



Matemáticas

SERIE **RESUELVE**

El libro Matemáticas para 2.º curso de ESO es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Joseba Santxo Uriarte** y **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:

José Antonio Almodóvar Herráiz

Araceli Cuadrado Fernández

Lourdes Díaz Ruiz

Carles Dorce Polo

José Carlos Gámez Pérez

Silvia Marín García

Carlos Pérez Saavedra

Marta Redón Gómez

Domingo Sánchez Figueroa

EDICIÓN

José Antonio Almodóvar Herráiz

Silvia Marín García

Laura Sánchez Fernández

EDITOR EJECUTIVO

Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO

Domingo Sánchez Figueroa

Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

Índice

UNIDAD	SABER	SABER HACER
1 Números enteros	1. Números enteros 8 2. Operaciones con números enteros 10 3. Múltiplos y divisores de números enteros 14 4. Factorización de un número entero 16 5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo 18	• Resolver operaciones de suma y resta con paréntesis • Resolver operaciones combinadas con números enteros • Calcular todos los divisores de un número • Factorizar un número • Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m. • Sacar factor común en operaciones con números enteros • Calcular un múltiplo de un número comprendido entre otros dos números • Calcular una cifra para que un número sea divisible entre otro • Saber si dos números son primos entre sí
6		
2 Fracciones	1. Fracciones 30 2. Fracciones equivalentes 31 3. Comparación de fracciones 34 4. Operaciones con fracciones 35 5. Operaciones combinadas con fracciones 38	• Calcular la fracción irreducible de una fracción dada • Resolver operaciones con fracciones negativas • Resolver operaciones combinadas con fracciones • Calcular un término desconocido para que dos fracciones sean equivalentes • Operar con fracciones que tienen una operación en el numerador y el denominador • Calcular una parte de un total • Calcular el total si conocemos una parte • Calcular una fracción de otra fracción
28		
3 Potencias y raíz cuadrada	1. Potencias de números enteros 50 2. Potencias de fracciones 52 3. Operaciones con potencias 53 4. Raíz cuadrada de números enteros 56 5. Raíz cuadrada de fracciones 58	• Calcular el valor de la potencia de un número entero • Calcular el producto o el cociente de potencias • Calcular la raíz cuadrada de un número • Resolver operaciones combinadas con potencias y raíces • Resolver operaciones con potencias cuando las bases tienen factores primos comunes • Formar un cuadrado con un número de elementos determinado
48		
4 Números decimales	1. Números decimales 68 2. Aproximación y estimación 69 3. Fracciones y números decimales 70 4. Operaciones con números decimales 72 5. Raíz cuadrada. Aproximación decimal 74 6. Notación científica 77	• Determinar el tipo de número decimal que corresponde a una fracción • Dividir números decimales • Calcular la raíz cuadrada de un número entero • Calcular la raíz cuadrada con decimales • Determinar números decimales comprendidos entre dos números • Multiplicar y dividir números decimales por la unidad seguida de ceros
66		
5 Expresiones algebraicas	1. Expresiones algebraicas 86 2. Monomios 87 3. Operaciones con monomios 88 4. Polinomios 90 5. Operaciones con polinomios 91 6. Igualdades notables 94	• Resolver operaciones combinadas con monomios • Extraer factor común en un polinomio • Expresar un polinomio como cuadrado de una suma o una diferencia • Expresar un polinomio como producto de una suma por una diferencia • Expresar algebraicamente algunas relaciones geométricas • Calcular un coeficiente de un polinomio conociendo uno de sus valores numéricos • Resolver operaciones combinadas con polinomios
84		
6 Ecuaciones de primer y segundo grado	1. Igualdades algebraicas 106 2. Elementos de una ecuación 107 3. Ecuaciones de primer grado 108 4. Ecuaciones de segundo grado 112 5. Resolución de problemas mediante ecuaciones 116	• Resolver ecuaciones de primer grado • Resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis • Resolver ecuaciones de primer grado con denominadores • Estudiar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado • Resolver ecuaciones de segundo grado • Resolver problemas utilizando ecuaciones • Resolver ecuaciones con un solo denominador • Resolver ecuaciones que son una igualdad de fracciones • Resolver ecuaciones de segundo grado con paréntesis y denominadores
104		
7 Sistemas de ecuaciones	1. Ecuaciones lineales 128 2. Sistemas de ecuaciones lineales 130 3. Resolución de sistemas de ecuaciones 131 4. Métodos de resolución de sistemas 132 5. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones 136	• Calcular soluciones de una ecuación lineal • Resolver un sistema de ecuaciones lineales • Resolver problemas utilizando sistemas de ecuaciones • Resolver un sistema por reducción cuando los coeficientes no son múltiplos • Resolver un sistema de ecuaciones con paréntesis y denominadores • Expresar enunciados mediante ecuaciones con dos incógnitas
126		

Esquema de la unidad

La estructura de las unidades didácticas es muy sencilla, ya que se trata de facilitar la localización de los contenidos fundamentales, de los ejemplos resueltos y de las actividades propuestas.

Introducción a la unidad: dos elementos básicos, una base sólida y una motivación adecuada.

Las **Claves para empezar** te permitirán recordar aquellos contenidos que te serán útiles para la unidad.

Comenzamos la unidad en torno a la historia, utilidades y curiosidades de algún invento.

CLAVES PARA EMPEZAR

Unidades decimales

Para expresar cantidades que representan partes de la unidad usamos las unidades decimales: décimas (d), centésimas (c), milésimas (m),...

EJEMPLO

1 unidad = 1 U
 $1 U = 10 d$
 $1 d = 0.1 U$

1 centésima = 1 c
 $1 c = 100 U$
 $1 c = 0.01 U$
 $1 m = 1000 U$
 $1 m = 0.001 U$

ACTIVIDADES

1. Copia en tu cuaderno y completa las equivalencias.

a) 30 centésimas = milésimas
b) 1 unidad = centésimas
c) 1 decimo = centésimas
d) 1 unidad = milésimas

Raíz cuadrada

- La **raíz cuadrada exacta** de un número a es otro número b que, al elevarlo al cuadrado, nos da el número a .
- La **raíz cuadrada entera** de un número a es el mayor número entero b cuyo cuadrado es menor que a . El resto de la raíz cuadrada entera se calcula así: $a - b^2$.

