

# Índice

UNIDAD	SABER	SABER HACER
<b>1</b> Números reales. Porcentajes	1. Números racionales 8 2. Números irracionales 9 3. Números reales 10 4. Aproximación de números reales 12 5. Errores de aproximación 13 6. Intervalos 14 7. Porcentajes 16 8. Interés simple 18 9. Interés compuesto 19	<ul style="list-style-type: none"> <li>Hallar los conjuntos numéricos a los que pertenece un número</li> <li>Calcular la unión y la intersección de intervalos</li> <li>Resolver problemas de porcentajes encadenados</li> <li>Representar una raíz cuadrada aplicando el teorema de Pitágoras sucesivas veces</li> <li>Calcular la cantidad inicial sabiendo los intereses producidos</li> </ul>
<b>6</b>		
<b>2</b> Potencias y radicales. Logaritmos	1. Potencias de exponente entero 30 2. Radicales 32 3. Potencias de exponente fraccionario 33 4. Operaciones con radicales 34 5. Racionalización 38 6. Notación científica 40 7. Logaritmos 41 8. Propiedades de los logaritmos 42	<ul style="list-style-type: none"> <li>Extraer factores de un radical</li> <li>Realizar operaciones combinadas con radicales</li> <li>Racionalizar</li> <li>Resolver ecuaciones logarítmicas</li> <li>Simplificar radicales y potencias de exponente fraccionario</li> <li>Sumar y restar en notación científica</li> <li>Multiplicar y dividir en notación científica</li> <li>Resolver problemas de interés compuesto utilizando logaritmos</li> </ul>
<b>28</b>		
<b>3</b> Polinomios y fracciones algebraicas	1. Polinomios 54 2. Potencia de un polinomio 56 3. Igualdades notables 57 4. División de polinomios 58 5. Teorema del resto 60 6. Raíces de un polinomio 61 7. Factorización de polinomios 62 8. Fracciones algebraicas 64	<ul style="list-style-type: none"> <li>Extraer factor común en un polinomio</li> <li>Dividir un polinomio entre <math>(x - a)</math> mediante la regla de Ruffini</li> <li>Factorizar un polinomio</li> <li>Resolver operaciones con fracciones algebraicas</li> <li>Calcular un polinomio conociendo sus raíces y su coeficiente principal</li> </ul>
<b>52</b>		
<b>4</b> Ecuaciones e inecuaciones	1. Ecuaciones 74 2. Ecuaciones de primer y segundo grado 75 3. Otros tipos de ecuaciones 77 4. Inecuaciones 82	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolver una ecuación bicuadrada</li> <li>Resolver una ecuación mediante factorización</li> <li>Resolver ecuaciones racionales</li> <li>Resolver ecuaciones con radicales</li> <li>Resolver inecuaciones de segundo grado</li> <li>Resolver ecuaciones del tipo <math>ax^{2n} + bx^n + c = 0</math></li> <li>Resolver inecuaciones de grado mayor que 1</li> </ul>
<b>72</b>		
<b>5</b> Sistemas de ecuaciones e inecuaciones	1. Sistemas de ecuaciones lineales 94 2. Resolución de sistemas de ecuaciones 96 3. Sistemas de ecuaciones no lineales 98 4. Sistemas de inecuaciones con una incógnita 100 5. Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas 102	<ul style="list-style-type: none"> <li>Determinar gráficamente el número de soluciones de un sistema de ecuaciones</li> <li>Resolver un sistema de ecuaciones lineales</li> <li>Resolver sistemas de ecuaciones no lineales</li> <li>Resolver sistemas de inecuaciones con una incógnita</li> <li>Resolver sistemas de inecuaciones con dos incógnitas</li> <li>Resolver sistemas de ecuaciones en función de un parámetro</li> <li>Resolver un sistema de ecuaciones compatible indeterminado</li> <li>Resolver sistemas de ecuaciones no lineales por el método de reducción</li> </ul>
<b>92</b>		
<b>6</b> Áreas y volúmenes. Semejanza	1. Perímetro y área de figuras planas 114 2. Área de cuerpos geométricos 118 3. Volumen de cuerpos geométricos 122 4. Semejanza 124 5. Semejanza en áreas y volúmenes 125	<ul style="list-style-type: none"> <li>Calcular el área de polígonos</li> <li>Calcular el área de figuras planas</li> <li>Calcular el área de un poliedro</li> <li>Calcular el área de un cuerpo de revolución</li> <li>Calcular el volumen de un cuerpo geométrico</li> <li>Calcular el área de un triángulo cualquiera conociendo sus lados</li> <li>Calcular el área de un trapecio circular</li> <li>Calcular el área y el volumen de un tronco de pirámide</li> <li>Calcular el área y el volumen de un tronco de cono</li> </ul>
<b>112</b>		
<b>7</b> Trigonometría	1. Medidas de un ángulo agudo 136 2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo 137 3. Relaciones entre las razones trigonométricas 138 4. Razones trigonométricas de $30^\circ$ , $45^\circ$ y $60^\circ$ 140 5. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera 141 6. Signo de las razones trigonométricas 142 7. Relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos 144 8. Resolución de triángulos rectángulos 146	<ul style="list-style-type: none"> <li>Calcular todas las razones trigonométricas de un ángulo agudo conociendo una de ellas</li> <li>Reducir ángulos al primer cuadrante</li> <li>Resolver problemas mediante trigonometría</li> <li>Calcular el área de un triángulo conociendo dos ángulos y un lado</li> <li>Calcular el área de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo que forman</li> <li>Calcular el área de un polígono regular</li> <li>Determinar longitudes mediante el método de la doble tangente</li> </ul>
<b>134</b>		

