



Matemáticas

SERIE **AVANZA**

Presentación

Matemáticas AVANZA tiene como meta que el alumno alcance los **contenidos mínimos** de la materia.

Su planteamiento es sencillo y directo. Los contenidos se organizan en dobles páginas formadas por:

- Un texto claro y estructurado.
- Unas actividades de repaso y refuerzo del texto al que acompañan.

Cada unidad se completa con elementos que facilitan el estudio: esquemas, resúmenes finales, autoevaluaciones..., sin olvidar el trabajo de las **competencias básicas** del área.

Un material adecuado para **distintas situaciones y contextos de aula**: diversificación, adaptación curricular, PMAR...

Esquema del libro

La estructura de las unidades didácticas es muy regular y sencilla, ya que se trata de facilitar la localización de los contenidos fundamentales, de los ejemplos resueltos y de las actividades propuestas.

Introducción a la unidad: dos elementos básicos, una base sólida y una motivación adecuada.

Números enteros

1

Claves para empezar

te permitirá recordar los contenidos previos necesarios para entender lo que estudiarás.

En **Saber** se especifican los contenidos y en **Saber hacer**, los procedimientos de la unidad.

Páginas de contenido: Saber y Saber hacer como un todo integrado.

La propuesta para **Saber** son unos textos claros y estructurados. Los **ejemplos resueltos** te ayudarán a afianzar esos saberes.

Al lado de los textos explicativos hallarás **informaciones complementarias**. Además, en los recuadros de **Lo escribimos así** encontrarás explicaciones claras de cómo deben escribirse las notaciones matemáticas.

6 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

LO ESCRIBIMOS ASÍ

DEBE SABER HACER

• **Lo escribimos así:** Máximo común divisor de a y b : $M.C.D.(a, b)$. Mínimo común múltiplo de a y b : $M.C.M.(a, b)$.

• **Debe saber hacer:** Como se expresa un producto de factores iguales con una potencia.

• **Lo escribimos así:** El M.C.D. de dos números naturales se obtiene descomponiendo los números en factores primos y multiplicando los factores comunes elevados a su exponente menor.

• **Debe saber hacer:** El M.C.M. de dos números naturales se obtiene descomponiendo los números en factores primos y multiplicando los factores comunes elevados a su exponente mayor.

7 Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m.

DEBE SABER HACER

Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m.

1. Analizar el problema y determinar los datos conocidos y los datos que se pide encontrar.

2. Descomponer los números en factores primos.

3. Calcular el m.c.d. y el m.c.m., según convenga.

4. Interpretar el resultado.

5. La longitud de cada tira de cinta tiene que ser un divisor de los números de las cintas. ¿Además, tiene que ser el máximo común divisor de los números de las cintas? ¿Por qué?

6. El número de tiras tiene que ser múltiplo de 4, 6 y 8. Además, tiene que ser el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 8.

7. Calcular el m.c.d. y el m.c.m., según convenga.

8. El m.c.m. de 4, 6 y 8 es 24.

9. Interpretar el resultado.

10. Las tiras más largas tendrán una longitud de 1 m. ¿Son que sean, aproximadamente, la misma.

Tan importante como saber es **Saber hacer**. En esta sección aprenderás, paso a paso, los procedimientos expuestos en las páginas teóricas.

Las actividades que acompañan a **Saber hacer** tienen como objetivo consolidar y dominar los procedimientos aprendidos.

Actividades de páginas teóricas: aplicación de los contenidos.

3 Multiplicación y división de números enteros

3.1. Multiplicación de números enteros

Para multiplicar dos números enteros multiplicamos los valores absolutos. El resultado tendrá el signo + si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo - si los signos son diferentes.

3.2. División de números enteros

Para dividir dos números enteros dividimos los valores absolutos. El cociente tendrá el signo + si ambos números tienen el mismo signo, y el signo - si los signos son diferentes.

Regla de los signos

$+$ \cdot $+$ = $+$
 $+$ \cdot $-$ = $-$
 $-$ \cdot $+$ = $-$
 $-$ \cdot $-$ = $+$

NO DEBES

• Multiplicar o dividir los números enteros.
 • Ignorar el signo al dividir.
 • Multiplicar o dividir los números enteros.
 • Multiplicar o dividir los números enteros.

ACTIVIDADES

1. Resuelve estas multiplicaciones:

a) $(-3) \cdot (-4) =$
 b) $(-2) \cdot (-8) =$
 c) $(-6) \cdot (-3) =$
 d) $(-1) \cdot (-4) =$

2. Resuelve estas divisiones:

a) $(-12) : (-4) =$
 b) $(-18) : (-3) =$
 c) $(-24) : (-6) =$
 d) $(-20) : (-5) =$

3. Resuelve estas multiplicaciones:

a) $(-1) \cdot (-1) =$
 b) $(-1) \cdot (-2) =$
 c) $(-1) \cdot (-3) =$
 d) $(-1) \cdot (-4) =$

4. Resuelve estas divisiones:

a) $(-1) : (-1) =$
 b) $(-2) : (-1) =$
 c) $(-3) : (-1) =$
 d) $(-4) : (-1) =$

Al final de cada apartado de contenidos, te proponemos **actividades** que debes saber resolver a partir de lo aprendido.

Encontrarás numerosas actividades de **cálculo mental**.

Debes saber hacer...: repaso esencial.

5 Múltiplos y divisores de números enteros

DEBES SABER HACER...

¿Cuál es exacta una división?

- Una división es exacta cuando el resto es 0.
- Una división no es exacta cuando el resto es diferente de 0.

$$\begin{array}{r} 68 \overline{) 114} \\ \underline{102} \\ 12 \end{array}$$

resto = 0. 68 : 4 es exacta. Resto = 1. 69 : 4 no es exacta.

Si la división $a : b$ es exacta, podemos afirmar que:

- a es **divisible** por b .
- a es **múltiplo** de b .
- b es **divisor** de a .