EJEMPLO

Calcula los siguientes números.

Raíz exacta: $\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$

Raíz entera: $\sqrt{29} = 5$, porque $5^2 = 25 < 29 < 6^2$. El resto es 4, porque $29 - 25 = 4$.

ACTIVIDADES

1. Calcula la raíz cuadrada de estos cuadrados perfectos.

a) 36 b) 64 c) 49 d) 144

2. Calcula la raíz cuadrada entera y el resto de estos números.

a) 45 b) 10 c) 47 d) 84

Números decimales

4

SABER

- Números decimales
- Aproximación y estimación
- Fracciones y números decimales
- Operaciones con decimales
- Raíz cuadrada
- Notación científica

SABER HACER

- Determinar el tipo de número decimal que corresponde a una fracción
- Dividir números decimales
- Calcular la raíz cuadrada de un número entero
- Calcular la raíz cuadrada con decimales

VIDA COTIDIANA

La sonda espacial

El universo es enorme. Para conocerlo mejor y descubrir zonas inhabitables, los científicos de las sondas espaciales, que son naves no tripuladas que mantienen el espacio.

El Sol se encuentra aproximadamente a 150 millones de km de la Tierra. ¿Puedes escribir ese número utilizando un producto de un número por una potencia de 10?

Se especifican los contenidos (**Saber**) y los procedimientos (**Saber hacer**) de la unidad.

Vida cotidiana te propone un ejercicio sencillo, relacionado con la imagen de entrada.

Páginas de contenidos: SABER y SABER HACER como un todo integrado.

Nuestra propuesta para **Saber** son unos textos claros y estructurados. Los **Ejemplos** te ayudarán a afianzar esos saberes.

Junto a los textos encontrarás **informaciones complementarias**. Además, en **Resuelve el reto** pondremos a prueba tus conocimientos, y tu razonamiento matemático.

3.4. Área del trapecio

Al unir dos triángulos iguales se obtiene un romboide. El área del trapecio es la mitad del área de ese romboide.

El área de un trapecio de base mayor B , base menor b y altura h es:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

EJEMPLO

7. Halla el área de un trapecio de bases 12 cm y 10 cm, y altura 8 cm.

$A = \frac{(12 + 10) \cdot 8}{2} = \frac{22 \cdot 8}{2} = 11 \cdot 8 = 88 \text{ cm}^2$

El área del trapecio es 88 cm².

3.5. Área de un polígono regular

El área de un polígono regular de apotema a es:

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2}$$

EJEMPLO

6. Halla el área de un hexágono regular de lado 10 cm.

Perímetro: $P = 6 \cdot 10 = 60 \text{ cm}$

Apotema: $a = 5\sqrt{3} \text{ cm} \approx 8.7 \text{ cm}$

$A = \frac{60 \cdot 8.7}{2} = 30 \cdot 8.7 = 261 \text{ cm}^2$

El área del hexágono es 261 cm².

ACTIVIDADES

PRÁCTICA. Halla el área de estos polígonos.

a) b) c) d)

REFLEXIÓN. Halla el área de cada zona verde.

a) b) c)

RETO. Halla el lado de un hexágono regular de apotema 10.39 cm y área igual a 374.04 cm².

SABER HACER

Resolver problemas mediante la semejanza de triángulos

Calcula la medida de la altura AC.

Paso a seguir

- Comprobamos que los triángulos que nos da el enunciado son semejantes.
 - Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes porque dos de sus ángulos son iguales (segundo criterio de semejanza).
 - $\angle B = \angle B'$ porque son ángulos rectos.
 - $\angle A = \angle A'$ porque los rayos del sol inciden sobre los dos objetos con la misma inclinación.
- Si los triángulos son semejantes, podemos calcular el lado que buscamos utilizando la proporcionalidad de los lados de los triángulos.
- Interpretemos los resultados.

El triángulo $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes porque están en posición de Tales del ángulo θ es común y AC y $A'C'$ son paralelos.

Si los triángulos son semejantes, tenemos:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{1.5} = \frac{4.5}{2.1} \Rightarrow AC = \frac{1.5 \cdot 4.5}{2.1} = \frac{6.75}{2.1} = 3.21 \text{ m}$$

Consideremos que la sombra de un objeto es perpendicular a él. De la misma manera, sabemos que la altura de un objeto es siempre perpendicular al suelo. Nota que los triángulos que acabamos de usar son triángulos rectángulos.

Al todo de un semáforo, la sombra de una papetera mide 0.4 m, y la sombra del semáforo es 10 cm más larga que la papetera. ¿Cuál es la longitud del semáforo si medimos la papetera y la altura es 0.3 m?

A una determinada hora del día, Juan, que tiene una altura de 1.5 m, proyecta una sombra de 1.875 m. ¿Qué estatura tiene Luis si a esta hora su sombra mide 2.3 m?

En la parte **Saber hacer** aprenderás, paso a paso, los procedimientos necesarios para tu desarrollo matemático.

Las actividades te ayudarán a **practicar, aplicar y reflexionar** sobre los conocimientos. Las actividades que acompañan a **Saber hacer** tienen como objetivo afianzar y dominar estos procedimientos.

Páginas de actividades finales: una forma práctica de aprender a aprender.

Nuestras **Actividades finales** están **secuenciadas** para que aproveches de la mejor forma posible la aplicación de los contenidos estudiados.

Cada actividad te informa de la **difficultad** que tiene. Los **Saber hacer** te ayudarán a seguir profundizando en los procedimientos.

Las actividades finales terminan con una gran cantidad de **Problemas** que te permitirán adaptar tus conocimientos a contextos reales.

ACTIVIDADES FINALES

Un autobús ha invertido 24 minutos en hacer dos quintas partes del trayecto que separa la casa de Manuel del instituto. ¿Cuánto tiempo invertirá en hacer todo el trayecto?

Marta recorre en cuatro horas dos tercios partes de un trayecto, mientras que Enrique tarda tres horas. ¿Cuánto tardará cada uno en hacer todo el trayecto?

En los alumnos de una clase de 2º ESO, dos quintas partes, que son 14 alumnos, practican algún tipo de deporte fuera del horario escolar. Tres séptimos partes estudian otro idioma, y el resto no hace ningún tipo de actividad extracurricular.

a) ¿Cuántos alumnos hay en total en la clase?

b) ¿Cuántos alumnos estudian otro idioma?

c) ¿Cuántos alumnos no hacen ningún tipo de actividad extracurricular?