UNIDAD	SABER	SABER HACER
<b>8 Vectores y rectas</b>	1. Vectores 158 2. Operaciones con vectores 160 3. Ecuación vectorial de la recta 162 4. Ecuaciones paramétricas de la recta 163 5. Ecuación continua de la recta 164 6. Ecuación punto-pendiente y explícita de la recta 165 7. Ecuación general de la recta 166 8. Posición relativa de dos rectas en el plano 168	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calcular las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos</li> <li>• Calcular rectas paralelas y perpendiculares a una dada</li> <li>• Calcular el punto medio de un segmento</li> <li>• Determinar si un punto pertenece a una recta</li> <li>• Calcular un punto de una recta</li> <li>• Determinar el punto de intersección de dos rectas secantes</li> </ul>
<b>156</b>		
<b>9 Funciones</b>	1. Concepto de función 180 2. Dominio y recorrido de una función 182 3. Continuidad y puntos de corte con los ejes 184 4. Crecimiento y decrecimiento 186 5. Simetría y periodicidad 188 6. Funciones definidas a trozos 190	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar gráficamente una función</li> <li>• Calcular el dominio de una función</li> <li>• Calcular los puntos de corte de una función</li> <li>• Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función</li> <li>• Estudiar una función</li> <li>• Representar una función definida a trozos</li> <li>• Calcular el dominio y el recorrido de una función a partir de su representación gráfica</li> <li>• Calcular la tasa de variación media de una función</li> <li>• Representar una función conociendo algunas de sus características</li> </ul>
<b>178</b>		
<b>10 Funciones polinómicas y racionales</b>	1. Funciones polinómicas de primer grado 202 2. Funciones polinómicas de segundo grado 204 3. Función de proporcionalidad inversa 208 4. Funciones racionales 210	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar funciones lineales</li> <li>• Representar funciones cuadráticas</li> <li>• Resolver problemas mediante funciones de proporcionalidad inversa</li> <li>• Representar gráficamente una función racional del tipo <math>y = \frac{k}{x-a} + b</math></li> <li>• Calcular la ecuación de una función lineal a partir de su gráfica</li> <li>• Calcular los puntos de intersección de las gráficas de dos funciones</li> <li>• Representar gráficamente una función racional del tipo <math>y = \frac{ax+b}{x-c}</math></li> <li>• Representar una función definida a trozos no lineal</li> </ul>
<b>200</b>		
<b>11 Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas</b>	1. Funciones exponenciales 222 2. Funciones logarítmicas 226 3. Funciones trigonométricas 230	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar funciones exponenciales del tipo <math>y = a^x</math></li> <li>• Representar funciones exponenciales del tipo <math>y = a^x + b</math> e <math>y = a^{(x+b)}</math></li> <li>• Representar funciones logarítmicas del tipo <math>y = \log_a x</math></li> <li>• Representar funciones logarítmicas del tipo <math>y = \log_a x + b</math> e <math>y = \log_a(x+b)</math></li> <li>• Calcular la expresión algebraica de una función exponencial del tipo <math>y = a^x</math> a partir de su gráfica</li> <li>• Representar gráficamente una función exponencial conociendo alguna de sus características</li> <li>• Calcular la expresión algebraica de una función logarítmica del tipo <math>y = \log_a x</math> a partir de su gráfica</li> <li>• Representar gráficamente una función logarítmica conociendo alguna de sus características</li> </ul>
<b>220</b>		
<b>12 Estadística</b>	1. Muestras y variables estadísticas 240 2. Tablas de frecuencias 241 3. Gráficos estadísticos 242 4. Medidas de centralización 244 5. Medidas de posición 246 6. Medidas de dispersión 248 7. Diagramas de dispersión 250 8. Correlación 251	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elegir el tipo de gráfico adecuado a cada tipo de variable estadística</li> <li>• Calcular e interpretar las medidas de centralización</li> <li>• Calcular e interpretar las medidas de posición</li> <li>• Interpretar conjuntamente las medidas de centralización y dispersión</li> <li>• Añadir o suprimir datos para obtener una media determinada</li> <li>• Añadir o suprimir datos para obtener una mediana determinada</li> <li>• Comparar la dispersión de dos variables</li> </ul>
<b>238</b>		
<b>13 Combinatoria</b>	1. Métodos de conteo 262 2. Números combinatorios 264 3. Variaciones 266 4. Permutaciones 267 5. Combinaciones 268	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calcular el número de posibilidades de un experimento con un diagrama de árbol</li> <li>• Calcular el número de posibilidades con variaciones, permutaciones y combinaciones</li> <li>• Calcular el número de posibilidades que cumplen una propiedad</li> </ul>
<b>260</b>		
<b>14 Probabilidad</b>	1. Experimentos aleatorios. Sucesos 278 2. Operaciones con sucesos 279 3. Frecuencia y probabilidad 280 4. Probabilidad de un suceso 281 5. Regla de Laplace 282 6. Propiedades de la probabilidad 284 7. Probabilidad condicionada 286	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar la regla de Laplace para calcular probabilidades</li> <li>• Calcular probabilidades utilizando sus propiedades</li> <li>• Calcular probabilidades en experimentos compuestos</li> <li>• Calcular la probabilidad de algunos sucesos no equiprobables</li> <li>• Calcular la probabilidad de un suceso compuesto mediante tablas de contingencia</li> </ul>
<b>276</b>		



## Páginas de actividades finales: una forma práctica de aprender a aprender.

Nuestras **Actividades finales** están **secuenciadas** para que aproveches de la mejor forma posible la aplicación de los contenidos estudiados.

Cada actividad te informa de la **dificultad** que tiene. Los **Saber hacer** te ayudarán a seguir profundizando en los procedimientos.

