{,}90 \cdot 10^4\ m/s}$$

ACTIVITATS

17. La llum del Sol triga 8 min i 20 s a arribar a la Terra i 43 min i 20 s a arribar a Júpiter. Suposant que les òrbites són circulars, calcula:

a) El període de Júpiter orbitant al voltant del Sol.

b) La velocitat orbital de Júpiter.

c) La massa del Sol.

Dades: T_{Terra} al voltant del Sol $= 3{,}15 \cdot 10^7$ s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

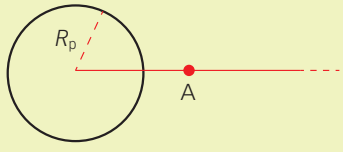
Solució: a) $3{,}735 \cdot 10^8$ s; b) $1{,}312 \cdot 10^4$ m/s; c) $2{,}013 \cdot 10^{30}$ kg

18. Es deixa caure lliurement un objecte des d'una distància «infinita» d'un planeta de radi R_P. Calcula:

a) La massa del planeta si la intensitat de la gravetat a la superfície val g_0.

b) La velocitat en arribar a la superfície del planeta.

c) La velocitat de l'objecte en passar per un punt A en què la gravetat val $g_0/2$.



Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$; $g_0 = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$; $R_P = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Solució: a) $5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg; b) $1{,}117 \cdot 10^4$ m/s; c) $9{,}396 \cdot 10^3$ m/s

19. Un planeta de 10^{25} kg de massa gira al voltant d'una estrella seguint una òrbita circular de radi $r = 10^8$ km i període $T = 2$ anys terrestres.
Calcula:

a) La massa M de l'estrella.

b) L'energia mecànica del planeta.

c) El mòdul del moment angular del planeta respecte al centre de l'estrella.

d) La velocitat angular d'un altre planeta més allunyat de l'estrella que descriu una òrbita circular de radi igual al doble del primer, $2r$.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$. Considera que 1 any terrestre = 365 dies.

Solució: a) $1{,}488 \cdot 10^{29}$ kg; b) $-4{,}962 \cdot 10^{32}$ J; c) $9{,}96 \cdot 10^{39}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$; d) $3{,}52 \cdot 10^{-8}$ rad/s

20. La massa de Mart, el seu radi i el radi de la seva òrbita al voltant del Sol, referits a les magnituds de la Terra, són, respectivament: $M_{Mart} = 0{,}107 \cdot M_{Terra}$, $R_{Mart} = 0{,}532 \cdot R_{Terra}$, i $r_{Mart} = 1{,}524 \cdot r_{Terra}$.
Determina amb relació a la Terra:

a) El període de rotació al voltant del Sol.

b) El valor de la gravetat i la velocitat d'escapament a la superfície de Mart amb relació als de la Terra.

Solució: a) $T_{Mart} = 1{,}88 \cdot T_{Terra}$; b) $g_M = 0{,}378 \cdot g_T$; $v_{escapament\ M} = 0{,}448 \cdot v_{escapament\ T}$

5.5. Energia i tipus d'òrbita

L'energia d'un satèl·lit determina el tipus de moviment i, en el seu cas, la forma de l'òrbita que descriu.

Suposem un cos de massa m que és en el camp creat per un altre de massa M, a una distància r d'aquest. Per al satèl·lit es compleix que:

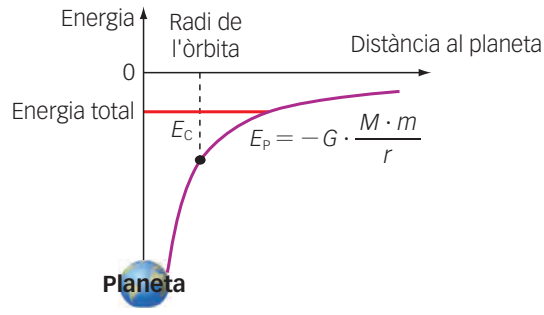
$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Es poden donar els casos següents:

Primer cas. $E_M < 0$. Si $E_M = E_P$, $E_C = 0$.
El satèl·lit ha assolit la seva altura màxima i cau per efecte de l'atracció gravitatòria.

Segon cas. $E_M < 0$. Si $E_C > 0$. El satèl·lit descriu una òrbita tancada. Hi ha dos tipus d'òrbites tancades: circular i el·líptica.

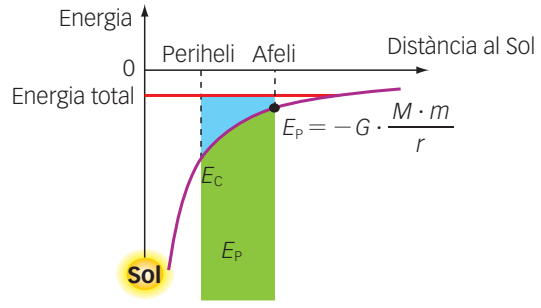
Òrbita circular



És pròpia dels satèl·lits que giren al voltant d'un planeta. Estan sempre a la mateixa distància, per això la seva energia cinètica E_C i la seva energia potencial E_P tenen sempre un valor constant.

$$E_M = E_C + E_P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Òrbita el·líptica



Al llarg de l'òrbita, l'energia cinètica i la potencial canvien, però l'energia total es manté constant. En el periheli, la velocitat és més gran.

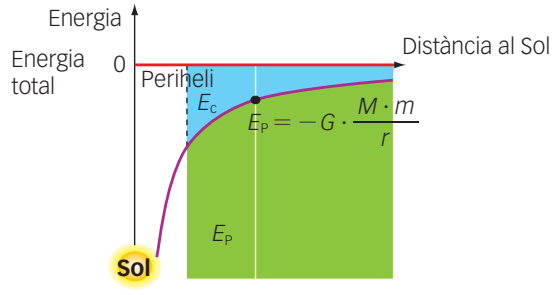
Per això l'energia cinètica és més gran i l'energia potencial és més petita.

Tenen aquest tipus d'òrbites els planetes que giren al voltant del Sol i alguns satèl·lits de comunicació.

Tercer cas. $E_M \geq 0$, el satèl·lit descriu una òrbita oberta. Es poden donar dos tipus d'òrbites obertes: parabòlica i hiperbòlica.

Òrbita parabòlica

$E_M = 0$



El cos té prou velocitat per escapar-se del camp gravitatori.

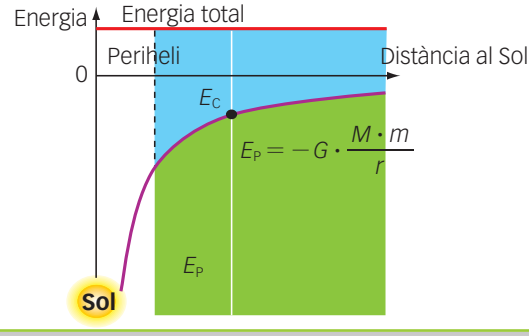
En tot moment $E_C = -E_P$.

Quan surten del camp gravitatori $E_P = 0$, la qual cosa indica que $E_C = 0$ i que la seva velocitat $v = 0$.

Descriuen aquest tipus d'òrbites alguns cometes que arriben al sistema solar amb una velocitat que els permet escapar-se del seu camp gravitatori.

Òrbita hiperbòlica

$E_M > 0$



El cos s'escaparà del camp gravitatori i, quan en surti, la seva velocitat serà més gran que zero.

En tot moment $E_C > -E_P$.

Descriuen aquest tipus d'òrbites alguns asteroides que arriben de manera momentània al sistema solar, però que en surten ràpidament.

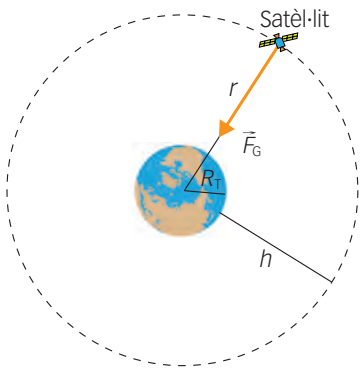


Figura 1.42. El moviment dels satèl·lits és similar al dels planetes que giren al voltant del Sol descrivint òrbites circulars o el·líptiques. Ens centrarem, però, en les òrbites circulars.