SABER HACER

Calcular una fracción de otra fracción

Tres quintas partes de los flores de un parque son margaritas, y de estas margaritas, cinco sextas partes son rojas. ¿Qué fracción del total de flores representan las margaritas rojas?

Resuelve de la siguiente manera la fracción:

El dibujo que divide en 30 partes iguales, de las cuales 10 son margaritas rojas.

Resuelve. Se aconseja numéricamente la solución, calculando la fracción de una fracción.

$\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Representar la fracción de una fracción.

Una galleta cuatro quintas partes del presupuesto que le tiene asignado una empresa, y entre dos tercios partes del presupuesto que queda. ¿Qué fracción del total del presupuesto queda ahora mismo?

¿Cuánto le queda para pagar el resto de lo que le ha quedado cuatro séptimos partes de lo que le queda, presta a su hermano dos tercios y todavía le sobran 16 €.

¿Cuántos recibe de la galleta?

Mano ha comido tres octavos partes de una pizza y ha dejado una quinta parte de la que quedaba. ¿Qué porción de la pizza ha comido? Representa gráficamente el problema y resuélvelo.

En una tienda, una bolsa que cuesta 20 € se rebaja dos quintas partes del precio. En las siguientes rebajas, sobre el precio rebajado se aplica un descuento equivalente a una tercera parte del precio rebajado. ¿Cuánto costará la bolsa tras las siguientes rebajas?

En una clase de 21 alumnos, cinco séptimos partes han aprobado la primera evaluación. Si de los alumnos que se presentan a recuperación han aprobado un tercio, ¿cuántos alumnos no han aprobado después de haber hecho la recuperación?

En una promoción de viviendas, un arquitecto proyectó construir 50 viviendas. De las cuales, finalmente, no se construyeron una sexta parte del resto, se vendieron tres cuartos partes del primer mes, después de construídas. Determina:

a) El número de viviendas que se construyeron.

b) La fracción que representan las viviendas que se construyeron.

c) El número de viviendas que fueron vendidas durante el primer mes.

En la selección para un concurso televisivo, eliminan a $\frac{2}{5}$ de los aspirantes en la primera prueba y en la segunda prueba eliminan $\frac{1}{3}$ de los que quedaban.

a) ¿Qué fracción de los concursantes superan la segunda prueba?

b) Si 150 aspirantes superan la primera prueba, ¿cuántos quedan tras la segunda?

Los trenes salen de Valencia en direcciones perpendiculares. Si el primer tren va a 90 km/h y el segundo a 110 km/h, ¿a qué distancia estarán al cabo de una hora y media?

Se construye un triángulo isósceles de un solo sentido, como el que se ve en la figura, de 6 m de ancho. ¿Cuál será la altura máxima permitida para los camiones que miden 2.8 m de ancho?

El adorno de una caja tiene esta forma. Calcula su longitud si el área del cuadrado es 256 cm².

Se construye un triángulo isósceles de un solo sentido, como el que se ve en la figura, de 6 m de ancho. ¿Cuál será la altura máxima permitida para los camiones que miden 2.8 m de ancho?

Sabiendo que se han utilizado 400 cm² de vidrio modelado para construir esta vidriera, calcula cuántos cm² de vidrio amarillo han hecho falta.

DEBES SABER HACER

Teorema de Pitágoras

1. Determina la hipotenusa de los triángulos rectángulos con estos catetos.

a) 5 cm y 12 cm. b) 0.8 dm y 1.8 dm.

2. Calcula el lado de un cuadrado de diagonal 48 cm.

3. Halla la apotema de un hexágono regular de lado 7 cm.

Polígonos

1. Calcula el área de la parte verde.

2. Determina el área de estas figuras.

Ángulos

1. Halla en un triángulo regular:

a) La suma de los ángulos interiores.

b) La medida de un ángulo interior.

c) La medida del ángulo central.

2. Calcula la medida de cada ángulo.

Circunferencia y figuras circulares

1. Calcula la longitud de arco de un ángulo de 45° en una circunferencia de 4.4 cm de diámetro.

2. Determina el área coloreada de estas figuras.

Para finalizar, **Debes saber hacer**. Esta autoevaluación básica te permitirá comprobar si has alcanzado los objetivos mínimos de la unidad.

Páginas de competencia matemática: un paso más en la aplicación de los contenidos aprendidos.

En la vida cotidiana es una actividad relacionada con el invento inicial, donde podrás trabajar con algunos contenidos de la unidad.

Con las **Formas de pensar** pondremos a prueba tu **razonamiento matemático**.

COMPETENCIA MATEMÁTICA

En la vida cotidiana

Hasta la invención del telégrafo, para poder comunicarse con una persona que vivía lejos, había que enviar cartas que tardaban semanas o meses en llegar a su destino. Con la llegada del telégrafo esta comunicación pasó a ser inmediata.

Para transmitir los mensajes, se utilizaba el código Morse. Este código asigna a cada letra del abecedario un código compuesto por rayas y puntos. Los puntos se identifican con un impulso corto en el telégrafo, y los rayos con un impulso largo.

Uno de los problemas de comunicarse mediante este sistema era que las representaciones no eran muy fáciles. En muchos ocasiones fallaban y el mensaje que se transmitió quedaba a medias. Esto hacía necesario que los mensajes fueran lo más cortos posibles.

Para ello, Samuel Morse estudió la frecuencia en la utilización de las letras en los periódicos y otorgó los códigos más cortos a las letras que más se utilizaban. Esto permitió acortar el mensaje y, por tanto, tardar menos tiempo en transmitirlo.

Este es la frecuencia de utilización de las letras del abecedario en castellano y en inglés.

¿Qué letra crees que usará Morse para crear su código?

Formas de pensar. Razonamiento matemático

1. El altura media de un grupo de cinco amigos es de 174 cm. Si la altura de cuatro de ellos es 175, 177, 180 y 179 cm, ¿cuál es la altura de la quinta persona?

2. En la caja fuerte de una entidad bancaria hay billetes de 5 €, 10 €, 20 €, 50 €, 100 €, 200 €, 500 € y 1000 €. Durante la mañana, un cajero de la entidad ha hecho el recuento del número de billetes.