Las actividades finales terminan con una gran cantidad de **Problemas** que te permitirán adaptar tus conocimientos a contextos reales.

**ACTIVIDADES FINALES**

**SABER HACER**

1. Calcular el área de un trapecio circular.

2. Halla el área del trapecio circular.

**Problemas con áreas y volúmenes**

1. Determina el área y el volumen de estos troncos de cono.

2. Calcula el volumen y el área de un tronco de cono cuyos radios miden 5 y 3 cm y su generatriz 2,9 cm.

**Seemjanza**

1. Tenemos un tronco de dimensiones 3, 4 y 5 cm. Si cortamos un tronco semejante al anterior con razón de semejanza 0,5, ¿cuál es su volumen?

2. El área lateral de un cilindro mide 75,40 cm<sup>2</sup>. Calcula el radio del cilindro sabiendo que su altura es de 4 cm. Determina el volumen de ese cilindro semejante a él con razón de semejanza 0,25.

3. Halla el área de una pirámide regular de base hexagonal de altura 3 cm y arista lateral 3 cm, halla el área de una pirámide semejante con razón de semejanza 2.

4. El área total de un cono es de 94,25 cm<sup>2</sup>. ¿Cuál es su generatriz si su radio mide 3 cm? ¿Cuál es su altura? Si el área total de un cono semejante mide 23,56 cm<sup>2</sup>, ¿cuánto vale la razón de semejanza?

**DEBES SABER HACER**

**Área de figuras planas**

1. Calcula el área de estas figuras.

2. Halla el área de estas figuras.

3. Prisma de altura 4 m y base un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 m.

4. Prisma de base un triángulo rectángulo de base 3 cm y altura 4 cm.

**Volúmenes**

1. Calcula el volumen de esta figura.

**Seemjanza**

1. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 3 cm. Si se construye otra esfera semejante cuya razón de semejanza sea 1,5, ¿cuánto medirá su área y su volumen?

Para finalizar, **Debes saber hacer**. Esta autoevaluación básica te permitirá comprobar si has alcanzado los objetivos mínimos de la unidad.

## Páginas de competencia matemática: un paso más en la aplicación de los contenidos aprendidos.

En la **vida cotidiana** es una actividad relacionada con el invento inicial, donde podrás trabajar con algunos contenidos de la unidad.

Con las **Formas de pensar** pondremos a prueba tu **razonamiento matemático**.

**COMPETENCIA MATEMÁTICA**

**En la vida cotidiana**

1. Las primeras montañas rusas que se construyeron eran de madera. Una de sus características era que toda la vía se encontraba en un mismo plano, es decir, tan solo había subidas y bajadas. Al no ser viable, se tenían que hacer desde el punto de vista de las primeras, excavar una extensión de 105 m de longitud y tenía tres grandes descensos.

La primera subida tenía una altura de 15 m, la segunda era justo el doble que la primera, y la tercera, 2,5 veces más alta que la segunda.

a) ¿Podrías esbozar la montaña rusa con la gráfica de una función? ¿Por qué?

b) ¿Cuál sería el dominio y el recorrido de la montaña rusa tomando la salida como origen de coordenadas?

c) ¿Cuál es su máximo absoluto? ¿Tiene mínimos relativos? ¿Y mínimos?

Actualmente, las montañas rusas se construyen con acero, lo que permite realizar giros de 360°.

d) ¿Se puede hacer el mismo estudio con estas montañas rusas?

**Formas de pensar. Razonamiento matemático**

1. En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un rectángulo de lado  $x$ .

2. Considera los triángulos que aparecen a la izquierda.

a) Escribe la expresión algebraica que relaciona la base en función de la altura en estos triángulos.

b) ¿Cuál es la función que relaciona la altura en función de la base?

c) Representa ambas funciones.

3. Una función  $f(x)$  es creciente, su dominio es  $[1, 6]$  y su recorrido es  $[3, 4]$ .

a) ¿Cuánto vale  $f(1)$ ?

b) ¿Tiene máximos o mínimos relativos?

**COMPETENCIA MATEMÁTICA**

**En la vida cotidiana**

1. En un laboratorio se está estudiando el desarrollo embrionario del ser humano, uno de los experimentos que llevan a cabo está relacionado con la fecundación de los óvulos. Cuando un óvulo es fecundado, aparece el embrión primitivo, que está formado únicamente por dos células. Este embrión duplica su número de células cada 12 horas durante sus primeros días de evolución.

a) Escribe la función que expone el número de células que tendrá el embrión dependiendo del tiempo transcurrido.

b) ¿Cuántas células tendrá un embrión a los 30 días? ¿Y el caso de 4 días? Las placas que se introducen en las incubadoras llevan un líquido con un pH igual a 7,5.

El pH es una forma de medir la acidez de un elemento dependiendo del número de iones de hidrógeno  $[H^+]$  que tiene, y se calcula con la siguiente fórmula:  $pH = -\log[H^+]$ .

c) Representa la gráfica de los distintos pH que existen, y señala en ella donde se encuentra situado el pH de los líquidos que forman parte de las placas de las incubadoras.