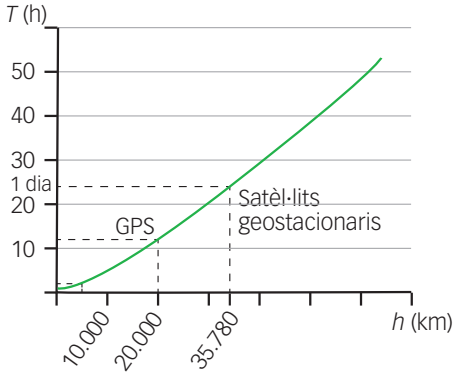


Figura 1.43. És a dir, els satèl·lits que estan a més altura tenen un període més gran. Veiem, a més, que *T* només depèn de *h*.

ACTIVITATS

21. Al febrer de 2013, l'Agència Espacial Europea va col·locar un nou satèl·lit, l'Amazones 3, en òrbita circular al voltant de la Terra.

Calcula l'altura *h* a què es troba des de la superfície terrestre (en quilòmetres) i el seu període (en hores) si la velocitat del satèl·lit és de 3.074 m/s.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T =$ 6.370 km.

Solució: a) 35.840 km; b) 23,96 h

6 Moviment de planetes i satèl·lits

A més dels cossos que poblen l'espai de manera natural, les tecnologies més recents han permès a l'ésser humà col·locar-hi satèl·lits artificials amb el fi de conèixer altres àmbits de l'espai exterior, com facilitar les comunicacions o les prediccions meteorològiques. Molts són satèl·lits que orbiten a diferents altures de la superfície de la Terra.

6.1. Satèl·lits que orbiten la Terra

A continuació estudiarem el moviment de satèl·lits que descriuen òrbites estacionàries al voltant de la Terra (▸ Figura 1.42). Per a tots:

- L'òrbita és circular.
- La força gravitatòria és la força centrípeta que manté el satèl·lit en moviment.

Càlcul de la velocitat orbital

Per al satèl·lit que gira a una altura *h* per sobre de la superfície de la Terra:

$$F_G = F_C \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_s}}{r^2} = \frac{\cancel{m_s} \cdot v^2}{r}$$

Així, la velocitat d'un satèl·lit que orbita a una altura *h* és aquesta:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$$

- *v* és la velocitat orbital del cos que gira.
- M_T és la massa de la Terra ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg). R_T és el radi de la Terra (6.370 km).
- *r* és el radi de l'òrbita que descriu el satèl·lit.

$$r = R_T + h$$

h és l'altura a què es troba sobre la superfície de la Terra.

Càlcul del període de revolució

Per calcular el temps que triga el satèl·lit a completar la seva òrbita, farem servir la relació existent entre la velocitat orbital i la velocitat angular corresponent. Si seguim el raonament anterior, tenim que:

$$F_G = F_C \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_s}}{r^2} = \frac{\cancel{m_s} \cdot V^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2 \qquad [1]$$

$$v = \omega \cdot r \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2 \qquad [2]$$

Si relacionem [1] i [2] i reordenem, podem obtenir el període:

$$\frac{G \cdot M_T}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

El període d'un satèl·lit que orbita a una altura *h* és (▸ Figura 1.43):

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}$$

Satèl·lits geostacionaris

S'anomenen **satèl·lits geostacionaris** o **geosincrònics** aquells que orbiten al voltant de la Terra i es mantenen sempre per sobre d'un mateix punt.

Per a un observador terrestre, aquests satèl·lits no canvien de posició amb el temps, és a dir, sembla que no es moguin.

Per a això, cal que el seu període de revolució sigui el mateix que el de la Terra (dia sideral: 23 hores, 56 minuts i 3,5 segons) i que orbitin en el **pla de l'equador terrestre** (▶ Figura 1.45). La raó és que només així es garanteix que el valor de la força gravitatòria sigui el mateix en tot el seu recorregut.

Per aquestes raons, un satèl·lit geostacionari orbita a una determinada altura sobre la superfície de la Terra, que podem calcular:

Obtenim el radi de l'òrbita a partir de l'expressió del període:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

Fem el càlcul per a les dades del nostre planeta:

- $R_T = 6.370$ km
- $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
- $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
- $T = 23$ hores, 56 minuts i 3,5 segons $= 8.616$ s

$$r = \sqrt[3]{\frac{(8.616\ \mathrm{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{4\pi^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

L'altura a què orbita sobre la superfície terrestre és la següent:

$$h = 4{,}22 \cdot 10^7\ \mathrm{m} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 3{,}58 \cdot 10^7\ \mathrm{m} \simeq 35.800\ \mathrm{km}$$

També podem calcular la velocitat dels satèl·lits geostacionaris:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4{,}22 \cdot 10^7}} = 3.074\ \mathrm{m/s}$$

En resum: els satèl·lits geostacionaris es troben en un punt determinat sobre la superfície de la Terra (▶ Figura 1.44) i tenen aquestes característiques:

- Tenen un període de rotació igual al de la Terra: 23 hores, 56 minuts i 3,5 segons (8.616 s).
- La seva òrbita està sobre l'equador terrestre.
- Estan a uns $3{,}58 \cdot 10^7$ m (35.800 km) per sobre de la superfície de la Terra.

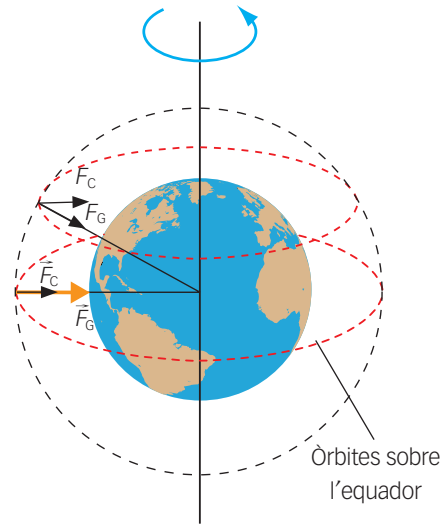


Figura 1.45. Els satèl·lits geostacionaris orbiten sobre l'equador terrestre.

Recorda

1 dia sideral:

23 h 56 min 3,5 s ≃ 23,98 h = 8.616 s

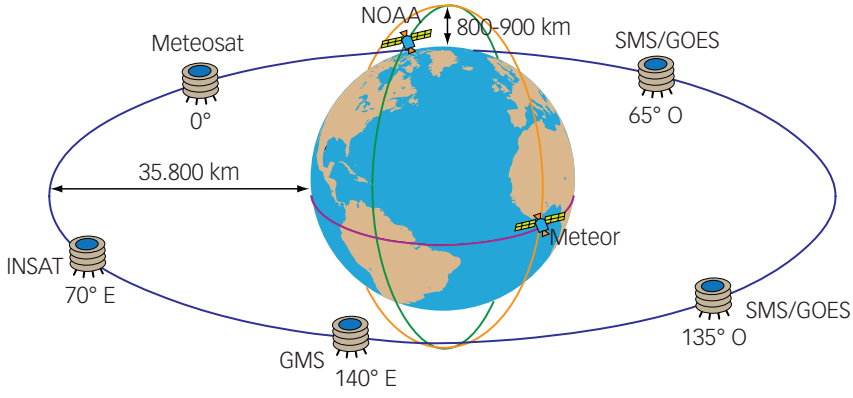


Figura 1.44. Exemples de satèl·lits meteorològics. Molts són geostacionaris.

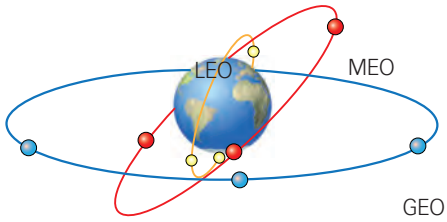


Figura 1.46. Segons la seva posició, els satèl·lits que orbiten la Terra s'anomenen així:

- LEO: *Low Earth Orbit*. Exemple: el sistema Iridi, format per 66 satèl·lits de comunicacions.
- GEO: *Geosynchronous Orbit*. Exemple: satèl·lits meteorològics Meteosat.
- MEO: *Mid Earth Orbit*. Exemple: els 24 satèl·lits que ofereixen el servei GPS.