Calcula qué probabilidad hay de que, si el cajero coge dos billetes de la caja fuerte sin mirar:

a) Cope dos billetes de 100 €.

b) Cope un billete de 5 € y uno de 100 €.

c) No saque ningún billete de 100 €.

d) El valor total de los dos billetes sea de 250 €.

PROYECTO FINAL. Trabajo cooperativo

OBJETIVO: Hacer un vídeo resumen con lo mejor del curso.

1º Fase:

- Hacer un listado con los momentos y las situaciones que queráis que incluya el vídeo.

2º Fase:

- Elaborar un guion para cada uno de los momentos que vais a incluir en el vídeo.
- Recibir información sobre programas de edición de vídeos y sus utilidades.
- Recibir distintos vídeos para poder elegir los mejores en cada una de las escenas.

3º Fase:

- Montar el vídeo en clase para que todos nuestros compañeros puedan opinar sobre nuestro trabajo.
- Hacer una breve exposición del motivo por el que consideráis que el vídeo resume los mejores momentos del curso.

Pruebas PISA

Estatura de los alumnos

Un día, en clase de matemáticas, se midió la estatura de todos los alumnos. La estatura media de los chicos es de 140 cm y la estatura media de las chicas es de 150 cm. Entre la sala la media está entre 140 cm. Pedro ha sido el más bajo (mide 130 cm).

En un juego de una casa de feria se utiliza en primer lugar una ruleta. Si la ruleta se para en un número par, entonces el jugador puede sacar una canica de una bolsa. La ruleta y las canicas de la bolsa se representan en los dibujos siguientes.

Cuando se saca una canica negra, se gana un premio. Daniela juega una vez. ¿Cómo es de probable que Daniela gane un premio?

El **Proyecto final** te plantea objetivos que antes o después encontrarás en tu vida diaria. Con él mejorarás tus competencias para el **trabajo cooperativo**.

La unidad finaliza con las **Pruebas PISA**. Estas pruebas internacionales pretenden comprobar tu aprendizaje competencial y conviene que las conozcas.



Usos de los números enteros

Los números enteros se utilizan en muchas situaciones cotidianas. Los **enteros positivos** expresan situaciones del tipo: recibir, ganar, sumar, aumentar...

Los **enteros negativos** se usan para expresar situaciones del tipo: deber, gastar, restar, disminuir...

EJEMPLO

Observa el número entero asociado a cada situación:

Debo 5 € ► -5

Gano 80 € ► +80

Estoy a 30 m de profundidad ► -30

Estoy a 200 m de altura ► +200

ACTIVIDADES

1 Escribe el número entero asociado a cada situación.

- La temperatura mínima de ayer fue 3 grados bajo cero.
- Juana tiene 50 € ahorrados.
- He pedido un préstamo de 500 €.
- La temperatura aumentó en 8 grados del martes al jueves.
- El submarino descendió 50 m.
- Aquel pájaro volaba a 400 m de altura.

Jerarquía de las operaciones con números naturales

Para resolver operaciones combinadas, calculamos siguiendo este orden:

- Operaciones que hay dentro de los paréntesis y corchetes.
- Multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.
- Sumas y restas, de izquierda a derecha.

EJEMPLO

$$\begin{array}{l}
 7 \cdot (8 - 2) : 3 + 9 \\
 = 7 \cdot 6 : 3 + 9 = \\
 = 42 : 3 + 9 = \\
 = 14 + 9 = 23
 \end{array}$$

ACTIVIDADES

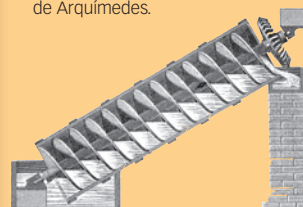
2 Calcula estas operaciones combinadas.

- $82 - 14 : 2 \cdot 3 + 12 : 3$
- $18 : 3 \cdot 5 - 24 : 6 : 2 + 25$
- $7 \cdot 6 : 21 + 25 : 5 + 16 \cdot 2 : 8$
- $55 : 5 - (9 : 3) \cdot 3 + 17$



236 a.C.

Arquímedes diseña el primer ascensor de la historia a partir de dos de sus inventos: la polea compuesta y el tornillo de Arquímedes.



1000 d.C.

En al-Ándalus se utiliza un ascensor con fines militares, diseñado para invadir fortalezas.

Se menciona su uso en el *Libro de los secretos* de Ibn Khalaf al-Murad.



Números enteros

1



SABER

- Números enteros. Operaciones con enteros
- Múltiplos y divisores de números enteros
- Factorización de un número entero
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

SABER HACER

- Resolver operaciones de suma y resta con paréntesis
- Resolver operaciones combinadas con números enteros
- Calcular todos los divisores de un número
- Factorizar un número
- Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m.



? VIDA COTIDIANA

El ascensor

El ascensor es una máquina que sirve para trasladarse verticalmente.

La mayoría de nosotros solemos utilizarlo varias veces al día, su uso se hace imprescindible en edificios altos.

- Si hemos aparcado nuestro coche en la planta -3 y subimos por el ascensor a nuestra casa, que está situada en el 5.º piso, ¿cuántas plantas hemos subido?

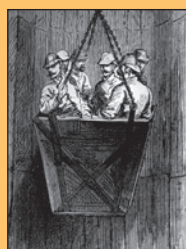
Siglo xvii

Se empiezan a instalar prototipos de ascensores en palacios de familias adineradas en Francia e Inglaterra.



1851

Waterman inventa el primer montacargas.



1853

Elisha Otis construye el primer ascensor con mecanismo automático de seguridad en caso de avería del cable de sustento.

La compañía que se creó entonces todavía existe, Otis Elevator Company.



1957

Se comienzan a comercializar ascensores con puertas automáticas.

En la actualidad, los ascensores recorren alturas de más de 500 m.



1

Números enteros



SE ESCRIBE ASÍ

Los números enteros positivos se escriben habitualmente sin el signo + delante.

$$+5 = 5 \quad +8 = 8$$

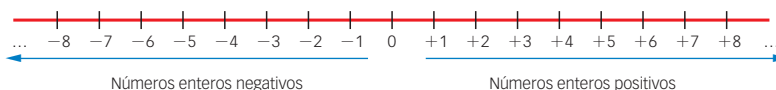
El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$ y está formado por:

- Números **enteros positivos**: $+1, +2, +3, +4, +5, \dots$
- El número cero: 0 .
- Números **enteros negativos**: $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$

1.1. Representación en la recta numérica

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica.