**Formas de pensar. Razonamiento matemático**

1. Compara, grafica y analiza matemáticamente, si los siguientes pares de funciones son inversos entre sí. Justifica la respuesta.

a)  $f(x) = \log_2 x$  y  $g(x) = \frac{1}{2^x}$

b)  $f(x) = 3x - 2$  y  $g(x) = \frac{x+2}{3}$

2. Escribe cuáles cifras tiene el número  $4^n \cdot 5^m$  escrito en el sistema decimal.

3. Calcula el valor de  $a$ , sabiendo que  $a$  y  $b$  son números positivos que verifican que  $a^2 - b^2 = 16$ .

4. Averigua cuál de estas afirmaciones es verdadera  $2^x > 3^x$ .

a)  $\log_2(1+x) < \frac{x}{1+x}$

b)  $\log_2(1+x) < \frac{x}{1+x}$

c)  $\log_2(1+x) > \frac{x}{1+x}$

5. La suma de los cifras del número  $10^{100} + 1$  es  $10$ .

a)  $n > 0$ , no es un número enteramente grande. ¿Crees que la suma de las cifras de ese número depende de  $n$ ? ¿Cuánto vale exactamente?

El **Proyecto final** te plantea objetivos que antes o después encontrarás en tu vida diaria. Con él mejorarás tus competencias para el **trabajo cooperativo**.

La unidad finaliza con las **Pruebas PISA**. Estas pruebas internacionales pretenden comprobar tu aprendizaje competencial y conviene que las conozcas.



## Cómo se escriben números decimales en forma de fracción

Todo número decimal racional se puede escribir como una fracción.

### EJEMPLO

**Decimal exacto** en forma de fracción:

$$6,39 = \frac{639}{100}$$

Parte entera y decimal sin coma

Unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya

**Decimal periódico puro** en forma de fracción:

$$4,\overline{65} = \frac{465 - 4}{99}$$

Parte entera y período

Parte entera

Tantos nueves como cifras tiene el período

**Decimal periódico mixto** en forma de fracción:

$$3,7\overline{45} = \frac{3745 - 37}{990}$$

Parte entera, anteperíodo y período

Parte entera y anteperíodo

Tantos nueves como cifras tiene el período y tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo

### ACTIVIDADES

1 Expresa los siguientes números en forma de fracción.

- a) 35,47      b)  $13,\overline{46}$       c)  $5,\overline{231}$

## Cómo se representan fracciones en la recta numérica

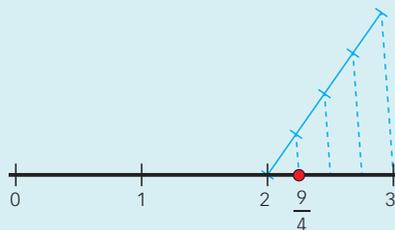
Una fracción se puede representar de manera exacta en la recta numérica.

### EJEMPLO

Representa la fracción  $\frac{9}{4}$  en la recta numérica.

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{9}{4} \text{ está entre 2 y 3.}$$

Trazamos una semirrecta desde 2 y tomamos cuatro partes iguales. Unimos la última marca con 3 y trazamos paralelas por las otras tres marcas.



El numerador de la nueva fracción, 1, indica las partes que debemos tomar.

### ACTIVIDADES

2 Representa. a) 7,2      b)  $\frac{4}{7}$       c)  $\frac{17}{3}$       d)  $-\frac{12}{5}$



#### Siglo XVIII a.C.

Hay registros de préstamos individuales concedidos en Babilonia.



#### 1100

Los caballeros templarios crean la primera entidad bancaria europea.



# Números reales. Porcentajes

# 1



## SABER

- Números racionales e irracionales. Números reales
- Aproximaciones y errores de números reales
- Intervalos en la recta real
- Porcentajes. Interés simple y compuesto

## SABER HACER

- Hallar los conjuntos numéricos a los que pertenecen ciertos números
- Calcular la unión y la intersección de dos intervalos
- Resolver problemas de porcentajes

## ? VIDA COTIDIANA

### La banca

Una cuenta bancaria es un servicio que ofrecen los bancos para guardar el dinero de sus clientes. A su vez, estos pueden llevar el control de lo que tienen en cada momento.

- Si tenemos 1440 € en el banco y este mes hemos gastado 480 € de nuestra cuenta, ¿qué parte de nuestros ahorros hemos gastado? ¿Qué porcentaje de lo que teníamos representa ese gasto?

1656

Se funda en Suecia el primer banco que acepta papel moneda (billetes).



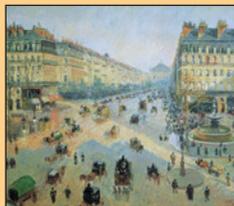
1782

Se crea el Banco de España, denominado entonces Banco de San Carlos.



1818

Se abre en París el primer banco de ahorros.



1995

Se extiende el uso de la banca telefónica.



Siglo XXI

Se normaliza el uso de la banca *online*.



# 1

## Números racionales

El conjunto de los **números racionales**,  $\mathbb{Q}$ , está formado por todos los números que se pueden expresar en forma de fracción  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son números enteros y  $b \neq 0$ .

Todos los números naturales, enteros, decimales exactos y periódicos son números racionales.



Cualquier número entero se puede escribir como una fracción con denominador 1.

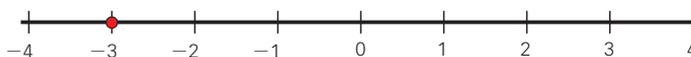
Números racionales {  
 Números enteros {  
     Números naturales: 1, 2, 3, ...  
     El número cero: 0  
     Enteros negativos: -1, -2, -3, ...  
 Números decimales {  
     Exactos: 0,2; 0,34; ...  
     Periódicos:  $0,\widehat{6}$ ;  $2,2\widehat{63}$ ; ...

Todos los números racionales se pueden representar de manera exacta en la recta numérica.

### EJEMPLO

1. Indica si estos números son racionales y, si lo son, represéntalos.

a)  $-3 = -\frac{3}{1} \rightarrow$  Se puede expresar como fracción. Es un número racional.