6.2. Càlcul sobre satèl·lits amb el full de càlcul

Quan un satèl·lit gira al voltant de la Terra, el període i la velocitat depenen del radi de la seva òrbita (▶ Figura 1.46). Utilitzarem un full de càlcul que ens permeti conèixer la velocitat i el període d'un satèl·lit que descriu una òrbita de radi igual al radi de la Terra, RT (se suposa que es mou a molt poca distància de la superfície terrestre), un altre d'òrbita 2RT, 3RT…, fins a 12RT. Representarem gràficament la velocitat orbital i el període respecte a l'altura a la qual es troba el satèl·lit en cada cas.

Com que l'òrbita és circular:

$$F_G = F_C \rightarrow G = \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \qquad [1]$$

Posem la velocitat lineal en funció de l'angular, la relacionem amb el període i reordenem:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}} \qquad [2]$$

r = RT + *h*, on *h* és l'altura del satèl·lit sobre la superfície de la Terra.

Elaborem un full de càlcul amb les equacions [1] i [2], i obtenim:

	Radi (m)	Altura (m)	Velocitat orbital (m/s)	Període orbital (s)
R_T	$6{,}370 \cdot 10^6$	0,000	7.913,0	5.055
2 R_T	$1{,}274 \cdot 10^7$	$6{,}370 \cdot 10^6$	5.595,4	14.299
3 R_T	$1{,}911 \cdot 10^7$	$1{,}274 \cdot 10^7$	4.568,6	26.269
4 R_T	$2{,}548 \cdot 10^7$	$1{,}911 \cdot 10^7$	3.956,5	40.443
5 R_T	$3{,}185 \cdot 10^7$	$2{,}548 \cdot 10^7$	3.538,8	56.521
6 R_T	$3{,}822 \cdot 10^7$	$3{,}185 \cdot 10^7$	3.230,5	74.299
7 R_T	$4{,}459 \cdot 10^7$	$3{,}822 \cdot 10^7$	2.990,9	93.627
8 R_T	$5{,}096 \cdot 10^7$	$4{,}459 \cdot 10^7$	2.797,7	114.391
9 R_T	$5{,}733 \cdot 10^7$	$5{,}096 \cdot 10^7$	2.637,7	136.496
10 R_T	$6{,}370 \cdot 10^7$	$5{,}733 \cdot 10^7$	2.502,3	159.866
11 R_T	$7{,}007 \cdot 10^7$	$6{,}370 \cdot 10^7$	2.385,9	184.435
12 R_T	$7{,}644 \cdot 10^7$	$7{,}007 \cdot 10^7$	2.284,3	210.149

La velocitat dels satèl·lits

La velocitat dels satèl·lits artificials és molt elevada.

Per al cas dels satèl·lits geostacionaris:

v . 3.000 m/s . 11.000 km/h

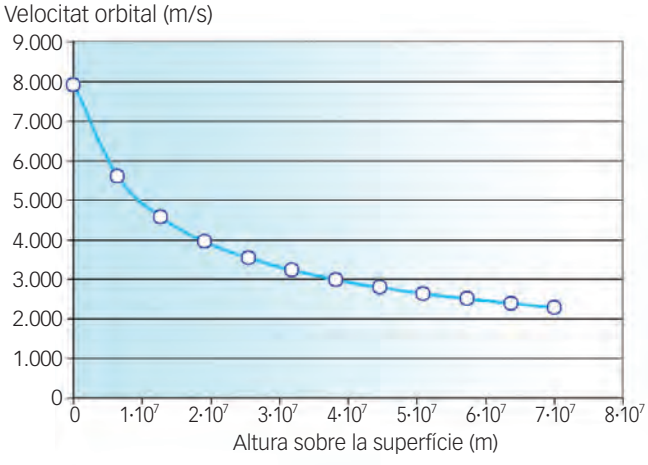


Figura 1.47. Com més alt es trobi el satèl·lit, més baixa serà la seva velocitat.

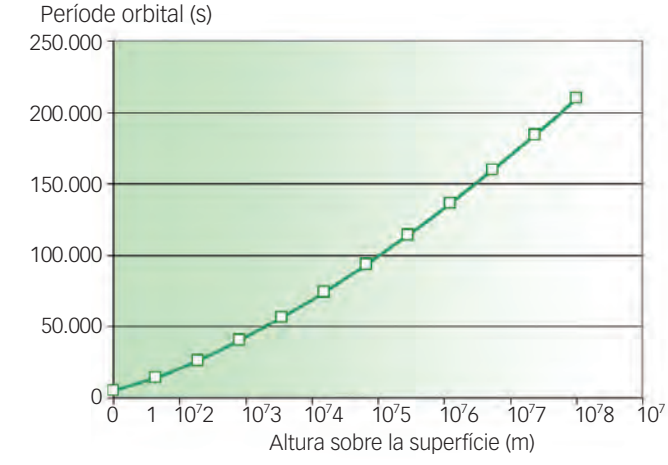


Figura 1.48. Com més amunt es trobi l'òrbita del satèl·lit, més gran serà el seu període orbital.

6.3. Energia dels satèl·lits

Els satèl·lits que estudiem només estan sotmesos a l'acció del camp gravitatori, la qual cosa ens permet calcular-ne fàcilment l'energia mecànica:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Per al satèl·lit que orbita, $F_G = F_C$, d'on es dedueix que:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Això permet obtenir una forma més simplificada de l'**energia mecànica** d'un satèl·lit:

$$E_M = \frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow \boldsymbol{E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}}$$

En aquestes circumstàncies, els satèl·lits compleixen el principi de conservació de l'energia mecànica, cosa que permet calcular la velocitat que cal imprimir-los en el punt de llançament perquè aconsegueixin una òrbita determinada.

Per extensió, també podrem calcular l'energia que cal comunicar-los perquè passin d'una òrbita a una altra o la que els permetrà sortir del camp gravitatori en què es troben.

Velocitat de llançament per posar un satèl·lit en òrbita

Suposem que es llança un satèl·lit (▸ Figura 1.49) des de la superfície de la Terra (posició 1) (▸ Figura 1.50) fins a aconseguir una òrbita determinada (posició 2). Apliquem el principi de conservació de l'energia:

$$E_{M1} = E_{M2} \rightarrow E_{C1} + E_{P1} = E_{C2} + E_{P2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r}$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M}{r} \qquad [1]$$

En la posició 2, $F_G = F_C$:

$$\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} \cdot v_2^2}{\cancel{r}} \rightarrow \frac{G \cdot M}{r} = v_2^2 \qquad [2]$$

Relacionant les expressions [1] i [2] simplificades, obtenim que:

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M}{r} \rightarrow v_1^2 = 2 \cdot \left(\frac{G \cdot M}{R_T} - \frac{1}{2} \frac{G \cdot M}{r} \right)$$

La **velocitat de llançament** necessària per posar un satèl·lit en òrbita és aquesta:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r} \right)}$$

Recorda que r és el radi de l'òrbita del satèl·lit: $r = R_T + h$, i h és l'altura a què es troba per sobre de la superfície de la Terra.

És a dir, en funció de la velocitat amb què el llancem, la seva òrbita serà més alta o més baixa.

Recorda

Es poden establir relacions entre l'energia mecànica, l'energia cinètica i l'energia potencial d'un satèl·lit que orbita al voltant d'un planeta:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot E_P; \; E_C = -\frac{1}{2} \cdot E_P$$

Figura 1.49. Llançament d'un satèl·lit. Per posar-lo en òrbita cal proporcionar-li energia.

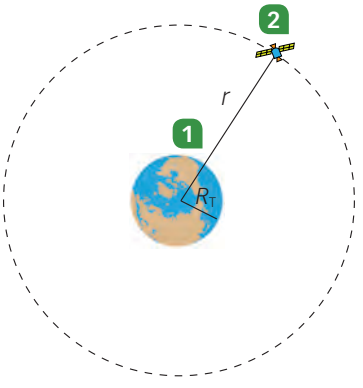


Figura 1.50. En el pas de la posició 1 a la 2, l'energia es conserva.

