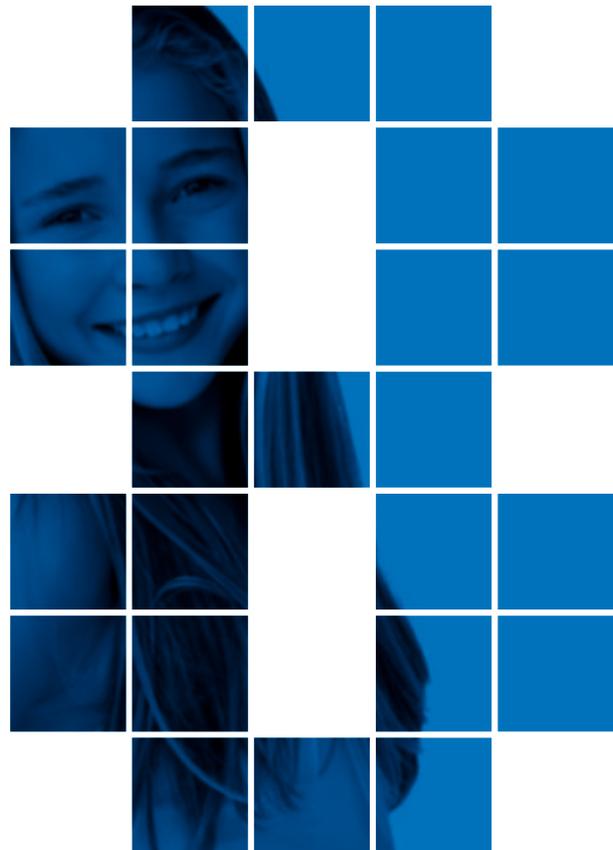


2 ESO

Refuerzo

Matemáticas



Índice

1 Números enteros

1. Conocer los números enteros y representarlos en la recta numérica	8
2. Comparar números enteros	9
3. Sumar y restar dos números enteros	10
4. Escribir sumas y restas de enteros en forma abreviada	11
5. Resolver operaciones de suma y resta de números enteros	12
6. Calcular sumas y restas de números enteros con paréntesis	14
7. Multiplicar y dividir números enteros	16
8. Calcular operaciones combinadas con números enteros	17
9. Calcular operaciones de números enteros con paréntesis y corchetes	18
10. Reconocer múltiplos y divisores	20
11. Calcular todos los divisores de un número	21
12. Averiguar si un número es primo o compuesto	22
13. Conocer y aplicar los criterios de divisibilidad	23
14. Factorizar un número	24
15. Calcular el máximo común divisor	25
16. Calcular el mínimo común múltiplo	26
17. Resolver problemas utilizando el m.c.d. y el m.c.m.	27
REPASA LO APRENDIDO	28

2 Fracciones

1. Identificar los términos de una fracción	30
2. Interpretar una fracción	31
3. Clasificar fracciones: propias, impropias e iguales a la unidad	32
4. Averiguar si dos fracciones son equivalentes	33
5. Obtener fracciones equivalentes	34
6. Averiguar si una fracción es irreducible	35
7. Calcular la fracción irreducible de una fracción	36
8. Reducir fracciones a común denominador	37
9. Comparar fracciones	38
10. Sumar y restar fracciones	40
11. Resolver operaciones de suma y resta de fracciones con paréntesis	41
12. Multiplicar y dividir fracciones	42
13. Resolver operaciones combinadas de fracciones	43
14. Resolver operaciones combinadas de fracciones con paréntesis	44
15. Resolver problemas con fracciones	46
REPASA LO APRENDIDO	48

3 Potencias y raíces

1. Calcular la potencia de un número natural	50
2. Calcular la potencia de un número entero	51
3. Calcular la potencia de una fracción	52
4. Resolver productos y cocientes de potencias con la misma base	53
5. Calcular la potencia de una potencia y la potencia de un producto o un cociente	54