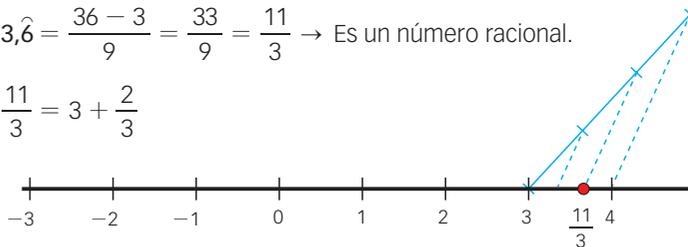


b)  $2,4 = \frac{24}{10} \rightarrow$  Se puede expresar como fracción. Es un número racional.



c)  $3,\widehat{6} = \frac{36-3}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3} \rightarrow$  Es un número racional.

$$\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$$



### ACTIVIDADES

**1 PRACTICA.** Empareja los números que tengan el mismo valor e indica a qué conjunto numérico pertenece cada uno.

$$\frac{3}{40} \quad 3,\widehat{6} \quad 0,01 \quad 3,666\dots \quad \frac{5}{500} \quad 0,075 \quad \frac{11}{3}$$

**2 APLICA.** Ordena y representa.

a) 2,33       $2,\widehat{3}$       2,3       $2,\widehat{36}$   
 b) -4,2       $-4,\widehat{2}$       -4,22       $-4,\widehat{27}$

**3 REFLEXIONA.** Representa  $2,3\widehat{9}$  y  $-4,2\widehat{9}$ .

2

## Números irracionales

El conjunto de los **números irracionales**,  $\mathbb{I}$ , está formado por los números que no se pueden expresar en forma de fracción. Su expresión decimal tiene un número infinito de cifras decimales que no se repiten de forma periódica.

### EJEMPLO

2. Decide si estos números son racionales o irracionales y, después, ordénalos de menor a mayor.

- a)  $\pi = 3,1415926535\dots$  → Su expresión decimal tiene un número ilimitado de cifras que no se repiten de forma periódica. Es irracional.
- b)  $-2 = \frac{-2}{1}$  → Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.
- c)  $\frac{2\pi}{3} = 2,094395102\dots$  → Su expresión decimal tiene un número ilimitado de cifras que no se repiten de forma periódica. Es irracional.
- d)  $\sqrt{5} = 2,236067977\dots$  → Su expresión decimal tiene un número ilimitado de cifras que no se repiten de forma periódica. Es irracional.
- e)  $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$  → Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

Los números ordenados de menor a mayor son:

$$-2 < \sqrt{\frac{9}{4}} < \frac{2\pi}{3} < \sqrt{5} < \pi$$

Existen infinitos números irracionales, por ejemplo:

- Cualquier raíz no exacta:  $\sqrt{5}$ ,  $-\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{24}$ , ...
- Algunos números *especiales*:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\Phi$ , ...
- Determinados números obtenidos combinando sus cifras decimales, por ejemplo: 0,010010001...; 0,12345678910...; ...

### RESUELVE EL RETO

Entre cada dos números racionales existe uno irracional y entre cada dos irracionales existe uno racional.

- a) Calcula un número irracional comprendido entre  $\frac{1}{1000}$  y  $\frac{1}{999}$ .
- b) Calcula un número racional situado entre 0,12131415... y 2,12141618...

### ACTIVIDADES

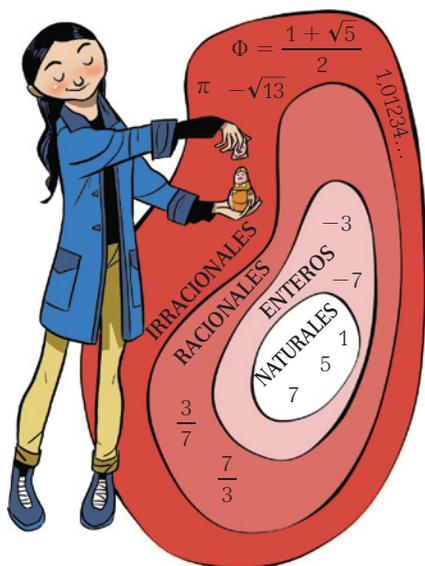
4 **PRACTICA.** Indica cuáles de estos números no son irracionales.

- a)  $\sqrt{4}$
- b)  $\sqrt{9+4}$
- c)  $\sqrt{9} + \sqrt{4}$
- d)  $\sqrt{14+2}$
- e)  $\sqrt{5}$
- f)  $\sqrt{4} + \sqrt{1}$

5 **APLICA.** ¿Es lo mismo la raíz de una suma que la suma de raíces? Pon un ejemplo para comprobarlo.

6 **REFLEXIONA.** Clasifica en racionales e irracionales y ordena de mayor a menor.

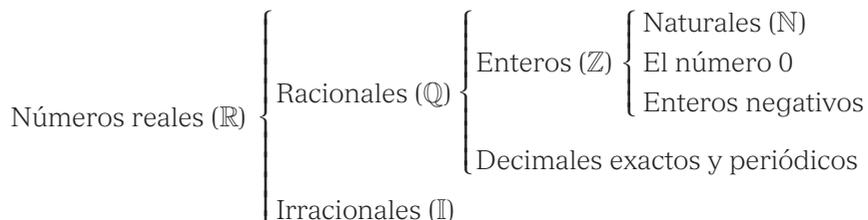
- 3,121122111222...
- 3,123123123...
- 3,48163264...
- $\sqrt[3]{31}$
- $\sqrt{\frac{256}{25}}$
- 3,444...
- $\sqrt{10}$
- 3,12121212...
- $2\pi$
- 3,004



### 3

## Números reales

El conjunto de los **números reales**,  $\mathbb{R}$ , está formado por todos los números racionales y todos los irracionales.