EXEMPLE RESOLT

10 S'ha col·locat un satèl·lit de 10^4 kg de massa en òrbita al voltant de la Terra a una altura dues vegades el radi terrestre. Calcula:

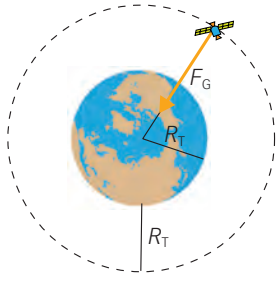
a) L'energia que se li ha comunicat des de la superfície de la Terra.

b) La força centrípeta necessària perquè descrigui l'òrbita.

c) El període del satèl·lit en aquesta òrbita.

Dades: $g_0 = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $R_T = 6.370$ km.

Per resoldre el problema, utilitza totes les magnituds en unitats del SI.



a) El satèl·lit estarà sotmès en tot moment al camp gravitatori terrestre. Per tant, es conservarà l'energia mecànica.

En el punt de llançament cal comunicar-li una energia cinètica que, sumada a la seva energia potencial, coincideixi amb l'energia mecànica en l'òrbita:

- Punt de llançament: $E_P = -\dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$
- En l'òrbita: $E_M = E_C + E_P = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot R_T}$

$$E_{C\ \text{Llançament}} + E_{P\ \text{Llançament}} = E_M$$

$$E_{C\ \text{Llançament}} = E_M - E_{P\ \text{Llançament}}$$

$$E_{C\ \text{Llançament}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot R_T} - \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}\right) = \frac{3 \cdot G \cdot M_T \cdot m}{4 \cdot R_T} \qquad [1]$$

Com que desconeixes el valor de M_T, fes servir g_0:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2 \qquad [2]$$

Substitueix a [1] i calcula la E_C en el llançament:

$$E_{C\ \text{Llançament}} = \frac{3 \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{4 \cdot R_T} = \frac{3 \cdot g_0 \cdot R_T \cdot m}{4}$$

Utilitza tots els valors en unitats del SI:

$$E_{C\ \text{Llançament}} = \frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 6.370 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{4} = \mathbf{4{,}68 \cdot 10^{11}\ J}$$

b) Per al satèl·lit que orbita, $F_C = F_G$.

$$F_C = G \cdot \frac{M_T \cdot m_S}{r^2}$$

Si fas servir l'expressió [2], i com que $r = 2 \cdot R_T$, obtindràs que:

$$F_C = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{(2 \cdot R_T)^2} = \frac{9{,}8 \cdot 10^4}{4} = \mathbf{24.500\ N}$$

c) La F_C permet calcular la velocitat amb què orbita el satèl·lit. A partir d'aquesta, calcula el seu període:

$$F_C = \frac{m_S \cdot v^2}{r} = \frac{m_S \cdot (\omega \cdot r)^2}{r} = m_S \cdot r \cdot \frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

Reordena i substitueix els valors:

$$T = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 2 \cdot 6.370 \cdot 10^3 \cdot (2\pi)^2}{24.500}} = \mathbf{1{,}433 \cdot 10^4\ s \simeq 4\ h}$$

ACTIVITATS

22. Un satèl·lit artificial gira en una òrbita circular a 300 km d'altura sobre la superfície terrestre.

a) Troba la velocitat del satèl·lit.

b) Troba el seu període orbital.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.

Solució: a) $7{,}733 \cdot 10^3$ m/s; b) $5{,}419 \cdot 10^3$ s

23. Per poder recollir informació sobre el *planeta vermell* es vol enviar tres naus a Mart per fer de satèl·lits «martestacionaris». Determina:

a) El tipus d'òrbita que tindrien els satèl·lits.

b) L'altura sobre la superfície de Mart a què es trobarien.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_{Mart} = 6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg; $R_{Mart} = 3.397$ km; $T_{Mart} = 5{,}93 \cdot 10^7$ s

Solució: b) $1{,}559 \cdot 10^6$ km

24. El satèl·lit de la NASA Terra està dissenyat per recollir informació sobre la superfície de la Terra, els oceans i l'atmosfera. Gràcies a aquestes dades, es poden estudiar la interrelació entre els diferents medis i els sistemes biològics existents.

El satèl·lit, que segueix una òrbita circular en el pla que passa pels pols a una altura de 760 km sobre la superfície de la Terra (circumpolar), té una massa de $4{,}86 \cdot 10^3$ kg. Calcula:

a) El període del moviment del satèl·lit en la seva òrbita al voltant de la Terra.

b) L'energia necessària que cal subministrar per llançar el satèl·lit des de la superfície de la Terra fins a la seva òrbita.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.

Solució: a) $5{,}99 \cdot 10^3$ s; b) $3{,}24 \cdot 10^{10}$ J

Càlcul de l'energia per passar d'una òrbita a una altra

Suposem, ara, que volem que el nostre satèl·lit passi de l'òrbita 2 a l'òrbita 3 (▸ Figura 1.51). Haurem de comunicar-li una energia que sigui la diferència entre la que té el satèl·lit en cada una d'aquestes òrbites.

$$\Delta E = E_3 - E_2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{G \cdot M \cdot m}{r_3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{G \cdot M \cdot m}{r_2}\right)$$

És a dir:

L'energia necessària per passar d'una òrbita de radi r_2 a una altra de radi r_3, si $r_2 < r_3$, és aquesta:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$

Si $r_3 > r_2$, $\Delta E > 0$.

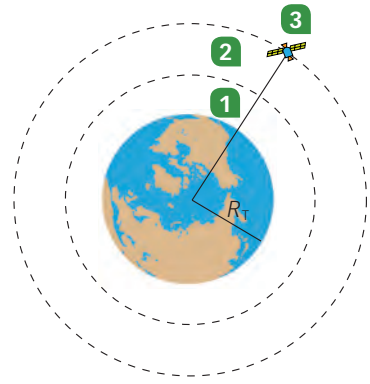


Figura 1.51. Per passar de 2 a 3 hem de comunicar energia al satèl·lit.

Velocitat d'escapament

Perquè un satèl·lit s'escapi del camp gravitatori, la seva $E_M \geq 0$.

Un satèl·lit que orbita a una distància h per sobre de la superfície d'un planeta s'escaparà del seu camp gravitatori si:

$$E_M = E_C + E_P \geq 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2_{\text{escapament}} - G \cdot \frac{M_P \cdot m}{R_P + h} \geq 0$$

La velocitat d'escapament d'un satèl·lit que és en el camp gravitatori d'un planeta, de massa M_P i radi R_P, és aquesta:

$$v_{\text{escapament}} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P + h}}$$

h és la distància a què es troba el satèl·lit sobre la superfície del planeta.

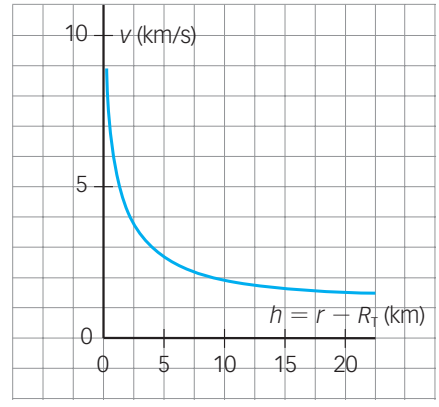


Figura 1.52. En el gràfic observem que la velocitat d'escapament d'un satèl·lit és més petita com més gran és la distància que el separa del cos que crea el camp gravitatori.

ACTIVITATS

25. Una llançadora espacial passa d'una òrbita circular a 200 km a una altra a 520 km d'altura sobre la superfície de la Terra. La massa de la llançadora és de 55.000 kg.

a) Calcula el període i la velocitat de la llançadora en la seva òrbita inicial.

b) Calcula l'energia que necessita la llançadora per desplaçar-se a la nova òrbita.

Dades: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.

Solució: a) 5.298 s; 7.792 m/s; b) $7{,}75 \cdot 10^{10}$ J

26. En un planeta esfèric de 2.200 km de radi, l'acceleració de la gravetat a la superfície és $g_0 = 5{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Determina la massa del planeta i la velocitat d'escapament des de la seva superfície.

b) A quina altura h ha d'orbitar un satèl·lit de 400 kg de massa que descrigui una òrbita circular en un dia?