LO ESCRIBIMOS ASÍ

3 → Todos los múltiplos de 3.
12 → Todos los múltiplos de 12.
Div(8) → Todos los divisores de 8.
Div(12) → Todos los divisores de 12.

El conjunto de los **divisores** de un número a lo obtenemos efectuando todas las divisiones posibles con los números positivos menores que a y seleccionando los números con los que la división es exacta.

El conjunto de los **múltiplos** de un número a lo obtenemos multiplicando este número por los números enteros sucesivos.

EJEMPLOS

9. Calcula los seis primeros múltiplos de 8.
Múltiplos de 8 = 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...

10. Determina los divisores de 6.

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 12} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 18} \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 36} \\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

Divisores de 6 = Div(6) = {1, 2, 3, 6}

5.1. Números primos y números compuestos

Un número es **primo** cuando es positivo y sus únicas divisiones positivas son el mismo número y la unidad. En caso contrario, decimos que es **compuesto**.

EJEMPLO

11. Determina si el 11 y el 33 son números primos o compuestos.
Div(11) = {1, 11} → 11 es un número primo.
Div(33) = {1, 3, 11, 33} → Más de dos divisores. 33 es compuesto.

La divisibilidad suele estudiarse solo para números positivos. Para los números negativos, se cumplen las mismas propiedades.

En un gran número de páginas se incluye **Debes saber hacer...**, que es la sección donde repasarás contenidos o procedimientos que debes conocer para afrontar los nuevos contenidos. Esta sección también se refuerza con ejemplos resueltos.

Páginas de actividades finales: una manera práctica de aprender a aprender.

Las actividades constan de tablas, esquemas y otros recursos para que las puedas desarrollar, **completar** o **resolver en el mismo libro**.

En cada actividad se indica la **dificultad** que la misma presenta.

También encontrarás una gran cantidad de **problemas** que permitirán adaptar tus conocimientos a contextos reales.

Los **Saber hacer** de las actividades finales te ayudarán a reforzar los procedimientos básicos trabajados en la unidad. Se trata de ejercicios resueltos que muestran, paso a paso, un método general de resolución.

DEBES SABER HACER

Resolver operaciones de suma y resta combinadas con paréntesis

1. Calcula: $-3 + (-8 + 9) - 2 - 6$

Resumen: Se resuelven los paréntesis.

$$-3 + (-8 + 9) - 2 - 6 = -3 + (1) - 2 - 6$$

Resumen: Se eliminan los paréntesis.
 Si delante tienen el signo +, se mantienen los signos de los números.
 Si delante tienen el signo -, se cambian los signos de los números.

Resumen: Se resuelven las sumas y las restas de izquierda a derecha.

$$-3 + 1 - 2 - 6 = -3 + 1 - 2 - 6 = 1 - 2 - 6 = -1 - 6 = -7$$

2. Realiza estas operaciones.
 a) $4 + (-4) + 2 - (-3) - 1 =$
 b) $7 - 4 - 3 + (-1) - 2 =$
 c) $3 + (-2) - 3 - (-1) - 2 =$
 d) $-8 + (-1) + (-7) - 9 =$

3. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
 a) El resultado de la suma de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.
 b) El resultado de la resta de dos números enteros positivos es otro número entero negativo.
 c) El resultado de la suma de un número entero negativo y un número positivo es otro número entero negativo.
 d) El resultado de la resta de un número entero negativo y un número positivo es otro número entero negativo.

4. Completa.
 a) $(-5) + \square = -30$
 b) $(+3) + \square = 45$
 c) $(-9) + \square = 27$
 e) $(-45) + \square = -4$
 f) $(+8) + \square = -7$
 g) $(+8) + \square = +2$

5. Haz las operaciones.
 a) $(+21) + (-2) - (-14) =$
 b) $(+3) - (-5) - (-6) =$
 c) $(+2) + (-9) - (-3) =$
 d) $(-2) - (+7) - (-5) - (+3) =$
 e) $(+36) - (-9) + (+3) + (+3) =$
 f) $(+36) - (-9) - (+2) + (+5) =$
 g) $(-2) + (-3) - (-7) + (-4) =$

Problemas con números enteros

1. A las 7 de la mañana el termómetro marca 4°C bajo cero y cinco horas después marca 3°C sobre cero. ¿Cuál diferencia hay entre las dos temperaturas?

2. Antonio tiene 123 €. A final de mes cobra 900 € de sueldo y paga la hipoteca de 544 €. ¿Cuánto dinero le queda?

3. Pedro tenía 357 € en la librería de abuelos y a lo largo del día se han registrado estos movimientos:
 • recibidos del abuelo: 100 €
 • recibidos del abuelo: 100 €
 • ingresos en efectivo: 80 €
 • recibidos de la tía: 233 €
 • recibidos: 200 €
 a) ¿De cuánto dinero dispone Pedro ahora?

4. Pedro dispone de \square €. ¿Le quedan suficientes para comprar un libro de 15 €?

5. Las temperaturas máximas y mínimas registradas en una ciudad cinco días de una semana han sido:
 Lunes: 11°C y 4°C Jueves: -2°C y -3°C
 Martes: 5°C y -2°C Viernes: 7°C y 3°C
 Miércoles: 3°C y -1°C

6. ¿Cuál ha sido la oscilación térmica de cada uno de los días?
 Oscilaciones térmicas:
 a) \square
 b) \square
 c) \square
 d) \square
 e) \square

7. María vive en el tercer piso. Baja 5 plantas para ir al trabajo y después sube 7 para ir a ver a su amigo Enrique. ¿En qué piso vive Enrique?

8. Enrique vive en el \square piso.
 María vive en el \square piso.
 ¿Cuánto piso hay entre ellos?

9. Queremos cortar tres cables de 6 m y 9 m. Respectivamente, en trozos iguales. ¿Cuántos trozos podemos hacer? ¿En qué medida?