### Recta real

La recta numérica en la que se representan los números reales se denomina **recta real**.

Todos los números reales se pueden representar de manera exacta o aproximada en la recta real.



#### SE ESCRIBE ASÍ

En ciertas ocasiones solo tomamos el valor positivo de una raíz.

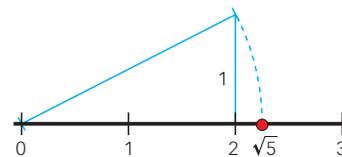
$$\sqrt{4} = 2 \quad -\sqrt{4} = -2$$

#### EJEMPLO

3. Representa estos números en la recta real. a)  $\sqrt{5}$  b)  $\pi$

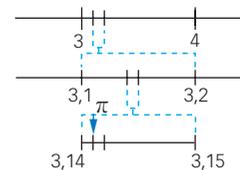
a) Los números del tipo  $\sqrt{a}$ , donde  $a$  es un número natural, se pueden representar de forma exacta sobre la recta real.

- Descomponemos el radicando en suma de dos números al cuadrado:  $5 = 2^2 + 1^2$ .
- Construimos sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos midan esos números.
- Trasladamos, con un compás, la hipotenusa sobre la recta.



b) Los números irracionales que no son del tipo  $\sqrt{a}$  los representamos de forma aproximada hallando su expresión decimal.

$$\pi = 3,141592\dots$$



### ACTIVIDADES

7 **PRACTICA.** Representa las raíces en la recta real.

- a)  $\sqrt{10}$       c)  $\sqrt{26}$       e)  $-\sqrt{17}$   
b)  $\sqrt{17}$       d)  $-\sqrt{10}$       f)  $-\sqrt{26}$

8 **APLICA.** Representa de forma aproximada.

- a)  $2\sqrt{6}$       b)  $1 + \sqrt{3}$       c)  $3\pi$

9 **REFLEXIONA.** Representa  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**SABER HACER**

**Hallar los conjuntos numéricos a los que pertenece un número**

Indica todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen estos números.

$$\sqrt{25} \quad -\sqrt{\frac{16}{9}} \quad \sqrt{7} \quad 2,3\hat{7} \quad 1,1223334444\dots \quad -\frac{18}{9} \quad -\frac{3}{4} \quad 19 \quad -5$$

**Pasos a seguir**

- Si el número contiene alguna raíz:
  - Si el radicando es un cuadrado perfecto, es un número natural si es positivo o entero si es negativo.
  - Si contiene fracciones y el numerador y el denominador son cuadrados perfectos:
    - Si el numerador es múltiplo del denominador, es un número natural si es positivo o entero si es negativo.
    - En caso contrario, es racional.
  - Si el radicando no es un cuadrado perfecto, el número es irracional.
- Si el número es decimal:
  - Es racional si es un decimal exacto o periódico.
  - Es irracional si tiene infinitas cifras decimales no periódicas.
- Si el número es una fracción:
  - Cuando el numerador es múltiplo del denominador, es natural si la fracción es positiva y entero si es negativa.
  - En caso contrario, es racional.
- Si el número no tiene raíces, no es decimal ni es fracción, es natural si es positivo y entero si es 0 o negativo.

Para encontrar todos los conjuntos numéricos a los que pertenecen ciertos números, primero buscamos el conjunto más pequeño en el que están incluidos.

$$\sqrt{25} = 5 \rightarrow \text{Es } \mathbf{natural}, \text{ entero, racional y real.}$$

$$-\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{racional} \text{ y real.}$$

$$\sqrt{7} = 2,64575131\dots \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{irracional} \text{ y real.}$$

$$2,3\hat{7} \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{racional} \text{ y real.}$$

$$1,1223334444\dots \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{irracional} \text{ y real.}$$

$$-\frac{18}{9} = -2 \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{entero}, \text{ racional y real.}$$

$$-\frac{3}{4} \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{racional} \text{ y real.}$$

$$19 \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{natural}, \text{ entero, racional y real.}$$

$$-5 \rightarrow \text{Es un número } \mathbf{entero}, \text{ racional y real.}$$

**ACTIVIDADES**

**10** Decide el menor conjunto numérico al que pertenece cada uno de los números que aparecen a continuación.

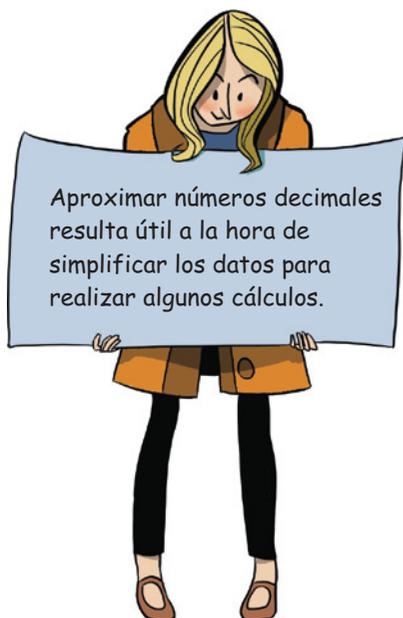
- |                  |                            |
|------------------|----------------------------|
| a) $-5$          | e) $3\pi$                  |
| b) $\sqrt{2}$    | f) $-37$                   |
| c) $\frac{3}{5}$ | g) $\sqrt{\frac{1125}{5}}$ |
| d) $\sqrt{625}$  | h) $21,4\hat{6}3$          |

**11** Indica los conjuntos numéricos a los que pertenecen estos números.

- $5,0100200030004\dots; -25; \sqrt{47}; e$
- $-\frac{14}{2}; \sqrt{16}; 54,97\hat{2}; 93$
- $\frac{5}{3}; 7,42; \sqrt{7+2}; 2,21221222122221\dots$
- $\sqrt{6+\sqrt{9}}; \sqrt{6+9}; \sqrt{9+\sqrt{6}}; \sqrt{\frac{9}{6}}$

## 4

## Aproximación de números reales



**Aproximar** un número decimal consiste en sustituirlo por otro número con menos cifras decimales. El valor de la aproximación puede ser tan cercano al número como queramos.