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Solució: a) $3{,}77 \cdot 10^{23}$ kg; 4.781,2 m/s; b) $1{,}46 \cdot 10^7$ m

27. Un projectil és llançat des del nivell del mar fins a una altura d'$1{,}2 \cdot 10^6$ m sobre la superfície de la Terra. La massa del projectil és de 600 kg:

a) Calcula quant ha augmentat l'energia potencial gravitatòria del projectil.

b) Calcula quina energia cal subministrar al projectil perquè s'escapi de l'acció del camp gravitatori terrestre des d'aquesta altura.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.

Solució: a) $5{,}976 \cdot 10^9$ J; b) $1{,}586 \cdot 10^{10}$ J

28. Respon les preguntes següents i justifica les respostes.

a) Quina és la velocitat d'un satèl·lit en òrbita circular al voltant a la Terra? Dedueix-ne l'expressió.

b) Com varia la velocitat d'escapament d'un cos si canvia la seva altura sobre la superfície terrestre de $2R_T$ a $3R_T$?

Camp gravitatori creat per masses puntuals amb distribució geomètrica

11 Dues masses de 700 kg i 100 kg, respectivament, estan fixes en els vèrtexs superiors d'un quadrat de 20 m de costat.

a) Troba i dibuixa el camp gravitatori en el centre del quadrat.

b) Calcula el treball necessari per portar una massa de 200 g des del punt anterior fins al vèrtex lliure del quadrat més allunyat del cos que té més massa.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

SOLUCIÓ

1. Comprèn l'enunciat.

Dades conegudes	Resultats que s'han d'obtenir
• Valor de dues masses i la seva localització en un quadrat.	• Camp gravitatori en el centre del quadrat. • Treball per moure una tercera massa entre dos punts.

Fes tots els càlculs en unitats del SI.

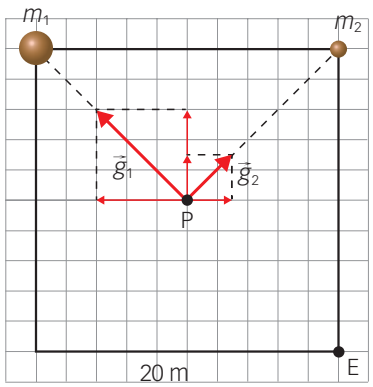
2. Representa els cossos en la posició de l'enunciat.

a) Dibuixa el vector del camp que crea cada un en el centre del quadrat:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Cada vector forma un angle de 45° amb l'horitzontal.

Pots calcular-ne el mòdul i obtenir les components fent servir les relacions sinus i cosinus. El dibuix permet conèixer el signe de cada component:



$$g = \frac{G \cdot M}{r^2};\ r_1 = r_2 = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{20^2 + 20^2}}{2} = 14{,}14\ \mathrm{m}$$

- $g_1 = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{14{,}14^2} = 2{,}33 \cdot 10^{-10}\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$

$$\vec{g}_1 = -g_1 \cdot \cos 45°\ \vec{i} + g_1 \cdot \operatorname{sen} 45°\ \vec{j}$$

$$\vec{g}_1 = -1{,}65 \cdot 10^{-10}\ \vec{i} + 1{,}65 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

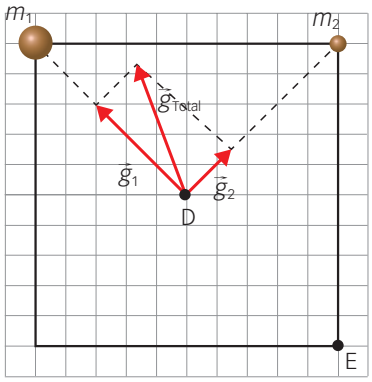
- $g_2 = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{14{,}14^2} = 3{,}34 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$

$$g_2 = +g_2 \cdot \cos 45°\ \vec{i} + g_2 \cdot \operatorname{sen} 45°\ \vec{j}$$

$$g_2 = +2{,}36 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} + 2{,}36 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

$$\rightarrow \vec{g}_{\text{Total}} = (-1{,}65 \cdot 10^{-10} + 2{,}36 \cdot 10^{-11})\ \vec{i} + (1{,}65 \cdot 10^{-10} + 2{,}36 \cdot 10^{-11})\ \vec{j}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \mathbf{-1{,}41 \cdot 10^{-10}\ \vec{i} + 1{,}89 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ \frac{N}{kg}}$$



b) Calcula el treball per desplaçar la massa de D → E.

$$W_{D \to E} = -\Delta E_P = -(E_{PE} - E_{PD}) = -m \cdot (V_{TE} - V_{TD})$$

Calcula el potencial total que les dues masses creen en cada un d'aquests punts:

- $V_{TD} = V_{1D} + V_{2D} = -\dfrac{G \cdot M_1}{r_{1D}} - \dfrac{G \cdot M_2}{r_{2D}}$

$$V_{TD} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{14{,}14} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{14{,}14}$$

$$V_{TD} = -3{,}774 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

- $V_{TE} = V_{1E} + V_{2E} = -\dfrac{G \cdot M_1}{r_{1E}} - \dfrac{G \cdot M_2}{r_{2E}}$

$$V_{TE} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{2 \cdot 14{,}14} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{2 \cdot 14{,}14}$$

$$V_{TE} = -1{,}984 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

$$\rightarrow W_{D \to E} = -0{,}2 \cdot ((-1{,}984 \cdot 10^{-9}) - (-3{,}774 \cdot 10^{-9})) = \mathbf{-3{,}52 \cdot 10^{-9}\ J}$$

3. Avalua el resultat.

El treball és negatiu. Perquè el cos es desplaci des de *D* fins a *E* cal realitzar un treball en contra de les forces del camp, ja que el cos s'allunya de les masses que creen el camp.

Els càlculs vectorials se simplifiquen si calculem el mòdul i utilitzem les raons trigonomètriques per calcular les components dels vectors.

Moviment en el camp gravitatori

12 Un tros d'un meteorit de 400 kg de massa va directe cap a la Terra, en caiguda lliure, sota l'acció del camp gravitatori terrestre. A 200 km sobre la superfície de la Terra, la seva velocitat és de 2.300 m/s. Calcula:

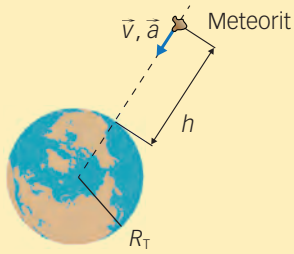
a) Les energies cinètica i potencial a 200 km sobre la superfície de la Terra.

b) L'altura inicial des de la qual va començar a caure suposant que la seva velocitat a aquesta altura fos nul·la.

c) L'acceleració que tenia l'objecte en l'instant inicial.

d) La velocitat i l'acceleració amb què impactarà el meteorit contra la superfície de la Terra.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.



SOLUCIÓ

1. Comprèn l'enunciat.

Dades conegudes	Resultats que s'han d'obtenir
• Massa, velocitat i posició d'un cos en caiguda lliure.	• Energia cinètica i potencial en un punt. • Altura del punt d'inici. • Velocitat i acceleració en el punt d'impacte.

Fes tots els càlculs en unitats del SI.

a) L'energia cinètica és aquesta:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot (2.300)^2 = \mathbf{1{,}058 \cdot 10^9\ J}$$

L'energia potencial és aquesta:

$$E_P = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

$$E_P = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 400}{(200 + 6.370) \cdot 10^3} = \mathbf{-2{,}428 \cdot 10^{10}\ J}$$

b) Si a l'altura inicial la velocitat era nul·la, l'energia potencial inicial era igual a l'energia total a una altura de 200 km sobre la superfície:

$$E_{Mi} = E_{Pi} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = E_C + E_P \rightarrow$$

$$\rightarrow h = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{E_C + E_P} - R_T \rightarrow$$

$$\rightarrow h = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 400}{1{,}058 \cdot 10^9 - 2{,}428 \cdot 10^{10}} - 6.370 \cdot 10^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \mathbf{5 \cdot 10^5\ m = 500\ km}$$

c) L'acceleració en el punt de partida es pot calcular a partir de la força exercida sobre l'objecte i la seva massa.

$$F_G = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F_G}{m}$$

En aquest punt, la distància de l'objecte al centre de la Terra és $R_T + h$.

$$a = \frac{G \cdot \dfrac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}}{m} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$a = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6.370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5)^2} = 8{,}45\ \text{N/kg}$$

$$a = \mathbf{8{,}45\ m/s^2}$$

d) Quan impacti novament amb la superfície, el cos tindrà una energia cinètica i una energia potencial:

$$E_{Mi} = E_{Pi} = E_{C\,Sup} + E_{P\,Sup} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{1}{6.370 \cdot 10^3} - \frac{1}{6.370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5}\right)} =$$

$$v = \mathbf{3.019\ m/s}$$

L'acceleració amb què impacta és el valor de g a la superfície de la Terra:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6.370 \cdot 10^3} = \mathbf{9{,}8\ m/s^2}$$

2. Avalua el resultat.

El tros de meteorit cau lliurement a la Terra i no orbita perquè la seva velocitat en el punt que s'indica en l'apartat a) és inferior a la que cal per a això.