- El cero, 0 , divide la recta en dos partes iguales.
- Los enteros positivos se sitúan a la derecha del cero: $+1, +2, +3, \dots$
- Los enteros negativos se sitúan a la izquierda del cero: $-1, -2, -3, \dots$



EJEMPLO

1. Representa estos números enteros en la recta numérica:

$-9, -6, -3, -2, 0, +5, +6, +8$



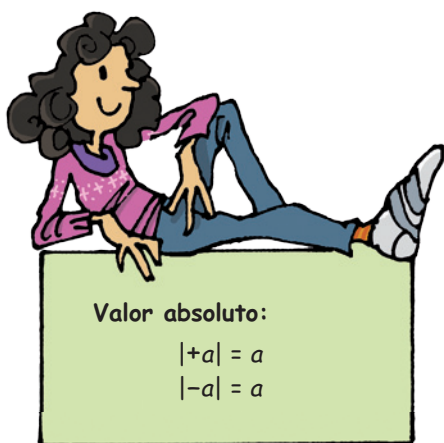
1.2. Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número entero a es el número que se obtiene al prescindir de su signo. Se escribe $|a|$.

EJEMPLO

2. Halla el valor absoluto de -7 y $+5$.

Valor absoluto de $-7 \rightarrow |-7| = 7$ Valor absoluto de $+5 \rightarrow |+5| = 5$



ACTIVIDADES

1 **PRACTICA.** Representa en la recta numérica:

$-4, +6, -7, +2, -5, +3, -8$

2 **PRACTICA.** Escribe el valor absoluto de:

- a) -9 b) $+6$ c) $+9$ d) -4

3 **APLICA.** ¿Cuántos números enteros están comprendidos entre -20 y $+20$?

4 **REFLEXIONA.** Si dos números enteros, uno positivo y otro negativo, están a la misma distancia del cero, ¿qué relación hay entre sus valores absolutos?

1.3. Opuesto de un número entero

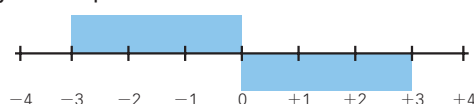
El **opuesto de un número** entero es otro número entero con el mismo valor absoluto pero de signo contrario. El opuesto de a se representa como $Op(a)$.

EJEMPLO

3. Halla el opuesto de -3 y $+3$. Represéntalos en la recta numérica.

$$Op(-3) = +3$$

$$Op(+3) = -3$$



Dos números opuestos están en la recta a igual distancia del origen.



SE ESCRIBE ASÍ

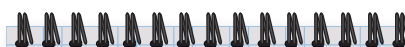
Para «mayor que», el símbolo es $>$.

Para «menor que», el símbolo es $<$.

1.4. Comparación de números enteros

Un número entero es mayor que otro cuando está situado más a la derecha que él en la recta numérica.

- En un grupo de enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- En un grupo de enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Un número entero positivo es mayor que cualquier entero negativo.
- El cero es mayor que cualquier entero negativo y menor que cualquier entero positivo.



RESUELVE EL RETO

¿Qué es mayor: el valor absoluto del opuesto de un número o el opuesto de su valor absoluto?

EJEMPLO

4. Compara cada pareja de números enteros.

a) $+6$ y $+3$

b) -4 y -9

c) -8 y $+1$

$$\left. \begin{array}{l} a) \begin{cases} |+6| = 6 \\ |+3| = 3 \end{cases} \end{array} \right\} 6 > 3 \rightarrow +6 > +3$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \begin{cases} |-4| = 4 \\ |-9| = 9 \end{cases} \end{array} \right\} 4 < 9 \rightarrow -4 > -9$$

c) $-8 < +1$, ya que un entero negativo es menor que cualquier positivo.

ACTIVIDADES

5 **PRACTICA.** Escribe el opuesto de cada número.

$$-6, +5, -8, +9, -11, +12, -4$$

7 **APLICA.** Ordena de menor a mayor.

$$-7, -2, +5, 0, +3, -8, +4, -10$$

6 **PRACTICA.** Compara cada pareja de números.

a) -3 y $+6$

c) 0 y $+5$

e) $+7$ y $+8$

b) -8 y -2

d) -6 y 0

f) -11 y -9

8 **REFLEXIONA.** Escribe un número entero y calcula el opuesto de su opuesto.

¿Qué observas? ¿Ocurre siempre lo mismo para cualquier número?

2.1. Suma y resta de números enteros

Para **sumar dos números enteros**:

- Si los sumandos tienen el **mismo signo**, se suman sus valores absolutos y al resultado se le pone el mismo signo.
- Si tienen **signo diferente**, se restan los valores absolutos y al resultado se le pone el signo del sumando de mayor valor absoluto.

Para **restar dos números enteros**, se suma al primero el opuesto del segundo.

Forma abreviada
 $(+a) = a$ $+(+a) = +a$ $-(-a) = -a$
 $(-a) = -a$ $+(-a) = -a$ $-(-a) = +a$

**EJEMPLO**

5. Calcula.

a) $(+5) + (+9) = +14$

Mismo signo $\rightarrow | +5 | + | +9 | = 5 + 9 = 14$

b) $(+5) + (-9) = -4$

Distinto signo $\rightarrow | -9 | - | +5 | = 9 - 5 = 4$, y ponemos signo $-$.

c) $(+5) - (+9) = (+5) + \text{Op } (+9) = (+5) + (-9) = -4$

Para sumar y restar varios números enteros, primero se escriben estos en **forma abreviada**, quitando los paréntesis de los números. Después sumamos los números con signo $+$, sumamos los que tienen signo $-$ y restamos a la suma de los positivos la de los negativos.