6. Resolver operaciones combinadas con potencias	55
7. Calcular la raíz cuadrada exacta y entera de un número	56
8. Calcular la raíz cuadrada de una fracción	57
9. Resolver operaciones combinadas con potencias y raíces	58
10. Resolver problemas con potencias y raíces	60
REPASA LO APRENDIDO	62

4 Números decimales

1. Reconocer el orden de unidades y el valor de posición de las cifras de un número decimal	64
2. Comparar números decimales	65
3. Aproximar y estimar decimales	66
4. Expresar una fracción como número decimal	67
5. Calcular sumas, restas y multiplicaciones de decimales	68
6. Multiplicar o dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros	69
7. Dividir un número decimal entre un número natural	70
8. Dividir un número natural entre un número decimal	71
9. Dividir un número decimal entre un número decimal	72
10. Obtener cifras decimales en un cociente	73
11. Resolver problemas con números decimales	74
REPASA LO APRENDIDO	76

5 Expresiones algebraicas

1. Expresar enunciados mediante expresiones algebraicas	78
2. Determinar el valor numérico de una expresión algebraica	79
3. Identificar monomios	80
4. Sumar y restar monomios	81
5. Multiplicar y dividir monomios	82
6. Operaciones combinadas con monomios	83
7. Identificar los elementos de un polinomio	84
8. Sumar y restar polinomios	85
9. Aplicar las igualdades notables	87
REPASA LO APRENDIDO	88

6 Ecuaciones

1. Determinar los elementos de una ecuación	90
2. Trasponer términos en una ecuación	92
3. Resolver ecuaciones de primer grado sencillas	94
4. Resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis	96
5. Resolver ecuaciones de primer grado con denominadores	98
6. Resolver ecuaciones de segundo grado	100
7. Resolver sistemas de ecuaciones lineales	102
8. Resolver sistemas de ecuaciones lineales	103
9. Resolver problemas con ecuaciones	104
REPASA LO APRENDIDO	106

7 Proporcionalidad numérica

1. Determinar la razón entre dos magnitudes 108
 2. Calcular un término desconocido en una proporción 109
 3. Identificar magnitudes directamente proporcionales 110
 4. Resolver problemas de proporcionalidad directa mediante regla de tres 111
 5. Identificar magnitudes inversamente proporcionales 112
 6. Resolver problemas de proporcionalidad inversa mediante regla de tres 113
 7. Resolver problemas de proporcionalidad 114
 8. Calcular un porcentaje 116
 9. Resolver problemas con porcentajes 118
- REPASA LO APRENDIDO 120

8 Proporcionalidad geométrica

1. Determinar si dos segmentos son proporcionales 122
 2. Calcular longitudes mediante el teorema de Tales 123
 3. Dividir un segmento en partes proporcionales 124
 4. Calcular medidas en triángulos semejantes 125
 5. Calcular medidas en polígonos semejantes 126
 6. Calcular distancias en un mapa 127
 7. Resolver problemas 128
- REPASA LO APRENDIDO 130

9 Polígonos y circunferencia

1. Clasificar polígonos 132
 2. Clasificar triángulos 133
 3. Conocer las relaciones entre los elementos de un triángulo 134
 4. Aplicar el teorema de Pitágoras 135
 5. Determinar los ángulos de un polígono 136
 6. Clasificar cuadriláteros 137
 7. Identificar polígonos regulares 138
 8. Determinar los elementos de una circunferencia 139
 9. Resolver problemas 140
- REPASA LO APRENDIDO 142

10 Perímetros y áreas

1. Calcular el perímetro de un polígono 144
 2. Determinar la longitud de una circunferencia 145
 3. Hallar el área de paralelogramos 146
 4. Hallar el área del triángulo y de un polígono regular 147
 5. Hallar el área del trapecio 148
 6. Hallar el área del círculo 149
 7. Resolver problemas de áreas 150
- REPASA LO APRENDIDO 152