Per a un cos que orbita:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} = \frac{1}{2} \cdot E_P$$

$$E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot E_P \rightarrow E_C = -\frac{1}{2} \cdot E_P$$

$$E_C = \frac{2{,}428 \cdot 10^{10}}{2} = 1{,}214 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Camp gravitatori creat per masses puntuals

29. Indica quines dimensions té la intensitat del camp gravitatori en el sistema internacional.

30. Raona si l'afirmació següent és vertadera o falsa i justifica la resposta: «Si en un punt d'un camp creat per diverses masses la intensitat del camp és nul·la, també ho serà el potencial gravitatori».

31. Considera dues masses puntuals tals que $m_1 = m_2$. Situem una tercera massa puntual entre aquestes, m_3. En quin punt entre les masses seria nul·la la força? Quina seria l'energia potencial de m_3 en aquesta posició?

32. Una partícula es desplaça sota l'acció d'una força conservativa. Augmenta o disminueix, la seva energia potencial? I la seva energia cinètica? Raona la resposta.

33. Dos cossos de 2.500 kg i 1.500 kg, respectivament, estan separats una distància de 4 m. Calcula:

a) El mòdul de la força d'atracció entre tots dos.

b) El valor del camp gravitatori total en el punt mitjà de la recta que els uneix.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²

Solució: a) $1{,}56 \cdot 10^{-5}$ N; b) $-1{,}67 \cdot 10^{-8}\ \vec{u}_{rA}$ N/kg

34. Segons dades recollides, la població mundial és de 7.300 milions d'habitants (2015). Si suposem que la massa mitjana d'una persona és de 60 kg, calcula:

a) El pes de tots els habitants del planeta.

b) La força gravitatòria i l'energia gravitatòria entre dues persones a 10 m de distància.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.

Solució: a) $4{,}31 \cdot 10^{12}$ N; b) $2{,}40 \cdot 10^{-9}$ N

35. Un cos de 2 kg de massa està situat en l'origen de coordenades. Un segon cos de 3 kg és en el punt (6, 4) m. Calcula el mòdul i el vector força amb què la massa m_1 atrau la massa m_2.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solució: $7{,}70 \cdot 10^{-12}$ N; $-6{,}41 \cdot 10^{-12}\ \vec{i} - 4{,}27 \cdot 10^{12}\ \vec{j}$

36. Dues partícules de masses 8 kg i 1 kg són en el buit i estan separades 40 cm. Calcula:

a) L'energia potencial inicial del sistema i el treball realitzat per la força gravitatòria en augmentar la separació entre les partícules fins a 80 cm.

b) El treball per separar les partícules des de la posició de partida fins a l'infinit i el treball necessari per restablir la distribució inicial.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solució: a) $-1{,}334 \cdot 10^{-9}$ J; $-6{,}67 \cdot 10^{-10}$ J;
b) $-1{,}334 \cdot 10^{-9}$ J; $1{,}334 \cdot 10^{-9}$ J

EXEMPLE RESOLT

13 Tres planetes de masses m_1, m_2 i m_3 estan situats en els punts $(-a, 0)$, $(0, -a)$ i $(0, a)$, respectivament. Si són masses puntuals de valors $m_2 = m_3 = 2m_1 = 4 \cdot 10^{21}$ kg i si $a = 2 \cdot 10^5$ m, calcula:

a) El vector camp gravitatori originat pels tres planetes en el punt O(0, 0) m.

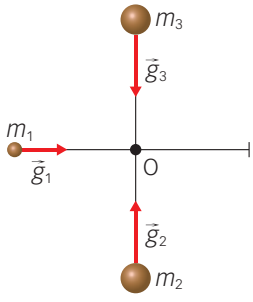
b) El potencial gravitatori (energia potencial per unitat de massa) originat pels tres planetes en el punt P(a, 0) m.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) D'acord amb el principi de superposició:

$$\vec{g}_{Total} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Com s'observa en el dibuix, $\vec{g}_2 = -\vec{g}_3$; per tant, $\vec{g}_{Total} = \vec{g}_1$.



$$\vec{g}_{Total} = \frac{G \cdot m_1}{a^2}\ \vec{i}$$

Substitueix els valors utilitzant les unitats del SI:

$$\vec{g}_{Total} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^{10}}\ \vec{i} = \mathbf{3{,}335\ \vec{i}\ \frac{N}{kg}}$$

b) El potencial és una magnitud escalar. Pel principi de superposició:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3$$

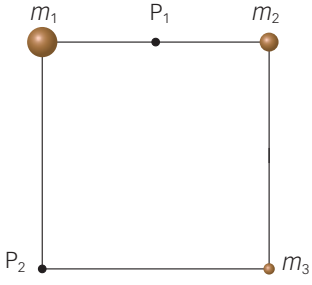
$$V_T = -\frac{G \cdot m_1}{d_1} - \frac{G \cdot m_2}{d_2} - \frac{G \cdot m_3}{d_3}$$

Com s'observa en el dibuix: $d_2 = d_3 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. A més, $V_2 = V_3$.

$$V_T = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^5} - 2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{21}}{2 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{2}}$$

$$V_T = \mathbf{-2{,}22 \cdot 10^6\ J/kg}$$

37. Tenim tres masses puntuals en tres dels vèrtexs d'un quadrat. Si m_2 i m_3 són el doble i el triple de m_1, respectivament, contesta:



a) Quina massa crea el camp més gran en el punt P_1?

b) Si el costat mesura 100 m i $m_1 = 2{,}5$ Mt (milions de tones), quin és el valor del potencial gravitatori creat per les tres masses en el punt P_1?

c) Quin és el camp gravitatori total en el punt P_2? Representa'l gràficament.

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Solució: b) $-1{,}45 \cdot 10^{-2}$ N · m;
c) $6{,}181 \cdot 10^{-5}\ \vec{i} + 2{,}847 \cdot 10^{-5}\ \vec{j}$ N/kg

Representació del camp gravitatori

38. Indica si l'afirmació següent és vertadera o falsa i justifica la resposta: «El treball realitzat en traslladar una massa entre dos punts d'una mateixa superfície equipotencial mai no és zero».

Camp gravitatori dels cossos celestes

39. Indica si l'afirmació següent és vertadera o falsa i raona la resposta: «La intensitat d'un punt del camp gravitatori terrestre és més gran com més gran és l'altura a què es troba des de la superfície terrestre».

40. Quin treball realitza una força que actua sobre una massa puntual que descriu mitja òrbita circular de radi R al voltant d'una altra massa? I si es desplacés des d'aquesta distància R fins a l'infinit? Raona les respostes

41. Contesta.

a) Què significa la velocitat d'escapament d'un camp gravitatori des del punt de vista energètic?

b) Quin signe té l'energia total d'un cometa que descriu una òrbita hiperbòlica?

42. Explica què és l'energia potencial gravitatòria. Quina energia potencial gravitatòria té una partícula de massa m situada a una distància r d'una altra partícula de massa M? En quin cas es pot utilitzar l'expressió per a l'energia potencial gravitatòria $E_P = m \cdot g \cdot h$?

43. El radi i la massa d'un planeta són el doble que els d'un altre planeta. Si el pes d'una persona en el segon planeta és p, quin seria en el primer?

Solució: $p/2$

44. Dos planetes tenen la mateixa densitat, però diferent radi: el del primer planeta fa 7.000 km i el de l'altre, 6.000 km. Calcula:

a) La relació que existeix entre les acceleracions de la gravetat a la superfície de cada planeta.

b) La relació entre les velocitats d'escapament a cada planeta.