EJEMPLO

6. Calcula $(-3) - (+5) - (-9) + (+2)$.

En forma abreviada: $-3 - 5 + 9 + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Suma de positivos: } 9 + 2 = 11 \\ \text{Suma de negativos: } 3 + 5 = 8 \end{array} \right\} \text{Resultado: } 11 - 8 = 3$$

ACTIVIDADES

9 **PRACTICA.** Calcula.

a) $(-3) + (-7)$

c) $(-3) - (-7)$

b) $(+8) + (-4)$

d) $(+8) - (-4)$

10 **PRACTICA.** Expresa abreviadamente y calcula.

a) $(+3) + (-2) - (-5) - (+2)$

b) $(-1) - (-4) + (+6) - (+2)$

11 **APLICA.** Calcula.

a) $7 - 2 + 4 - 5 - 1$

c) $-4 - 1 - 5 + 7 + 4$

b) $-3 + 2 - 1 - 6 - 2$

d) $6 + 2 - 3 + 4 - 5$

12 **REFLEXIONA.** Completa en tu cuaderno.

a) $(+3) + \square = -9$

c) $\square + (-1) = +1$

b) $(-5) - \square = +1$

d) $\square - (-2) = +4$

➔ SABER HACER



Resolver operaciones de suma y resta con paréntesis

Calcula el resultado de esta operación:

$$-5 - (-3 + 2) + (4 - 6)$$

Pasos a seguir

1. Eliminamos los paréntesis.
Si el paréntesis tiene delante un signo $-$, los signos de los números de dentro cambian.
Si va delante un signo $+$, los números mantienen su signo.

$$\begin{array}{ccccccc} -5 & \ominus & (-3 & + & 2) & \oplus & (4 - 6) = \\ \text{Signo } - & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \text{Signo } + \\ = -5 & + & 3 & - & 2 & + & 4 & - & 6 \end{array}$$

2. Calculamos el resultado de la expresión abreviada obtenida como ya sabemos.

$$\text{Suma de positivos: } 3 + 4 = 7$$

$$\text{Suma de negativos: } 5 + 2 + 6 = 13$$

$$\text{Resta: } 7 - 13 = -6$$

$$-5 - (-3 + 2) + (4 - 6) = -6$$

Para sumar y restar varios números enteros sin paréntesis, también se pueden resolver las operaciones en el orden en que aparecen.

$$\begin{aligned} -5 + 3 - 2 + 4 - 6 &= \\ &= \underbrace{-5 + 3}_{=-2} - 2 + 4 - 6 = \\ &= \underbrace{-2 - 2}_{=-4} + 4 - 6 = \\ &= \underbrace{-4 + 4}_{=0} - 6 = -6 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

- 13** Expresa en forma abreviada y calcula.

- a) $(-2) - (-7) - (+4) - (-3) + (+2)$
- b) $(+5) - (+4) - (+2) + (-1) + (-3)$
- c) $(-1) - (-1) - (+1) + (-1) - (-1)$
- d) $(+4) - (+2) - (-5) + (-1) - (-2)$
- e) $(-5) - (+3) + (-1) + (+2) - (-5)$
- f) $(+1) - (+2) + (+3) - (+7) - (-8)$

- 14** Calcula.

- a) $3 - 6 - 7 + 2 - 4 - 5 + 1$
- b) $-2 - 2 - 4 + 6 + 3 + 5$
- c) $6 - 1 - 2 - 4 + 5 + 2$
- d) $-8 - 1 - 2 + 4 - 1 + 3 - 7$
- e) $2 + 3 - 1 + 4 - 6 - 7 + 5$

- 15** Efectúa estas operaciones eliminando primero los paréntesis.

- a) $(4 - 1) - (2 - 3)$
- b) $(8 + 2) + (3 - 5)$
- c) $(-8 + 10) - (10 - 8)$
- d) $(-4 - 5) - (7 + 2)$
- e) $(9 - 3) + (5 - 9)$

- 16** Halla el resultado de estas operaciones.

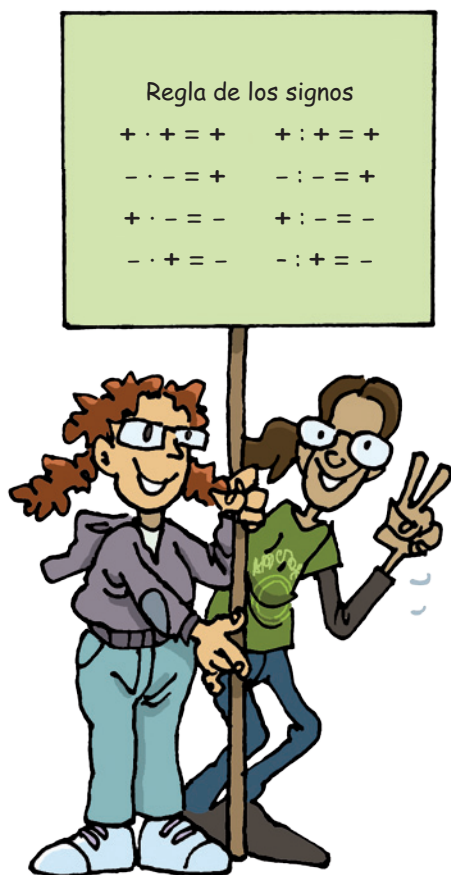
- a) $-9 + (3 - 2 - 1) + 7$
- b) $4 + (6 - 3) - (2 - 1)$
- c) $-7 - (4 - 6) - (1 + 5)$
- d) $5 - (4 + 2 + 3) - 6$
- e) $-3 - (-1 - 2 - 3) + (5 - 1)$

- 17** Calcula.

- a) $-8 - (-3 - 2 + 1 - 4) + 5$
- b) $2 + (1 + 5 - 6 - 3) - 8$
- c) $-1 - (-2 - 3 + 4) - (1 - 5)$
- d) $-(2 - 1) + (-4 + 2) - 11$
- e) $9 - (2 - 5) + (3 - 1 - 2) - 4 - 7$
- f) $-4 + (-1 + 6) - (-2 + 1 - 3 + 5) + 6$

- 18** Completa estas operaciones para que todas las igualdades sean ciertas.

- a) $-1 - (-2 - \square) = 4 = -5 + \square$
- b) $(1 + \square - 3) - 1 = -1 = 6 - \square$
- c) $3 - (\square - 1) = -3 = \square + 4$
- d) $(5 - \square + 1) - 2 = -4 = \square + 2$
- e) $9 + (2 - \square - 3) = 13 = -7 - \square$



2.2. Multiplicación de números enteros

Para **multiplicar dos números enteros**, primero se multiplican sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo $+$ si los dos factores tienen el mismo signo y signo $-$ si tienen signos diferentes.