11 Cuerpos geométricos. Áreas

1. Identificar poliedros 154
 2. Identificar prismas 155
 3. Identificar pirámides 156
 4. Calcular el área de un poliedro 157
 5. Identificar cuerpos de revolución 158
 6. Calcular el área de un cuerpo de revolución 159
 7. Resolver problemas de áreas de cuerpos geométricos 160
- REPASA LO APRENDIDO 162

12 Cuerpos geométricos. Volumen

1. Transformar unidades de volumen 164
 2. Escribir unidades de volumen de forma compleja a incompleja y viceversa 166
 3. Relacionar unidades de volumen, capacidad y masa 167
 4. Calcular el volumen de un poliedro 168
 5. Calcular el volumen de un cuerpo de revolución 169
 6. Resolver problemas de volúmenes 170
- REPASA LO APRENDIDO 172

13 Funciones

1. Representar puntos en un sistema de coordenadas cartesianas 174
 2. Determinar el signo de las coordenadas de un punto 175
 3. Representar una función a partir de una tabla de valores 176
 4. Representar una función a partir de su ecuación 177
 5. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función 178
 6. Representar funciones de proporcionalidad directa 179
 7. Resolver problemas con funciones 180
- REPASA LO APRENDIDO 182

14 Estadística y probabilidad

1. Identificar el tipo de variable estadística 184
 2. Construir una tabla de frecuencias 185
 3. Dibujar un gráfico estadístico 186
 4. Calcular las medidas estadísticas 188
 5. Determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio 190
 6. Calcular probabilidades mediante la Regla de Laplace 191
 7. Resolver problemas de probabilidad 192
- REPASA LO APRENDIDO 194

Estructura

Presentación de la unidad

1 Números enteros

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

EL USO DE LOS NÚMEROS ENTEROS
Las torres petronas, situadas en Kuala Lumpur (Malasia), tienen 88 pisos y 5 niveles subterráneos de aparcamiento con capacidad para 5 400 vehículos.




La torre Sears de Chicago tiene 108 pisos y 3 plantas subterráneas.

Investiga

1. Busca información de torres que tengan varios pisos y algunas plantas de sótano. ¿Cómo expresarías con un número entero la segunda planta? ¿Y la décima planta?
2. Si una torre tiene 5 plantas de sótano, ¿cómo expresarías mediante un número entero cada una de estas plantas?

CÁLCULO MENTAL

Sumar 1001, 2001, 3001, ...
1475 + 2001

$$\begin{array}{r} 1475 \\ +2000 \\ \hline 3475 \\ +1 \\ \hline 3476 \end{array}$$

Sumar 999, 1999, 2999, ...
1875 + 1999

$$\begin{array}{r} 1875 \\ +2000 \\ \hline 3875 \\ -1 \\ \hline 3874 \end{array}$$

Calcula mentalmente.

2345 + 1001 =	5032 + 4001 =
8123 + 2001 =	3582 + 3001 =
1915 + 1001 =	3248 + 6001 =

Lectura inicial
Curiosidades y hechos reales que muestran la importancia de los contenidos que vas a estudiar.

Investiga
Actividades que te invitan a profundizar en lo expuesto en la lectura. Con esa información podrás resolver las actividades que se proponen.

Cálculo mental
Estrategias para realizar mentalmente operaciones, y actividades para que lo pongas a prueba.

Competencias que vas a trabajar.

Páginas de contenidos

Actividades propuestas donde podrás aplicar y practicar los contenidos y técnicas que se han expuesto.

6 Calcular sumas y restas de números enteros con paréntesis

Para **calcular sumas y restas de números enteros con paréntesis** sigue estos pasos:
1.º Calcula las operaciones que hay dentro de los paréntesis.
2.º Calcula las sumas y restas obtenidas.

$$\begin{aligned} (-2 + 3 - 9 + 4) - (-3 - 12) &= \\ = (-11 + 7) - (-15) &= \\ = (-4) - (-15) &= -4 + 15 = +11 \end{aligned}$$