Decimos que una aproximación se realiza por **exceso** si la aproximación es mayor que el número original, y decimos que se realiza por **defecto** si la aproximación es menor que él.

El **truncamiento** es una aproximación que consiste en eliminar todas las cifras a partir de un orden establecido.

## EJEMPLO

4. Aproxima a las centésimas por el método de truncamiento y determina si la aproximación que has hecho es por exceso o por defecto.

- a) 13,2754 → Truncamiento: 13,27 → Aproximación por defecto  
 b) -21,4785 → Truncamiento: -21,47 → Aproximación por exceso  
 c)  $\sqrt{2} = 1,414213\dots$  → Truncamiento: 1,41 → Aproximación por defecto

El **redondeo** es una aproximación que consiste en eliminar las cifras a partir de un cierto orden, aumentando una unidad a la última cifra si la primera eliminada es mayor o igual que 5.

## EJEMPLO

5. Aproxima estos números a las décimas mediante truncamiento y redondeo. ¿En qué casos coinciden los resultados?

- a) 57,423 → Truncamiento: 57,4 Redondeo: 57,4  
 b) 3,578 → Truncamiento: 3,5 Redondeo: 3,6  
 c) -2,357 → Truncamiento: -2,3 Redondeo: -2,4  
 d) 9,971 → Truncamiento: 9,9 Redondeo: 10,0  
 e)  $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$  → Truncamiento: 1,7 Redondeo: 1,7

El truncamiento y el redondeo coinciden cuando la primera cifra eliminada es menor que 5.

## RESUELVE EL RETO

¿Es el truncamiento siempre una aproximación por defecto? ¿Y el redondeo?

## ACTIVIDADES

- 12 **PRACTICA.** Con ayuda de la calculadora, escribe  $\sqrt{8}$  en forma decimal y sus aproximaciones, por redondeo y por truncamiento, a las milésimas. ¿Son aproximaciones por exceso o por defecto?

- 13 **APLICA.** Aproxima  $0,121212\dots$ ;  $5,23888\dots$  y  $\frac{11}{9}$  por exceso y por defecto con dos cifras decimales.

- 14 **REFLEXIONA.** Redondea  $1,9$  a las centésimas.

## 5

## Errores de aproximación

El **error absoluto** de una aproximación es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real y el valor de la aproximación.

$$E_a = |V_{\text{Real}} - V_{\text{Aproximación}}|$$

## EJEMPLO

6. Calcula el error absoluto cometido al aproximar  $\sqrt{5}$  por 2,23. ¿Qué tipo de aproximación se ha realizado?

$$\sqrt{5} = 2,236067977... \rightarrow E_a = |2,236067977... - 2,23| = 0,006067977...$$

Se ha realizado un truncamiento. Es una aproximación por defecto.

El **error relativo** de una aproximación es el cociente entre el error absoluto y el valor real.

$$E_r = \frac{E_a}{V_{\text{Real}}} = \frac{|V_{\text{Real}} - V_{\text{Aproximación}}|}{V_{\text{Real}}}$$

## EJEMPLO

7. Halla el error absoluto y relativo. ¿Qué aproximación es más precisa?

- a) Un rascacielos de altura 201,12 m se aproxima por 200 m.  
b) La longitud de una hormiga de 1,3 mm se aproxima por 1 mm.

a)  $E_a = |201,12 - 200| = 1,12 \text{ m} = 1120 \text{ mm}$

$$E_r = \frac{E_a}{V_{\text{Real}}} = \frac{1,12 \text{ m}}{201,12 \text{ m}} = 0,0056 = 0,56\%$$

b)  $E_a = |1,3 - 1| = 0,3 \text{ mm}$

$$E_r = \frac{E_a}{V_{\text{Real}}} = \frac{0,3 \text{ mm}}{1,3 \text{ mm}} = 0,2308 = 23,08\%$$

Aunque el error absoluto de la aproximación de la altura del rascacielos es mucho mayor que el de la longitud de la hormiga, el relativo es menor.

Un menor error relativo indica una mejor aproximación; por tanto, la aproximación más precisa es la del rascacielos.

El error relativo suele expresarse en tanto por ciento, multiplicándolo por 100. En este caso, recibe el nombre de **porcentaje de error**.



## SE ESCRIBE ASÍ

A veces damos por buena cualquier aproximación cuyo error sea menor que una cierta cantidad; esa cantidad se llama **cota de error**.

## ACTIVIDADES

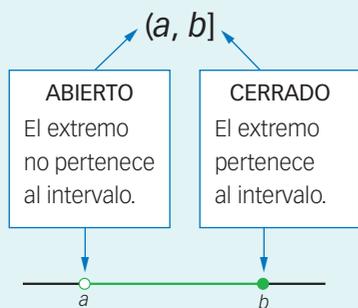
- 15 **PRACTICA.** Obtén el error absoluto al redondear 4,7569 a las centésimas.  
16 **APLICA.** Halla el error relativo cometido al truncar  $2,\hat{3}$  a las décimas.

- 17 **REFLEXIONA.** ¿Qué error absoluto y relativo se comete al aproximar 1,468 por 1,5? ¿Y si lo aproximamos por 1,4? Razona cuál es la mejor aproximación.