Solució: a) $g_A = 1{,}167 \cdot g_B$; b) $v_{\text{escapament A}} = 1{,}167 \cdot v_{\text{escapament B}}$

45. Suposem que en una altra galàxia allunyada de la nostra existeix un planeta la massa M del qual és quatre vegades la massa de la Terra ($M = 4M_T$). A més, la intensitat del camp gravitatori a la seva superfície coincideix amb la que hi ha a la superfície terrestre, $g = g_T$.

a) Quina serà la relació entre els radis dels dos planetes, R/R_T?

b) Des de la superfície de quin planeta serà més gran la velocitat d'escapament? Determina la relació entre totes dues.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.

Solució: a) $R/R_T = 2$; b) $v_{\text{escapament P}}/v_{\text{escapament T}} = \sqrt{2}$

EXEMPLE RESOLT

14 a) Calcula el període orbital de Mart sabent que el semieix més gran de la seva òrbita és 1,524 vegades el de l'òrbita terrestre.

b) La massa de Mart és $6{,}5 \cdot 10^{23}$ kg i el volum del planeta és $1{,}617 \cdot 10^{11}$ km³. Suposa que Mart és una esfera i calcula l'acceleració de la gravetat a la superfície.

c) Un satèl·lit de 600 kg està en òrbita circular sobre l'equador marcià amb un període orbital d'11,8 h. Quina és la velocitat del satèl·lit?

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) D'acord amb la 3a llei de Kepler:

$$\frac{T_M^2}{d_{S-M}^3} = \frac{T_T^2}{d_{S-T}^3} \qquad [1]$$

L'enunciat indica que: $d_{S-M} = 1{,}524 \cdot d_{S-T}$.
Substitueix en [1]:

$$\frac{T_M^2}{1{,}524^3 \cdot d_{S-T}^3} = \frac{T_T^2}{d_{S-T}^3}.$$ Simplifica i reordena:

$$T_M = T_T \cdot \sqrt{1{,}524^3} = 1{,}88 \cdot T_T$$

b) Calcula el radi amb el seu volum, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$

Aïlla i substitueix els valors en unitats del SI:

$$R_M = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1{,}617 \cdot 10^{11} \cdot 10^9}{4\pi}} = 3{,}38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A la superfície de Mart:

$$g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{23}}{(3{,}38 \cdot 10^6)^2} = 3{,}80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) Com que el satèl·lit descriu una òrbita estacionària:

$$F_G = F_C \rightarrow \frac{G \cdot M_M \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{G \cdot M_M}{r} = v^2 \quad [2]$$

Relaciona el període amb la velocitat lineal:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{r} \cdot r \rightarrow r = \frac{v \cdot T}{2\pi} \qquad [3]$$

Substitueix [3] en [2]:

$$\frac{G \cdot M_M}{\frac{v \cdot T}{2\pi}} = v^2 \rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_M \cdot 2\pi}{r}}$$

Calcula en unitats del SI:

$$v = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 2\pi}{11{,}8 \cdot 3.600}} = \mathbf{1{,}858 \cdot 10^3 \text{ m/s}}$$

46. El 28 de setembre de 2015 hi va haver una «superlluna»: la Lluna va estar a 356.876 km de la Terra, la distància més petita en la seva òrbita el·líptica. L'11 d'octubre es va situar a 406.450 km, la distància més gran. Calcula la diferència entre el valor de la gravetat creada per la Lluna a la Terra aquests dies.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_{\text{Lluna}} = 7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg.

Solució: $8{,}65 \cdot 10^{-6}$ N/kg

El moviment dels satèl·lits

47. Un satèl·lit artificial de 200 kg orbita a una altura h sobre la superfície terrestre, on el valor de la gravetat és la tercera part del seu valor a la superfície de la Terra.

a) Es realitza un treball per mantenir el satèl·lit en òrbita?

b) Calcula el radi, el període de l'òrbita i l'energia mecànica del satèl·lit.

Dades: $g_0 = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Solució: b) $1{,}103 \cdot 10^7$ m; $1{,}15 \cdot 10^4$ s; $-3{,}61 \cdot 10^9$ J

48. El satèl·lit *Astra 2C*, utilitzat per emetre senyals de televisió, és un satèl·lit en òrbita circular geostacionària

a) Calcula l'altura a què orbita respecte de la superfície de la Terra i la seva velocitat.

b) Calcula l'energia invertida per portar el satèl·lit des de la superfície de la Terra fins a la seva òrbita.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^{-2}$; $R_T = 6.370$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; massa del satèl·lit, $m = 4.500$ kg.

Solució: a) $3{,}58 \cdot 10^7$ m; 3.072,6 m/s b) $2{,}61 \cdot 10^{11}$ J

49. El satèl·lit Ió de Júpiter té una massa de $8{,}94 \cdot 10^{22}$ kg i una gravetat a la superfície d'1,81 m/s^2.

a) Calcula'n el radi en quilòmetres i el volum.

b) Una sonda està en caiguda lliure cap a la superfície del satèl·lit Ió. A 5.000 km del centre de la Lluna la velocitat de la sonda és de 1.250 m/s. Quina velocitat tindrà la sonda a 2.000 km del centre?

Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Solució: a) 1.815 km; $2{,}5 \cdot 10^{19}$ m^3; b) 2.267,2 m/s

50. El 1969, Michael Collins tripulava el mòdul del comandament *Columbia*, de la missió Apollo 11 i, mentrestant, Neil Armstrong i Edwin Aldrin caminaven sobre la Lluna. La nau orbitava a 100 km d'altura sobre la superfície de la Lluna amb un període de 118 min. Calcula:

a) La massa de la Lluna i la intensitat del camp gravitatori a la superfície lunar.

b) La velocitat d'escapament des de la superfície lunar.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $R_{\text{Lluna}} = 1{,}74 \cdot 10^3$ km.

Solució: a) $7{,}356 \cdot 10^{22}$ kg; 1,62 m/s^2; b) 2.375,743 m/s

51. L'Estació Espacial Internacional, de 280.000 kg de massa, gira a una altura mitjana de 360 km sobre la superfície de la Terra seguint una òrbita circular. A causa del fregament amb l'alta atmosfera, la seva altura disminueix contínuament. Per aquest motiu, l'estació ha descendit fins a una òrbita circular de 340 km d'altura. Calcula:

a) Les velocitats orbitals a 340 km i 360 km d'altura.

b) L'energia necessària per recuperar l'òrbita inicial.

c) La diferència en el període de les òrbites.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6.370$ km.

Solució: a) 7.698,5 m/s; 7.710,0 m/s; b) $2{,}47 \cdot 10^{10}$ J; c) 24,47 s

EXEMPLE RESOLT

15 a) *SAC-D Aquarious* és un satèl·lit d'observació climàtica i oceanogràfica. Va ser llançat al juny de 2011 per un coet que el va col·locar en una òrbita circular sobre la superfície de la Terra a una altura $h = 660$ km. Calcula la velocitat orbital de l'*Aquarious* i el període de la seva òrbita.

b) Determina el treball mínim que haurien de fer els motors del satèl·lit si calgués passar a una altra òrbita més allunyada, el doble de la primera $2h$.

Dades: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_{\text{Aquarious}} = 1.350$ kg.

a) Pel que fa al satèl·lit que orbita:

$$F_G = F_C \rightarrow \frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{(R_T + h)^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{R_T + h}$$

Simplifica i calcula utilitzant les unitats del SI:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3}} =$$

$$= \mathbf{7.520{,}8\ m/s}$$

Relaciona T amb la velocitat orbital del satèl·lit:

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot (R_T + h) \rightarrow T = \frac{2\pi}{v} \cdot (R_T + h)$$

$$T = \frac{2\pi}{7.520{,}8}(6{,}37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3) = 5.881{,}5\ \text{s}$$

b) Els motors haurien de fer un treball igual a la diferència d'energia entre les òrbites:

$$W_{i \rightarrow f} = E_{Mf} - E_{Mi} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{(R_T + 2 \cdot h} - \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{(R_T + h)}\right)$$

$$W_{i \rightarrow f} = G \cdot M_T \cdot m\left(\frac{1}{(R_T + h)} - \frac{1}{(R_T + 2 \cdot h)}\right)$$

$$W_{i \rightarrow f} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot$$

$$\cdot 1350 \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3} - \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 660 \cdot 10^3}\right)$$

$$W_{i \rightarrow f} = \mathbf{6{,}55 \cdot 10^9\ J}$$

52. Prepara una presentació TIC sobre els diferents tipus de satèl·lits, LEO, MEO i GEO. Inclou-hi la seva aplicació, les característiques de les naus, l'òrbita, el període, etc.