18. Calcula.

a) $12 - (3 + 2) =$	e) $-9 + (-5 - 4) =$	i) $-5 - (6 - 7) =$
b) $-10 + (-7 + 2) =$	ñ) $12 - (5 - 8) =$	j) $-8 - (-5 - 8) =$
c) $(-6 + 2) - 8 =$	g) $(2 - 8) + 3 =$	ñ) $(-3 - 6) - 7 =$
d) $(-11 - 9) + 6 =$	h) $(2 - 15) + 8 =$	o) $(-4 - 15) + 9 =$

19. Calcula.

a) $(2 - 3) + (-5 + 4) =$	d) $(-6 + 2) + (-4 + 3) =$	g) $(3 - 7) - (-1 - 8) =$
b) $(3 - 8) + (-2 - 5) =$	e) $(-9 + 2) + (-2 - 5) =$	h) $(5 - 9) - (-5 - 3) =$
c) $(-3 - 6) + (-4 - 8) =$	ñ) $(-10 + 5) - (4 - 11) =$	i) $(-6 - 7) - (2 - 10) =$

14

Resumen teórico del contenido que necesitas saber para resolver las actividades propuestas.

Páginas de resolución de problemas

Se analizan situaciones problemáticas reales que te permitirán poner a prueba tus capacidades matemáticas. Estos problemas te mostrarán la utilidad práctica de todo lo aprendido, que te puede ayudar en tu vida cotidiana.

17 Resolver problemas utilizando el m.c.d. y el m.c.m.

53. Resuelve.

a) Marcos tiene 20 sellos de Europa y 56 de Asia. Quiere hacer el mayor número posible de lotes que tengan el mismo número de sellos, sin mezclar sellos de Europa y Asia y sin que sobre ninguno. ¿Cuántos lotes hará? ¿Cuántos sellos pondrá en cada lote?



b) Jaime va a la carnicería cada 6 días y a la pescadería cada 4 días. Si el día 3 de marzo estuvo en ambos establecimientos, ¿cuántos días como mínimo han de pasar para que vuelva a los dos establecimientos? ¿Qué día de marzo será?

c) Una alarma suena cada 15 minutos, otra cada 20 minutos y una tercera cada 25 minutos. Hoy a las 17:50 han sonado las tres alarmas a la vez. ¿A qué hora volverán a sonar juntas por primera vez? ¿Cuántas veces coincidirán las tres alarmas hasta las 10 de la noche?

d) Nuria tiene 8 bolitas rojas, 16 verdes y 10 amarillas. Quiere hacer el mayor número de pulseras iguales, con el mismo número de bolas de cada color sin que sobre ninguna bola. ¿Cuántas pulseras puede hacer? ¿Cuántas bolas de cada color tendrá cada pulsera?



Final de la unidad. Repaso

Con estas actividades podrás comprobar si dominas los procedimientos básicos de esta unidad y repasar contenidos anteriores.

REPASA LO APRENDIDO

1 Completa la recta numérica y colorea los números que se indican.



- ▶ El número situado 4 unidades a la derecha de -1 .
- ▶ El número situado 6 unidades a la izquierda de $+2$.
- ▶ El número situado 3 unidades a la derecha de -6 .
- ▶ El número situado 5 unidades a la izquierda de -1 .

2 Escribe un número que haga ciertas las igualdades.

- a) $\square + 2 = 2$ c) $\square + 4 = 4$ e) $\square + 5 = 5$ g) $\square + 8 = 8$
 b) $\square + 9 = 9$ d) $\square + 8 = 8$ f) $\square + 7 = 7$ h) $\square + 10 = 10$

3 Escribe tres números enteros que cumplan cada desigualdad.

- a) $-5 < \square < +3$ b) $-8 < \square < 0$ c) $-11 < \square < -6$
 d) $+5 > \square > -1$ e) $-12 > \square > 0$ f) $-15 > \square > -7$