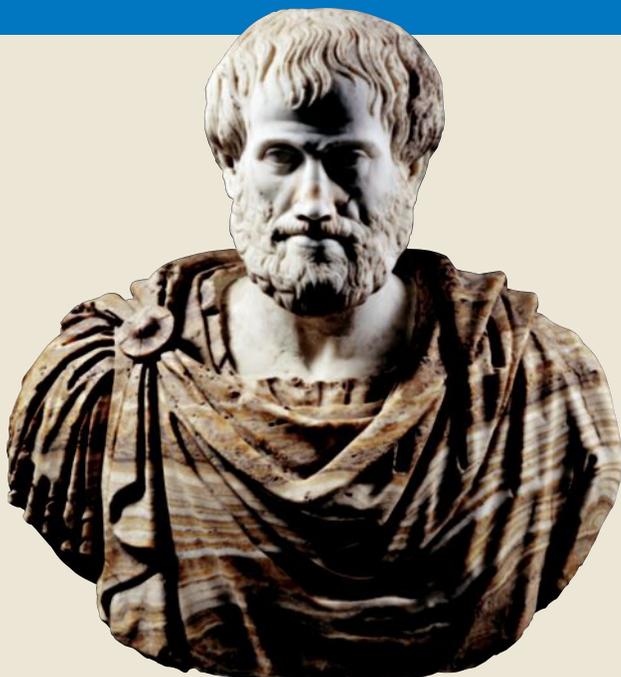
10. La longitud mayor será de \square m.

11. En un almacén quieren guardar 84 botellas en cajas sin que sobe ninguna. ¿Cuántas maneras posibles tienen de hacer esto? ¿Cuál es la mejor?

12. ¿Las pueden encerrar en \square minutos diferentes.

Números enteros

1



SABER

- Los números enteros. Operaciones con números enteros
- Potencias. Operaciones con potencias
- Operaciones combinadas con números enteros
- Divisibilidad de números enteros
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

SABER HACER

- Resolver operaciones combinadas con paréntesis y corchetes
- Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m.

CLAVES PARA EMPEZAR

Los números naturales

Los números naturales surgieron por la necesidad que tiene el ser humano de explicar lo que le rodea.

El conjunto de números naturales es ilimitado, es decir, no tiene fin, porque a partir de un número cualquiera siempre es posible obtener el siguiente, sumando una unidad a ese número.

Los números naturales se pueden representar en la recta numérica de la siguiente manera:

- Fijamos el 1, y a la derecha del 1, el 2. Tomamos la distancia entre estos dos puntos como unidad.
- Desplazamos esa unidad hacia la derecha del 2 para representar el resto de números.



ACTIVIDAD

- 1 Dibuja una recta numérica y representa en ella estos números naturales.

5 3 1 7 8 4

Operaciones con números naturales

Suma y resta

Se van resolviendo las operaciones de izquierda a derecha.

$$7 + 5 - 4 + 2 = \underbrace{12 - 4 + 2}_{8 + 2} = 10$$

Suma, resta, multiplicación y división

Se calculan primero las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha, y después las sumas y las restas, de izquierda a derecha.

$$6 + 5 \cdot 4 - 6 : 2 = 6 + \underbrace{20 - 6 : 2}_{6 + 20 - 3} = 26 - 3 = 23$$

ACTIVIDADES

- 2 Resuelve estas operaciones de suma y resta.

a) $8 + 8 - 4 - 3 + 5 =$

b) $12 - 5 + 7 - 2 + 11 - 3 =$

c) $9 + 3 - 5 - 1 + 2 - 7 =$

- 3 Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $16 + 3 - 15 : 3 + 5 =$

b) $12 \cdot 3 + 7 - 8 : 2 - 1 =$

c) $4 + 9 : 3 - 2 - 1 + 7 =$

1

Números enteros



LO ESCRIBIMOS ASÍ

Los **números enteros positivos** los escribimos habitualmente sin el signo + que va delante.

$$+ 5 = 5 \quad + 18 = 18$$



CALCULADORA

Para escribir números negativos con la calculadora utilizamos la tecla $+/-$.

$$-4 \rightarrow 4 \quad +/-$$

DEBES SABER HACER...

¿Para qué se utilizan los números enteros?

Hay situaciones cotidianas que no se pueden expresar con números naturales. En estos casos utilizamos los números enteros:

- Debo 25 € a mi hermano: -25 €.
- Esta noche la temperatura ha sido de 9 grados bajo cero: -9°C .

El conjunto de los **números enteros** está formado por los números enteros positivos, el número cero y los números enteros negativos. Los representamos con la letra \mathbb{Z} .

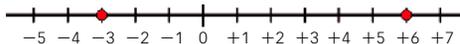
1.1. Representación y comparación de los números enteros

Los números enteros se representan ordenados en la **recta numérica**.

Dados dos números enteros, es mayor el que está situado más a la derecha en la recta numérica.

EJEMPLO

1. Representa -3 y $+6$ en la recta numérica y compáralos.



1.2. Valor absoluto y opuesto de un número entero

- El **valor absoluto** de un número entero a es el número que resulta si prescindimos del signo. Lo escribimos $|a|$.
- El **opuesto** de un número entero a es otro número entero con el mismo valor absoluto, pero de signo contrario. Lo escribimos $\text{Op}(a)$.