EJEMPLO

7. Calcula.

Mismo signo $\rightarrow$ Resultado $+$

Distinto signo $\rightarrow$ Resultado $-$

a) $(+3) \cdot (+4) = +12$

c) $(+3) \cdot (-4) = -12$

b) $(-3) \cdot (-4) = +12$

d) $(-3) \cdot (+4) = -12$

Para calcular el producto de varios números enteros, se multiplican sus valores absolutos. El resultado tendrá signo $+$ si el número de factores negativos es par, y tendrá signo $-$ si es impar.

EJEMPLO

8. Calcula.

a) $(+5) \cdot (+8) \cdot (-2) = -80$

b) $(-10) \cdot (+3) \cdot (-5) = +150$

2.3. División de números enteros

Para **dividir dos números enteros**, primero se dividen sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo $+$ si los dos factores tienen el mismo signo y signo $-$ si tienen signos diferentes.

EJEMPLO

9. Calcula.

Mismo signo $\rightarrow$ Resultado $+$

Distinto signo $\rightarrow$ Resultado $-$

a) $(+35) : (+7) = +5$

c) $(+35) : (-7) = -5$

b) $(-35) : (-7) = +5$

d) $(-35) : (+7) = -5$

RESUELVE EL RETO

Encuentra dos números enteros cuyo cociente sea mayor que ellos.

ACTIVIDADES

19 PRACTICA. Calcula.

a) $(-7) \cdot (-4)$

c) $(+8) \cdot (+9)$

b) $(-6) \cdot (+10)$

d) $(+4) \cdot (+5)$

20 PRACTICA. Divide.

a) $(-63) : (+9)$

c) $(-14) : (-2)$

b) $(-24) : (-3)$

d) $(+35) : (-5)$

21 APLICA. Completa.

a) $\square \cdot (-7) = +21$

d) $(+24) : \square = +4$

b) $(+5) \cdot \square = -35$

e) $\square : (-7) = +7$

c) $\square \cdot (+9) = 0$

f) $(-10) : \square = -10$

22 REFLEXIONA. Halla el signo de un producto de 99 factores con un tercio de ellos negativos.

➔ SABER HACER



Resolver operaciones combinadas con números enteros

Calcula el resultado de esta operación:

$$(+12) : (-6) - [(-4) : (+2)] : (-2) + (-3) \cdot (-2) - (-6 - 1)$$

Pasos a seguir

1. Realizamos las operaciones que hay entre paréntesis y corchetes.
2. Calculamos las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen.
3. Calculamos las sumas y restas en el orden en el que aparecen.

$$\begin{aligned}
 & (+12) : (-6) - [(-4) : (+2)] : (-2) + (-3) \cdot (-2) - (-6 - 1) = \\
 & = (+12) : (-6) - (-2) : (-2) + (-3) \cdot (-2) - (-7) = \\
 & = -2 - 1 + 6 - (-7) = \\
 & = -3 + 6 + 7 = \\
 & = 3 + 7 = \\
 & = 10
 \end{aligned}$$

Recuerda que al resolver las operaciones que hay entre paréntesis, el resultado queda entre paréntesis.

$$\begin{aligned}
 2 - (-6 - 1) &= 2 - (-7) = \\
 &= 2 + 7 = 9
 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

23 Calcula.

- $(-2) \cdot (-7) : (+14)$
- $(+12) : (-2) \cdot (+3)$
- $(-15) : (-3) : (-5)$
- $(+4) \cdot (+2) - (-5) : (+5)$
- $(-8) : (+4) - (+16) : (-2)$
- $6 - (+10) : (-2) + (+9) \cdot (-1)$

24 Completa los huecos en tu cuaderno.

- $(-12) : (+6) - 1 = 3 - \square$
- $(+10) \cdot [(+2) : (-2)] = 5 + \square$
- $6 - (-8) : (+2) = \square - 4$
- $(+5) \cdot (+3) + 2 = \square + 3$

25 Efectúa estas operaciones.

- $9 - (+8) : (-4) - 2 + (+3) \cdot (+2)$
- $[9 - (+8) : (-4)] : (+11) - (+6) : (-3)$
- $-5 - [4 - 1 + 3] : (+2) - (10 - 8)$
- $-6 : (3 - 2 - 2) - (1 - 2 + 3)$
- $4 \cdot [3 - 2 \cdot (-5)] - 12 : 3 + 6 : 2$
- $5 \cdot (-2) - [10 + 2 \cdot (-4)] : 2 - (-12) : 6$

26 Averigua qué operaciones están bien hechas.

- $-9 + (8 - 2 - 1) : (-5) = 10$
- $4 - (-6 - 3) : (-2 - 1) = 1$
- $(-7 - 1) : 4 - (6 + 2) : (-2) = -6$
- $(-5 - 1 + 2 + 8) : (-2 - 1 - 1) = -1$
- $-3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - (5 - 6 + 2) = 13$

27 ¿Qué operaciones dan el mismo resultado?

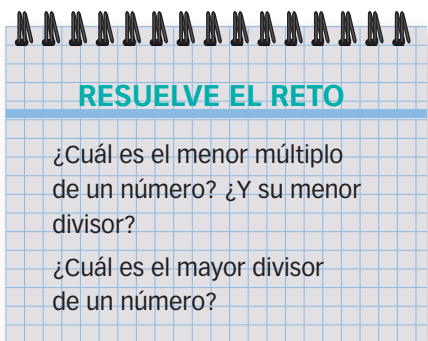
- $-8 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1$
- $4 - (6 - 2 + 3) \cdot 5$
- $5 + 6 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 + 2$
- $(12 - 14 + 6) \cdot (-7) + 2$
- $2 \cdot (5 - 1 - 7) : 6 - 4$
- $-9 : (6 + 2 - 1 - 4) - 8$

28 Coloca los paréntesis para que las igualdades sean ciertas.

- $-1 - 2 \cdot 3 + 4 = -11$
- $4 + 5 - 6 \cdot 2 - 3 = 3$
- $4 + 5 - 6 \cdot 2 - 3 = 15$
- $8 - 3 + 2 + 4 \cdot 6 = 31$



La divisibilidad se suele estudiar solo en los números enteros positivos, ya que para los negativos se cumplen las mismas propiedades.