4 Calcula estas operaciones con números enteros.

- a) $(+12) + (-5) =$ f) $[(-7) - (+4)] \cdot (-2) + 7 =$
 b) $(-9) + (+7) \cdot (-2) =$ g) $(+9) - [(-6) + 3] \cdot 5 - (-2) =$
 c) $[(+7) + (-16)] : (-3) =$ h) $[(-15) - (-8) + 2] \cdot (-1) =$
 d) $[(-13) + (-8)] : 7 \cdot (-2) =$ i) $[(-14) - (-5) \cdot 2 + (-5)] - (-7) =$
 e) $[(-12) : (-4)] + (-3) \cdot 2 =$ j) $[(-20) - (+3) : (-3) + (-2)] \cdot (-3) =$

5 Piensa y escribe.

- a) Una suma de dos números enteros cuyo resultado sea un número entero negativo. b) Una resta de dos números enteros cuyo resultado sea un número entero negativo.

1

Números enteros

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

EL USO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Las torres petronas, situadas en Kuala Lumpur (Malasia), tienen 88 pisos y 5 niveles subterráneos de aparcamiento con capacidad para 5400 vehículos.



La torre Sears de Chicago tiene 108 pisos y 3 plantas subterráneas.



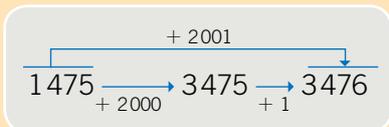
Investiga

1. Busca información de torres que tengan varios pisos y algunas plantas de sótano. ¿Cómo expresarías con un número entero la segunda planta? ¿Y la décima planta?
2. Si una torre tiene 5 plantas de sótano, ¿cómo expresarías mediante un número entero cada una de estas plantas?

CÁLCULO MENTAL

Sumar 1001, 2001, 3001, ...

$$1475 + 2001$$



Calcula mentalmente.

$$2345 + 1001 =$$

$$5032 + 4001 =$$

$$8123 + 2001 =$$

$$3582 + 3001 =$$

$$1915 + 5001 =$$

$$7048 + 6001 =$$

Sumar 999, 1999, 2999, ...

$$1875 + 1999$$



Calcula mentalmente.

$$2345 + 999 =$$

$$5032 + 3999 =$$

$$8123 + 4999 =$$

$$3582 + 2999 =$$

$$1915 + 6999 =$$

$$7048 + 8999 =$$

1 Conocer los números enteros y representarlos en la recta numérica

El conjunto de los **números enteros** se representa por \mathbb{Z} y está formado por:

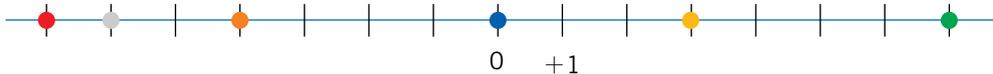
- Números **enteros positivos**: $+1, +2, +3, +4, \dots$
- El número 0.
- Números **enteros negativos**: $-1, -2, -3, -4, \dots$

Los números enteros se representan ordenados en la **recta numérica**:

- El número 0 divide la recta en dos partes iguales.
- Los números enteros positivos se representan a la derecha del cero.
- Los números enteros negativos se representan a la izquierda del cero.