EJEMPLO

2. Calcula el valor absoluto y el opuesto de -5 y $+2$.

$$\begin{array}{ll} \text{Valor absoluto de } -5 \rightarrow |-5| = 5 & \text{Valor absoluto de } +2 \rightarrow |+2| = 2 \\ \text{Opuesto de } -5 \rightarrow \text{Op}(-5) = 5 & \text{Opuesto de } +2 \rightarrow \text{Op}(+2) = -2 \end{array}$$



$$|+a| = a$$

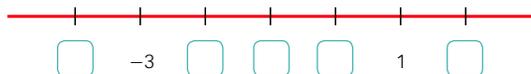
$$|-a| = a$$

$$\text{Op}(+a) = -a$$

$$\text{Op}(-a) = a$$

ACTIVIDADES

1 Completa la recta numérica.



2 Resuelve.

a) $\text{Op}(+13) = \square$

c) $|-10| = \square$

b) $|-4| = \square$

d) $\text{Op}(-7) = \square$

2

Suma y resta de números enteros

2.1. Suma y resta de números enteros

Para **sumar** dos números enteros:

- Si los sumandos tienen el **mismo signo**, sumamos los valores absolutos correspondientes y ponemos este signo al resultado.
- Si tienen **signo diferente**, restamos los valores absolutos y ponemos al resultado el signo del sumando con mayor valor absoluto.

Para **restar** dos números enteros sumamos al primero el opuesto del segundo.

EJEMPLO

3. Resuelve estas sumas y restas.

a) $(+2) - (-7) = -14$

Diferente signo $\rightarrow | +2 | + | +7 | = 2 + 7 = 9$

b) $(+5) + (+-9) = -4$

Diferente signo $\rightarrow | +5 | - | -9 | = 5 - 9 = -4$

c) $(+5) - (+9) = (+5) + Op(+9) = (+5) + (-9) = -4$

• Un paréntesis con el signo - delante cambia los signos de los números del interior.

$$-(-7) = +7$$

$$-(+7) = -7$$

• Un paréntesis con el signo + delante mantiene los signos.

$$+(+7) = +7$$

$$+(-7) = -7$$


2.2. Operaciones combinadas de suma y resta

Para **sumar** y **restar** varios números sumamos y restamos los números en el orden en el que aparecen.

EJEMPLO

4. Calcula.

a) $6 + 3 - 8 - 5 = 9 - 8 - 5 = 1 - 5 = -4$

b) $(-5) - (+4) + (-3) - (-6) = -5 - (+4) + (-3) - (-6) =$

$= -5 - 4 + (-3) - (-6) = -5 - 4 - 3 - (-6) =$

$= -5 - 4 - 3 + 6 = -9 - 3 + 6 = -12 + 6 = -6$

ACTIVIDADES

3 Calcula las sumas y las restas.

a) $(-9) + (+13) =$

b) $(+17) - (-8) =$

4 Calcula.

a) $8 - 7 + 4 - 3 - 2 =$

b) $(-21) + (-12) - (+9) =$

3

Multiplicación y división de números enteros

Regla de los signos

$++ = +$	$++ = +$
$-- = +$	$-- = +$
$+ - = -$	$+ - = -$
$- + = -$	$- + = -$



! NO OLVIDES

Si multiplicamos o dividimos dos números:

- Con signos iguales, el resultado tendrá signo +.
- Con signos diferentes, el resultado tendrá signo -.

3.1. Multiplicación de números enteros

Para **multiplicar** dos números enteros multiplicamos los valores absolutos. El resultado tendrá el signo + si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo - si los signos son diferentes.

EJEMPLO

5. Calcula.

a) $(+2) \cdot (+7) = +14$

Mismo signo $\rightarrow | +2 | \cdot | +7 | = 2 \cdot 7 = 14$

b) $(-2) \cdot (+7) = -14$

c) $(+2) \cdot (+7) = +14$

Mismo signo $\rightarrow | +2 | \cdot | +7 | = 2 \cdot 7 = 14$

d) $(-2) \cdot (-7) = +14$

3.2. División de números enteros

Para **dividir** dos números enteros dividimos los valores absolutos. El cociente tendrá el signo + si ambos números tienen el mismo signo, y el signo - si los signos son diferentes.

EJEMPLO

6. Resuelve estas divisiones.

a) $(+35) : (+7) = +5$

Mismo signo $\rightarrow | +35 | : | +7 | = 35 : 7 = 5$

b) $(+35) : (-7) = -5$

c) $(-35) : (+7) = -5$

Diferente signo $\rightarrow | -35 | : | +7 | = 35 : 7 = 5$

d) $(-35) : (-7) = +5$

ACTIVIDADES

5 Resuelve estas multiplicaciones.

a) $(-3) \cdot (+2) = \square$

b) $(-2) \cdot (-8) = \square$

c) $(+2) \cdot (+7) = \square$

d) $(+5) \cdot (-4) = \square$

6 Calcula las divisiones.

a) $(-12) : (+6) = \square$

b) $(-6) : (-2) = \square$

c) $(+21) : (+7) = \square$

d) $(+24) : (-4) = \square$

7 Haz estas multiplicaciones y divisiones.

a) $(-5) \cdot (-6) = \square$

b) $(+3) \cdot (-3) = \square$

c) $(+12) : (-2) = \square$

d) $(-24) : (-6) = \square$

8 Completa con los números adecuados.

a) $\square \cdot (-7) = +21$

b) $(+5) \cdot \square = -35$

c) $(+24) : \square = +4$

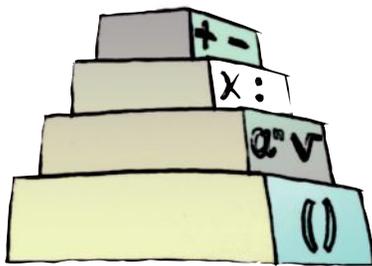
d) $\square : (-7) = +7$

4

Operaciones combinadas

Cuando aparecen operaciones combinadas con números enteros, el orden establecido para operar es el siguiente:

- 1.º Realizamos las operaciones que hay dentro de los paréntesis y los corchetes, de adentro hacia afuera.
- 2.º Realizamos las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha.
- 3.º Realizamos las sumas y las restas, de izquierda a derecha.