RESUELVE EL RETO

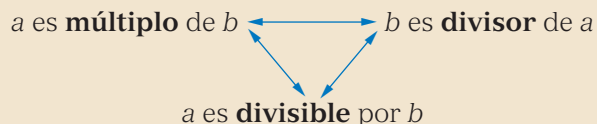
¿Cuál es el menor múltiplo de un número? ¿Y su menor divisor?

¿Cuál es el mayor divisor de un número?

3

Múltiplos y divisores de números enteros

Si la división $a : b$ es exacta, se cumple que:



El conjunto de todos los múltiplos de un número se obtiene multiplicándolo por los sucesivos números enteros positivos. Se representa por $\hat{a}$. Un número tiene infinitos múltiplos.

$$\hat{a} = \{a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots\}$$

El conjunto de todos los divisores de un número se obtiene realizando las sucesivas divisiones por los números positivos menores que él y seleccionando aquellos cuya división es exacta. Se representa por $\text{Div}(a)$.

EJEMPLOS

10. Calcula los primeros cinco múltiplos de 9.

$$\text{Múltiplos de } 9 \rightarrow \hat{9} = \{9 \cdot 1, 9 \cdot 2, 9 \cdot 3, 9 \cdot 4, 9 \cdot 5, \dots\} = \{9, 18, 27, 36, 45, \dots\}$$

11. ¿Es 8 divisor de 12? ¿Y de 16?

8 no es divisor de 12 porque la división $12 : 8$ no es exacta.

8 sí es divisor de 16 porque $16 : 8 = 2$.

Un número es **primo** cuando es positivo y sus únicos divisores son él mismo y la unidad. En caso contrario, es **compuesto**.

EJEMPLO

12. Determina si los números 11 y 33 son primos o compuestos.

$\text{Div}(11) = \{1, 11\} \rightarrow$ Dos divisores: es un número primo.

$\text{Div}(33) = \{1, 3, 11, 33\} \rightarrow$ Más de dos divisores: es compuesto.

ACTIVIDADES

- 29 **PRACTICA.** Calcula los cinco primeros múltiplos de cada número.
- a) 4 b) 8 c) 19 d) 10 e) 13

- 30 **PRACTICA.** Calcula un número múltiplo de:
- a) 2 y 3 c) 2 y 16 e) 2, 3, 4 y 6
b) 3 y 5 d) 2, 3 y 5 f) 2, 3, 5 y 7

- 31 **APLICA.** Copia en tu cuaderno y completa.

a) $\hat{3} = \{3, 6, \square, 12, \dots\}$

b) $\text{Div}(\square) = \{\square, 7\}$

c) $\text{Div}(\square) = \{1, 2, 4, 8\}$

- 32 **REFLEXIONA.** Dados dos números, ¿podemos hallar el mayor de sus múltiplos comunes?

SABER HACER

★ Calcular todos los divisores de un número

Halla todos los divisores de 48.

Pasos a seguir

1. Dividimos el número entre los números naturales (1, 2, 3...) hasta llegar a una división en la que el cociente sea menor que el divisor.

$$\begin{array}{r} 48 \overline{)1} \\ 0 \ 48 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)2} \\ 0 \ 24 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)3} \\ 0 \ 16 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)4} \\ 0 \ 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \overline{)5} \\ 3 \ 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)6} \\ 0 \ 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)7} \\ 6 \ 6 \\ \hline \end{array}$$

Paramos de dividir, el cociente es menor que el divisor $6 < 7$

2. De cada división exacta, obtenemos dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.

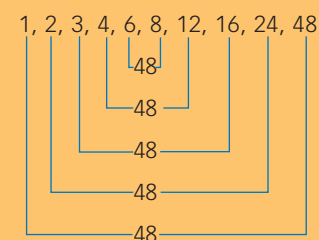
$48 : 1 = 48 \rightarrow 1 \text{ y } 48 \text{ son divisores de } 48.$
 $48 : 2 = 24 \rightarrow 2 \text{ y } 24 \text{ son divisores de } 48.$
 $48 : 3 = 16 \rightarrow 3 \text{ y } 16 \text{ son divisores de } 48.$
 $48 : 4 = 12 \rightarrow 4 \text{ y } 12 \text{ son divisores de } 48.$
 $48 : 6 = 8 \rightarrow 6 \text{ y } 8 \text{ son divisores de } 48.$

El resto de divisiones no son exactas.

Los divisores de 48 son:

$\text{Div}(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

Si ordenas los divisores de un número y multiplicas los que están en sus extremos, obtienes ese número.



ACTIVIDADES

- 33 Halla todos los divisores de estos números y averigua cuáles son primos.

a) 18 d) 80 g) 42
 b) 31 e) 79 h) 41
 c) 32 f) 37 i) 96

- 34 Calcula todos los divisores de estos números y averigua cuáles son primos.

a) 199 c) 582 e) 856
 b) 424 d) 603 f) 1021

- 35 Estos son todos los divisores de un número. Completa en tu cuaderno los que faltan. ¿De qué número se trata en cada caso?

a) $\{1, \square, \square, 8\}$ c) $\{1, 2, 3, 5, \square, 10, 15, \square\}$
 b) $\{1, 5, \square\}$ d) $\{\square, 2, 4, \square, 8, 10, \square, 40\}$

- 36 Halla los divisores de 24 y de 30. ¿Qué números aparecen en las dos listas? ¿Cuál es el mayor de sus divisores comunes?

- 37 ¿Tienen algún divisor común estas parejas de números?

a) 24 y 49 b) 48 y 95 c) 33 y 102

- 38 Razona si es verdadero o falso.

a) Todo múltiplo de un número es mayor que ese número.
 b) Todo número es divisor de su doble y de su triple.
 c) Existe un número que es divisor de todos los números.
 d) Todos los números impares son primos.
 e) Todos los números primos, salvo el 2, son impares.

- 39 María tenía un montón de lápices. Al agruparlos de 3 en 3 le ha sobrado 1. ¿Cuántos lápices puede tener María? Escribe cinco posibles soluciones.



- 40 Marcos quiere repartir 60 DVD en cajas de manera que en todas haya el mismo número de DVD y no sobre ninguno.

a) ¿Cuántos DVD puede poner en cada caja?
 b) ¿Cuántas cajas obtendrá en cada caso?