RESUM

1 El concepte de camp

Anomenem **camp** una regió de l'espai en què s'aprecia l'efecte de la pertorbació provocada per un cos que té una propietat que el fa interaccionar amb altres cossos que també tenen aquesta propietat.

2 Camp gravitatori creat per masses puntuals

Un camp gravitatori és la regió de l'espai en què s'aprecia la pertorbació provocada per la massa d'un cos.

Intensitat del camp gravitatori en un punt

Camp creat per una massa puntual de massa *M*:

$$\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Camp creat per una distribució de masses puntuals (principi de superposició):

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i \left(-\frac{G \cdot M_i}{r_i^2}\right) \cdot \vec{u}_{ri}$$

Treball degut a les forces gravitatòries

El camp gravitatori és un **camp conservatiu** perquè el treball realitzat per les forces del camp gravitatori només depèn del punt inicial i del punt final del desplaçament, i no pas de la trajectòria seguida.

$$W_{i \to f} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i}$$

Energia potencial gravitatòria

L'**energia potencial gravitatòria** E_P és aquella que posseeix una massa, ja que està sotmesa a la influència gravitatòria d'una altra o unes altres masses.

$$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

L'energia potencial és una magnitud escalar, i en el SI es mesura en **joules** (J).

Conservació de l'energia mecànica en un camp gravitatori

Teorema de conservació de l'energia mecànica: quan un sistema està sotmès només a l'acció de forces conservatives, la seva energia mecànica es conserva.

$$E_{Cf} + E_{Pf} = E_{Ci} + E_{Pi} = E_M$$

Potencial gravitatori en un punt

S'anomena **potencial en un punt *V*** l'energia potencial per unitat de massa en aquest punt:

$$V = \frac{E_P}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

El potencial és una magnitud escalar i en el sistema internacional es mesura en **J/kg**.

Potencial en un punt degut a una **distribució** de **masses puntuals**.

$$V_T = \sum_i V_i = \sum_i -\frac{G \cdot M_i}{r_i}$$

Si considerem dos punts d'un camp gravitatori, *i* i *f*, anomenem **diferència de potencial** entre tots dos la relació $V_f - V_i$:

$$\Delta V = V_f - V_i \to \Delta V = -\frac{G \cdot M}{r_f} - \left(-\frac{G \cdot M}{r_i}\right)$$

3 Representació del camp gravitatori

Les línies de camp són línies tangents al vector intensitat de camp en cada punt. Les superfícies equipotencials són regions de l'espai en què el potencial gravitatori té el mateix valor.

4 El moviment dels cossos celestes

Ptolemeu va explicar el moviment retrògrad dels planetes; **Copèrnic** va plantejar un model heliocèntric; **Kepler** va matisar que les òrbites dels planetes són el·líptiques i **Newton** va relacionar el sistema solar amb la llei de la gravitació universal.

5 Camp gravitatori dels cossos celestes

Anomenem **velocitat d'escapament** la velocitat que ha de tenir un cos per alliberar-se de l'atracció gravitatòria d'un altre cos. Anomenem **matèria fosca** aquella que no emet prou radiació electromagnètica per ser detectada amb els mitjans actuals, però l'existència de la qual es dedueix a partir dels efectes gravitacionals que causa en la matèria visible.

6 Moviment de planetes i satèl·lits

Satèl·lits que orbiten la Terra

Per al satèl·lit que gira a una altura *h* per sobre de la superfície de la Terra:

- $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$
- $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}$

S'anomenen **satèl·lits geostacionaris** o **geosincrònics** aquells que orbiten al voltant de la Terra mantenint-se sempre en un mateix punt.

Energia dels satèl·lits

L'**energia mecànica** d'un satèl·lit:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

La **velocitat de llançament** necessària per posar un satèl·lit en òrbita és aquesta:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r}\right)}$$

L'energia necessària per passar d'una òrbita de radi r_2 a una altra de radi r_3, si $r_2 < r_3$, és aquesta:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$

La velocitat d'escapament d'un satèl·lit que és en el camp gravitatori d'un planeta, de massa M_P i radi R_P, és aquesta:

$$v_{\text{escapament}} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P + h}}$$

h és la distància a què es troba el satèl·lit sobre la superfície del planeta.

Satèl·lits meteorològics

A més de les mesures de temperatura, pressió atmosfèrica i humitat, l'ús d'imatges obtingudes mitjançant satèl·lit ha permès millorar notablement els pronòstics meteorològics, encara que només sigui per a pocs dies. Hi ha dos tipus de satèl·lits meteorològics:

- **Satèl·lits meteorològics geostacionaris.** Tenen un període de 24 hores, és a dir, que coincideix amb el de rotació de la Terra. Això implica que sempre estan situats sobre el mateix punt de la Terra, a uns 35.800 km d'altitud.
- **Satèl·lits meteorològics polars.** Orbiten més a prop de la Terra, a menys de 1.000 km, i ofereixen imatges de més resolució. La seva òrbita transcorre d'un pol a l'altre i el període és més curt que el dels satèl·lits geostacionaris, per això passen per qualsevol punt de la seva òrbita diverses vegades al dia.

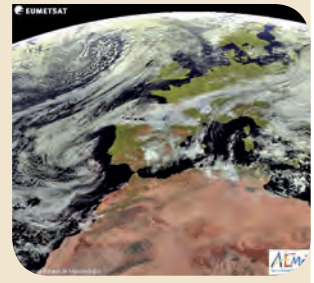
Molts satèl·lits són passius, és a dir, només prenen imatges. Però també hi ha satèl·lits actius capaços de transmetre un senyal de radi i rebre el seu eco després de xocar contra la superfície. Així s'obtenen les imatges de radar que identifiquen, per exemple, zones on plou.

INTERPRETA

1. Com obtenen els satèl·lits l'energia per funcionar?
2. Com es comuniquen els satèl·lits amb les estacions terrestres per emetre les imatges captades?
3. Com és el període dels satèl·lits que orbiten més enllà de l'òrbita geostacionària?

REFLEXIONA

4. Com es modifica el període d'un satèl·lit si li comuniquen energia fins a situar-lo en una òrbita més alta?
5. S'anomena brossa espacial les restes de satèl·lits, coets i altres deixalles que orbiten a l'espai al voltant de la Terra.
   a) Quins són els perills de la brossa espacial?
   b) Per què són tan perillosos aquests residus, encara que mesurin pocs centímetres?
6. Les imatges captades pels satèl·lits meteorològics tenen més usos, a més del pronòstic meteorològic. Quins?



OPINA

7. Contesta.
   a) Et sembla interessant destinar grans quantitats de diners al desenvolupament de satèl·lits meteorològics? Per què?
   b) I al desenvolupament d'altres tipus de satèl·lits: militars, comunicacions, telescopis espacials, sistemes de navegació (com el GPS)...?
8. Quines mesures caldria prendre per reduir tant com fos possible l'existència de brossa espacial?

Perfil del meteoròleg

Què fan?

- Estudien els fenòmens que s'esdevenen a l'atmosfera i les lleis físiques per les quals es regeixen.
- Pronostiquen el temps que farà en diferents indrets del planeta: les temperatures i els fenòmens atmosfèrics que es produiran, com precipitacions en forma de pluja, neu o calamarsa, borrasques, anticiclons, etc.
- Llancen avisos d'alerta en casos de risc deguts a fenòmens atmosfèrics extrems.

Com ho fan?

- Interpreten els resultats obtinguts a partir de les observacions realitzades en estacions meteorològiques.
- S'encarreguen de gestionar l'elaboració dels mapes d'isòbares, els mapes de predicció del temps, els climogrames, etc.
- Comuniquen pels canals oportuns els avisos d'alerta meteorològica.