EJEMPLOS

7. Calcula.

$$\begin{aligned} & (-10) : (+2) - (-4) \cdot (+1) = \\ & \quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \text{Multiplicaciones y divisiones} \\ & = (-5) \quad - \quad (-4) = \\ & \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \text{Sumas y restas} \\ & \qquad \qquad -1 \end{aligned}$$

8. Calcula.

$$\begin{aligned} & (+2) - (-3) \cdot (-4) - (+8) : (-2) = \\ & \quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \text{Multiplicaciones y divisiones} \\ & = (+2) - (+12) - (-4) = \\ & \quad \downarrow \qquad \qquad \text{Sumas y restas} \\ & = (-10) - (-4) = \\ & \quad \downarrow \\ & = -6 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

9. Calcula.

- a) $(+16) : (-8) + (-24) : (-6) =$
- b) $(-4) \cdot (-5) - (+3) \cdot (-2) =$
- c) $(-4) \cdot (-5) - (+3) \cdot (-2) =$
- d) $(-12) : (-3) - (+4) : (-2) =$
- e) $-2 \cdot (-6) - 5 \cdot (-3) =$
- f) $(-6) \cdot 2 + 3 \cdot (-4) =$
- g) $(-10) : (-5) + 2 : (-1) =$
- h) $(-7) \cdot (-5) - (+28) : (-4) =$

10. Haz estas operaciones.

- a) $(-13) \cdot (+3) - (-12) \cdot (+7) =$
- b) $(-3) \cdot (-12) - (-15) \cdot (-4) =$
- c) $(-35) : (-7) + (-54) : (+9) =$
- d) $(9 - 4) \cdot (-5) - 1 =$
- e) $3 \cdot (-5) - 4 : (-2) + 3 =$
- f) $2 + 3 \cdot (-4) - (-2) + 2 \cdot 7 - (-3) =$
- g) $(-35) : (-7) + (-54) : (+9) =$
- h) $(+63) : (-7) - (-8) \cdot (+2) + (-120) : (-4) =$

5

Múltiplos y divisores de números enteros

DEBES SABER HACER...

¿Cuándo es exacta una división?

- Una división es exacta cuando el resto es 0.
- Una división no es exacta cuando el resto es diferente de 0.

$\begin{array}{r} 68 \quad \underline{4} \\ 28 \quad 17 \end{array}$	$\begin{array}{r} 69 \quad \underline{4} \\ 29 \quad 17 \end{array}$
Resto \rightarrow 0 $68 : 4$ es exacta.	Resto \rightarrow 1 $69 : 4$ no es exacta.

Si la división $a : b$ es exacta, podemos afirmar que:

- a es **divisible** por b .
- a es **múltiplo** de b .
- b es **divisor** de a .



LO ESCRIBIMOS ASÍ

$\hat{3}$ \rightarrow Todos los múltiplos de 3.

$\hat{12}$ \rightarrow Todos los múltiplos de 12.

Div (8) \rightarrow Todos los divisores de 8.

Div (12) \rightarrow Todos los divisores de 12.



La divisibilidad suele estudiarse solo para números positivos. Para los números negativos, se cumplen las mismas propiedades.

- El conjunto de los **divisores** de un número a lo obtenemos efectuando todas las divisiones posibles con los números positivos menores que a y seleccionando los números con los que la división es exacta.
- El conjunto de los **múltiplos** de un número a lo obtenemos multiplicando este número por los números enteros sucesivos.

EJEMPLOS

9. Calcula los seis primeros múltiplos de 8.

$$\text{Múltiplos de } 8 \rightarrow \hat{8} = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}$$

10. Determina los divisores de 6.

$6 \overline{)1}$	$6 \overline{)2}$	$6 \overline{)3}$	$6 \overline{)4}$	$6 \overline{)5}$	$6 \overline{)6}$
0 6	0 3	0 2	2 1	1 1	0 1

Divisores de 6 \rightarrow Div (6) = {1, 2, 3, 6}

5.1. Números primos y números compuestos

Un número es **primo** cuando es positivo y sus únicos divisores positivos son el mismo número y la unidad. En caso contrario, decimos que es **compuesto**.

EJEMPLO

11. Determina si el 11 y el 33 son números primos o compuestos.

Div (11) = {1, 11} \rightarrow Dos divisores: 11 es un número primo.

Div (33) = {1, 3, 11, 33} \rightarrow Más de dos divisores: 33 es compuesto.

5.2. Criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que nos permiten reconocer, sin que sea necesario hacer la división, si un número es divisible por otro.

Un número es divisible por...

- 2, si la última cifra es 0 o par.
- 3, si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- 5, si la última cifra es 0 o 5.
- 10, si la última cifra es 0.

EJEMPLO

12. Comprueba si 3036 es divisible por 2, 3, 5 y 10.

- Es divisible por 2, porque acaba en cifra par.
- Es divisible por 3, porque $3 + 0 + 3 + 6 = 12$, que es múltiplo de 3.
- No es divisible por 5, porque no acaba ni en 0 ni en 5.
- No es divisible por 10, porque no acaba en 0.

5.3. Descomposición en factores primos

Un número entero se puede expresar como producto de diferentes números primos elevados a potencias. Esta expresión es la **descomposición en factores primos** del número.

EJEMPLO

13. Descompón 63 en factores primos.

$$\begin{array}{r} 63 : 3 \rightarrow 63 \mid 3 \\ 21 : 3 \rightarrow 21 \mid 3 \\ 7 : 7 \rightarrow 7 \mid 7 \\ 1 \end{array}$$

$$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$



Para descomponer en factores primos o factorizar un número es útil aplicar los criterios de divisibilidad.