# 6 Intervalos



## SE ESCRIBE ASÍ



### 6.1. Intervalos

Un **intervalo** de extremos  $a$  y  $b$  es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre  $a$  y  $b$ .

Los intervalos se clasifican según contengan, o no, a sus extremos.

<b>Intervalo abierto</b>	$(a, b)$	$\{x: a < x < b\}$	
<b>Intervalo cerrado</b>	$[a, b]$	$\{x: a \leq x \leq b\}$	
<b>Intervalo semiabierto</b>	$(a, b]$	$\{x: a < x \leq b\}$	
<b>Intervalo semiabierto</b>	$[a, b)$	$\{x: a \leq x < b\}$	

### 6.2. Semirrectas

Una **semirrecta** de extremo  $a$  es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre  $-\infty$  y  $a$ , o bien entre  $a$  y  $+\infty$ .

Las semirrectas son cerradas o abiertas si contienen o no a su extremo.

<b>Semirrecta abierta</b>	$(a, +\infty)$	$\{x: a < x\}$	
<b>Semirrecta cerrada</b>	$[a, +\infty)$	$\{x: a \leq x\}$	
<b>Semirrecta abierta</b>	$(-\infty, b)$	$\{x: x < b\}$	
<b>Semirrecta cerrada</b>	$(-\infty, b]$	$\{x: x \leq b\}$	



En la expresión de una semirrecta,  $\pm\infty$  siempre se escribe con paréntesis.

#### EJEMPLO

8. Escribe en forma de intervalos y semirrectas, y representa.

- a)  $-3 \leq x < 2 \rightarrow [-3, 2)$
- b)  $x \leq -4 \rightarrow (-\infty, -4]$
- c)  $5 \geq x > 0 \rightarrow (0, 5]$

### ACTIVIDADES

18 **PRACTICA.** Describe y representa los siguientes intervalos en la recta real.

- a)  $(4, 8)$       c)  $[1, 5)$       e)  $(-\infty, 4)$   
 b)  $(-\infty, 2)$       d)  $(-3, 0]$       f)  $[-1, +\infty)$

19 **APLICA.** Escribe estos intervalos.

- a)  $-4 < x \leq 0$       b)  $1 \leq x \leq 2$       c)  $10 > x > 4$

20 **REFLEXIONA.** Representa estas semirrectas.

- a)  $x \leq 6$       b)  $x \geq 3$       c)  $x < 0$

**SABER HACER**

**★ Calcular la unión y la intersección de intervalos**

Halla la unión y la intersección de los siguientes pares de intervalos.

a)  $A = [-4, 2], B = (-2, 4]$

c)  $A = (-\infty, -4], B = [-4, 2)$

b)  $A = [-3, 5], B = (-3, +\infty)$

d)  $A = (-\infty, 2], B = (2, 4]$

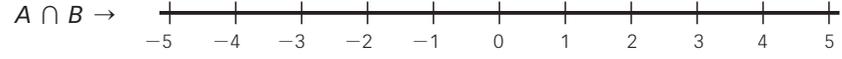
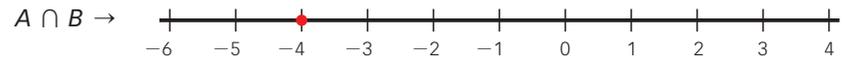
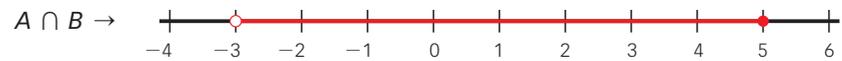
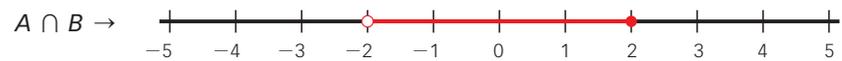
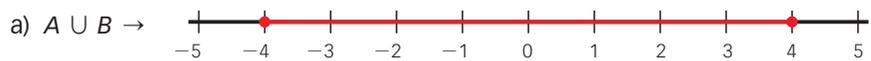
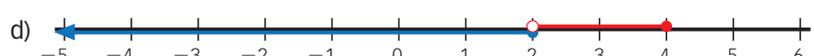
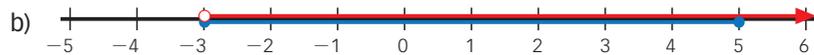
**Pasos a seguir**

1. Representamos los intervalos sobre la misma recta real.

2. La unión de los intervalos será toda la parte de recta que ocupan los intervalos.

La intersección está formada tan solo por la parte de recta en la que todos los intervalos coinciden.

3. Expresamos en forma numérica el resultado obtenido gráficamente.



a)  $A \cup B = [-4, 4]$        $A \cap B = (-2, 2]$

b)  $A \cup B = [-3, +\infty)$        $A \cap B = (-3, 5]$

c)  $A \cup B = (-\infty, 2)$        $A \cap B = \{-4\}$

d)  $A \cup B = (-\infty, 4]$        $A \cap B = \emptyset$

La intersección de intervalos puede ser vacía, un punto o un intervalo.

La unión de intervalos distintos no puede ser un punto y solo es el vacío si todos los intervalos lo son.

**ACTIVIDADES**

21 Escribe dos intervalos cuya unión sea  $(2, 6]$ .

22 Escribe dos intervalos cuya intersección sea  $(-2, 2)$ .

23 Halla la unión y la intersección de estos intervalos.

a)  $(-5, 1]$  y  $[0, 2]$

c)  $[2, 4]$  y  $(3, 5)$

b)  $(-1, 5)$  y  $[1, 2]$

d)  $(-3, 0]$  y  $(-1, 4)$