ACTIVIDADES

11. Calcula los diez primeros múltiplos y todos los divisores de 8.

$$\dot{8} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\text{Div}(8) = \underline{\hspace{10em}}$$

12. Clasifica en primos o compuestos.

a) 2 c) 17

b) 12 d) 21

13. Comprueba si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5 y 10.

a) 72

b) 282

c) 370

14. Descompón 180 en factores primos.

$$180 = \underline{\hspace{10em}}$$

6

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo



LO ESCRIBIMOS ASÍ

Máximo común divisor de dos números: m.c.d. (a, b)

$$\text{m.c.d. } (15, 12)$$

Mínimo común múltiplo de dos números: m.c.m. (a, b)

$$\text{m.c.m. } (15, 12)$$

DEBES SABER HACER...

¿Cómo se expresa un producto de factores iguales con una potencia?

Una potencia es un producto de factores iguales. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
3 veces

- El **máximo común divisor** (m.c.d.) de varios números enteros es el número entero positivo mayor que es divisor de todos.
- El m.c.d. de varios números se obtiene descomponiendo los números en factores primos y multiplicando los factores primos comunes elevados a su exponente menor.

EJEMPLO

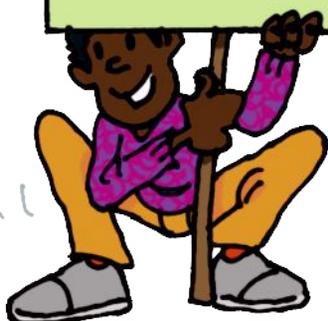
14. Calcula el máximo común divisor de 12 y 28 mediante la descomposición en factores.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \quad 28 = 2^2 \cdot 7$$

$$\text{m.c.d. } (12, 28) = 2^2 = 4$$

Si $\text{m.c.d. } (a, b) = 1$,
 a y b no tienen divisores
 comunes. Decimos que
 son primos entre sí.



- El **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de varios números enteros es el número entero positivo más pequeño que es múltiplo de todos.
- El m.c.m. se obtiene descomponiendo los números en factores primos y multiplicando los factores primos comunes y no comunes elevados a su exponente mayor.

EJEMPLO

15. Calcula el mínimo común múltiplo de 12 y 28 mediante la descomposición en factores.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \quad 28 = 2^2 \cdot 7$$

$$\text{m.c.m. } (12, 28) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

➔ SABER HACER

Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m.

Resuelve estos problemas.

- a) Claudia quiere cortar en trozos iguales tres cintas de 9, 10 y 12 m, respectivamente. ¿Qué longitud tendrán los trozos más largos que puede hacer?
- b) Diego quiere colocar los libros de una estantería en pilas de 4, 6 y 8 libros sin que sobre ninguno. Como mínimo, ¿cuántos libros ha de tener?



Pasos a seguir

1. Analizamos el problema y decidimos si interviene el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo.
2. Descomponemos los números en factores primos.
3. Calculamos el m.c.d. o el m.c.m., según corresponda.
4. Interpretamos el resultado.

- a) La longitud de cada trozo de cinta tiene que ser un divisor de las longitudes de las tres cintas. Y, además, tiene que ser el máximo. → Problema de m.c.d.
- b) El número total de libros tiene que ser múltiplo de 4, 6 y 8 y, además, tiene que ser el mínimo. → Problema de m.c.m.

a)	$\begin{array}{r} 9 \mid 3 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \mid 2 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \mid \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \mid 2 \\ 6 \mid 2 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \end{array}$	b)	$\begin{array}{r} 4 \mid 2 \\ 2 \mid 2 \\ 1 \mid \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \mid 2 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \mid 2 \\ 4 \mid 2 \\ 2 \mid 2 \\ 1 \mid \end{array}$
	$9 = 3^2$	$10 = 2 \cdot 5$	$12 = 2^2 \cdot 3$		$4 = 2^2$	$6 = 2 \cdot 3$	$8 = 2^3$

- a) $m.c.d.(9, 10, 12) = 1$
- b) $m.c.m.(4, 6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$

- a) Los trozos más largos tendrán una longitud de 1 m.
- b) Tiene que tener, como mínimo, 24 libros.

Si dos números no tienen divisores comunes, su máximo común divisor es 1.

ACTIVIDADES

15 Calcula el mínimo común múltiplo de 25 y 75, descomponiéndolos en factores primos.

=

=

m.c.m. =

16 Silvia tiene un reloj con alarma cada 30 minutos, otro reloj que suena cada 90 minutos y un tercero que lo hace cada 150 minutos. A las 8 de la mañana los tres relojes han coincidido en emitir la señal. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que vuelvan a coincidir los dos primeros?

Tienen que pasar minutos.

17 Calcula el m.c.m. y el m.c.d. de 842, 77 y 91.

=

=

=

m.c.m. =

m.c.d. =

18 Mercedes tiene 14 bolitas azul cielo, 16 bolitas naranjas, 16 rojas y 10 azul marino. Quiere hacer el máximo número de collares iguales sin que sobre ninguna bolita. ¿Cuántos collares iguales puede hacer?

Puede hacer collares.

ACTIVIDADES FINALES

Números enteros

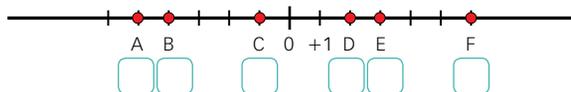
19 Expresa con un número entero.

- a) Luis ganó 6000 € a la lotería.
- b) El termómetro marcaba 7°C bajo cero.
- c) Marta vive en el cuarto piso.
- d) La tienda está en el segundo sótano.
- e) Juan debe a Amparo 120 €.

20 Escribe una situación de la vida cotidiana que corresponda a cada uno de estos números.

- a) -4 _____
- b) +15 _____
- c) -25 _____
- d) +31 _____
- e) +3 _____

21 Indica el número entero que corresponde a cada punto marcado en la recta numérica.



22 Representa estos números enteros en una recta numérica: -5, 7, -9, 0, -3 y 2.

23 Compara estos pares de números y completa con el signo < o >.

- a) -5 +8
- b) -2 -10
- c) +6 0
- d) 0 +6
- e) -3 -1
- f) +15 -25
- g) -3 -8
- h) -2 -5

24 Dados los números -8, 5, 0, -2, 6, -1:

- a) Representalos en una recta numérica.

- b) Ordénalos de mayor a menor utilizando el signo correspondiente.

25 Halla el valor absoluto de cada número.

- a) $-8 = \square$
- b) $+27 = \square$
- c) $+3 = \square$
- d) $-1 = \square$
- e) $-13 = \square$
- f) $+18 = \square$

26 Resuelve.

- a) $Op(-5) = \square$
- b) $|0| = \square$
- c) $Op(9) = \square$
- d) $|+10| = \square$

Operaciones con números enteros

27 Completa la siguiente tabla:

a	b	a - b	b - a	a + b	b + a
-7	+9				
-12	-5				
+11	-18				
+23	+17				

28 Calcula.

- a) $(+10) + (-5) + (+7) + (-9) =$

- b) $(-29) + (-12) + (-9) + (+17) =$

- c) $(+11) - (+32) - (+21) - (+9) =$

29 Calcula.

- a) $-7 - 5 + 3 - 9 - 1 + 11 =$

- b) $-4 - 2 + 5 - 1 - 4 + 1 =$

30 Completa de manera que las igualdades sean verdaderas.

- a) $(-11) + \square = +4$
- b) $(+13) + \square = +12$
- c) $\square + (-20) = -12$

➔ SABER HACER

Resolver operaciones de sumas y restas combinadas con paréntesis

31 Calcula: $-3 + (-8 + 9) - (3 - 6)$

PRIMERO. Se resuelven los paréntesis.

$$-3 + (-8 + 9) - (3 - 6) = -3 + (+1) - (-3)$$

SEGUNDO. Se eliminan los paréntesis.

- Si delante tienen el signo +, se mantienen los signos de los números.
- Si delante tienen el signo -, se cambian los signos de los números.

$$-3 + (+1) - (-3) = -3 + 1 + 3$$

TERCERO. Se resuelven las sumas y las restas, de izquierda a derecha.

$$-3 + 1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

32 Resuelve estas operaciones.

a) $6 + (-4 + 2) - (-3 - 1) =$

b) $7 - (4 - 3) + (-1 - 2) =$

c) $3 + (2 - 3) - (1 - 5 - 7) =$

d) $-8 + (1 + 4) + (-7 - 9) =$

33 Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El resultado de la suma de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.

b) El resultado de la resta de dos números enteros positivos es otro número entero negativo.

c) El resultado de la suma de un número entero negativo y un entero positivo es otro número entero negativo.

d) El resultado de la resta de un número entero negativo y un entero positivo es otro número entero negativo.

34 Calcula los siguientes productos.

a) $(+21) \cdot (+3) \cdot (+4) =$

b) $(+19) \cdot (-2) \cdot (+3) =$

c) $(+13) \cdot (-5) \cdot (-6) =$

35 Haz estas divisiones.

a) $(+35) : (-7) : (-5) =$

b) $(-21) : (-7) : (-1) =$

c) $(+32) : (-8) : (-2) =$

36 Completa.

a) $(-5) \cdot \square = -30$

f) $(-54) : \square = +9$

b) $\square \cdot (+3) = 45$

g) $\square : (-6) = -42$

c) $(-9) \cdot \square = 27$

h) $(+48) : \square = -6$

d) $\square \cdot (-8) = -48$

i) $(-63) : \square = -7$

e) $(-36) : \square = -4$

j) $\square : (+8) = +2$

37 Haz las operaciones.

a) $(+21) \cdot (+2) : (-14) =$

b) $(+5) : (-5) \cdot (-4) =$

c) $(+2) \cdot (+9) : (-3) =$

d) $[(-2) \cdot (+7)] : (-14) \cdot (+3) =$

e) $(+36) : [(-9) : (+3)] \cdot (+5) =$

f) $(+36) : (-9) : (+2) \cdot (+5) =$

g) $(+24) : (+6) \cdot (-2) \cdot (+3) =$

ACTIVIDADES FINALES

38 Resuelve las operaciones.

a) $(-5) - [(-6) - (-5) \cdot (-9)] =$

b) $[16 - (-4)] : [2 \cdot (-2)] =$

c) $[15 : 3 - (-7)] : [(-24) : (-12)] =$

d) $[(-25) + 5 - (-4)] : (-8) =$

39 Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-11) \cdot [10 + (-7)] + 36 : [(-1) - (-10)] =$

 =

b) $(-8) \cdot [5 - (-2)] - 48 : [6 + (-14)] =$

 =

c) $42 : [(-6) - (-3)] + 28 : [-6 - (-8)] =$

 =

d) $32 : [(-19) + 3] - 24 : [(-11) - (-5)] =$

 =

Operaciones combinadas

40 Opera.

a) $(-6) \cdot [-(-2) - 3 \cdot (-4)]$

b) $[(-6) \cdot 2 - 3] \cdot (-4)$

c) $2 \cdot [(-2) - (-3) \cdot 5] + (-10) : (-2)$

d) $[(-5) \cdot 3 + 8] \cdot 4 - (-2)$

e) $[(-25) : (-5) + 8] \cdot (-2) - [7 : (-1) + 12 - (-2)]$

f) $25 : [2 + (-7)] - 12 \cdot [(-3) - 2 \cdot (-4) + (-6)]$

Divisibilidad de números enteros

41 Indica si son verdaderas las afirmaciones siguientes.
Razona tu respuesta.

a) 3 es divisor de -15 . c) 25 es divisible entre -5 .

b) 4 es múltiplo de 12. d) -48 es múltiplo de -6 .

42 Completa con *múltiplo* o *divisor*.

a) 5 es _____ de -25 .

b) -243 es _____ de -3 .

c) -1 es _____ de 22.

d) 250 es _____ de -5 .

43 Halla los múltiplos de 7 comprendidos entre el 20 y el 40.

44 Calcula todos los divisores de:

a) 28 _____

b) 54 _____

c) 63 _____

d) 120 _____

e) 174 _____

45 Indica cuáles de estos números son primos. Razona tu respuesta.

a) 21 b) 19 c) 43 d) 39

46 Descompón en factores primos los siguientes números.

72 =

282 =

525 =

600 =

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

47 Calcula el máximo común divisor de 14 y 21, descomponiéndolos en factores primos.

=

=

m.c.d. =

48 Descompón estos números en factores primos y calcula su m.c.d. y su m.c.m.

a) 18 y 20

m.c.d. =

m.c.m. =

b) 28 y 42

m.c.d. =

m.c.m. =

Problemas con números enteros

- 49** A las 7 de la mañana el termómetro marcaba 4°C bajo cero y cinco horas después marcaba 3°C sobre cero. ¿Qué diferencia hay entre las dos temperaturas?



La diferencia es de grados.

- 50** Antonio tiene 123 €. A final de mes cobra 900 € de sueldo y paga la hipoteca de 546 €. ¿Cuánto dinero le queda, finalmente?

A Antonio le quedan €.

- 51** Pedro tenía 357 € en la libreta de ahorros y a lo largo del día se han registrado estos movimientos:

- recibo del agua: 103 €
- recibo del gas: 125 €
- ingreso en efectivo: 80 €
- recibo de la luz: 213 €
- nómina: 1200 €



- a) ¿De cuánto dinero dispone Pedro ahora?

Pedro dispone de €.

- b) ¿Ha estado en algún momento en números rojos?

Pedro ha estado en números rojos.

- 52** Las temperaturas máxima y mínima registradas en una ciudad cinco días de una semana han sido:

Lunes: 11°C y 6°C Jueves: -2°C y -3°C
 Martes: 5°C y -2°C Viernes: 7°C y 3°C
 Miércoles: 3°C y -1°C

- a) ¿Cuál ha sido la oscilación térmica de cada uno de los días?

Oscilaciones térmicas: _____

- b) ¿Qué día se ha alcanzado la temperatura más alta?

_____ se ha alcanzado la temperatura más alta.

- c) ¿Qué día se ha alcanzado la temperatura más baja?

_____ se ha alcanzado la temperatura más baja.

- d) ¿Qué día ha habido la máxima oscilación térmica?

_____ ha habido la máxima oscilación térmica.

- 53** María vive en el tercer piso. Baja 5 plantas para ir al trastero y después sube 7 para ir a ver a su amigo Enrique. ¿En qué piso vive Enrique?

Enrique vive en el piso.

- 54** Sara deja el coche en el tercer subterráneo y sube 4 plantas hasta su casa. ¿En qué piso vive?

Sara vive en el piso.

- 55** Queremos cortar tres cuerdas de 4, 6 y 9 m, respectivamente, en trozos iguales. ¿Qué longitud tendrán los trozos más largos que podamos hacer?

La longitud mayor será de m.

- 56** En un almacén quieren guardar 84 botellas en cajas sin que sobre ninguna. ¿De cuántas maneras posibles las pueden encajar poniendo el mismo número de botellas en cada caja?

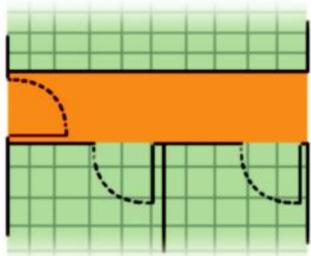
Las pueden encajar de maneras diferentes.

ACTIVIDADES FINALES

- 57 Queremos embalar 40 latas de refresco de naranja y 100 latas de refresco de limón en cajas que tengan la misma medida y que puedan contener el máximo número de latas sin mezclarlas.
¿Cuántas latas podremos poner en cada caja?

Pondremos latas.

- 58 El pasillo de una vivienda mide 432 cm de longitud y 128 cm de anchura. Queremos poner baldosas cuadradas lo más grandes posible, sin tener que cortar ninguna. Calcula las dimensiones de las baldosas y el número de baldosas que harán falta.



Las baldosas medirán cm de lado y necesitaremos .

- 59 Las cajas de una estantería se pueden colocar en pilas de 4, 6 y 9 cajas sin que sobre ninguna. ¿Cuál es la cantidad más pequeña de cajas que puede haber en la estantería?

Puede haber cajas como mínimo.

- 60 Daniel juega a baloncesto cada 3 días; Lucía, cada 4, y Pablo, cada 6. Si hoy han jugado los tres, ¿cuándo volverán a coincidir?

Volverán a coincidir dentro de días.

- 61 Alejandro tiene alrededor de 150 fotografías. Puede pegarlas en un álbum en grupos de 8, 9 o 12, sin que sobre ninguna. ¿Cuántas fotografías tiene exactamente?

Alejandro tiene fotografías.

- 62 Por una vía ferroviaria pasa un tren en dirección a Igualada cada 30 minutos y otro circula en dirección a Hospitalet cada 18 minutos. Si los dos trenes se han cruzado a las 10 de la mañana, calcula a qué hora se volverán a cruzar.

Los trenes se volverán a cruzar a las .

- 63 Enrique viaja cada 15 días a Londres y Ana, cada 21. Si los dos han coincidido hoy en el aeropuerto, ¿cuándo volverán a coincidir?



Volverán a coincidir dentro de días.

- 64 De una estación salen autobuses hacia Teruel cada 25 minutos; hacia Huesca, cada 45 minutos, y hacia Logroño, cada hora. Si a las ocho de la mañana han salido los tres por primera vez, ¿a qué hora volverán a salir los tres autobuses a la vez?

Los tres autobuses volverán a salir a la vez a las .