1. Completa la recta numérica y escribe qué número entero representa cada punto.

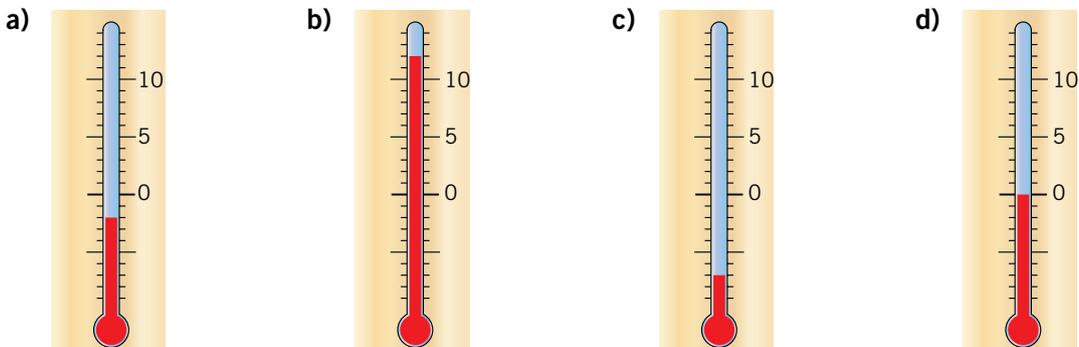


- | | | |
|-----|-----|-----|
| ● → | ● → | ● → |
| ● → | ● → | ● → |

2. Inventa una situación real que se represente con cada número entero.

- a) -3
- b) $+5$
- c) -10
- d) $+120$

3. Escribe la temperatura que marca cada termómetro.



2 Comparar números enteros

- El **valor absoluto** de un número entero es la distancia en unidades que hay desde el número al cero. El valor absoluto de un número a se escribe así: $|a|$.
- Dos **números enteros** son **opuestos** si están situados a la misma distancia del cero.
- Para comparar dos números enteros hay que tener en cuenta que:
 - Cualquier número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.
 - De dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
 - De dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

4. Calcula el valor absoluto de cada número.

a) $|-2| =$

b) $|+9| =$

c) $|+12| =$

d) $|-11| =$

5. Piensa y contesta.

a) Si $|a| = 2$, ¿qué números pueden ser a ?

b) Si $|b| = 12$, ¿qué números pueden ser b ?

6. Escribe el signo $<$ o $>$ según corresponda.

a) $+3 \square -2$

d) $+4 \square +9$

g) $-5 \square +4$

j) $-3 \square -5$

b) $-7 \square -4$

e) $-8 \square -12$

h) $-8 \square -2$

k) $-11 \square -20$

c) $-3 \square 0$

f) $-5 \square +1$

i) $-10 \square -8$

l) $-17 \square -27$

7. En cada caso, escribe tres números enteros que cumplan cada desigualdad.

a) $-4 <$

c) $+2 >$

e) $-7 >$

b) $+3 <$

d) $-8 <$

f) $0 >$

8. Completa de dos formas para que las desigualdades sean ciertas.

a) $\square < -5 < \square$

b) $\square > -10 > \square$

c) $\square < -13 < \square$

$\square < -5 < \square$

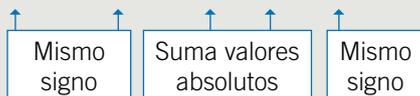
$\square > -10 > \square$

$\square < -13 < \square$

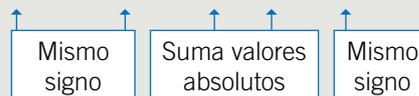
3 Sumar y restar dos números enteros

- Para **sumar dos números enteros del mismo signo** se suman sus valores absolutos y al resultado se le añade el signo de los números.

$$(+3) + (+7) = 3 + 7 = +10$$

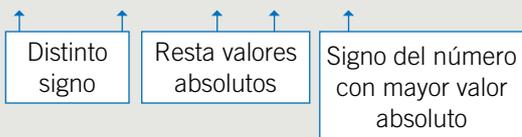


$$(-5) + (-7) = 5 + 7 = -12$$

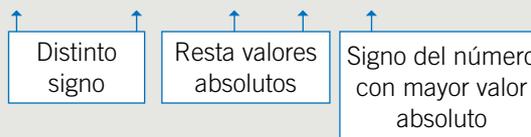


- Para **sumar dos números enteros de distinto signo** se restan sus valores absolutos (el menor del mayor) y al resultado se le añade el signo del número con mayor valor absoluto.

$$(-7) + (+3) = 7 - 3 = -4$$



$$(+12) + (-9) = 12 - 9 = +3$$



- Para **restar dos números enteros** se suma al primero el opuesto del segundo.

$$(+9) - (-2) = (+9) + \text{op}(-2) = (+9) + (+2) = +11$$

9. Suma.

a) $(+6) + (-7) =$

c) $(-3) + (-5) =$

e) $(-5) + (-7) =$

b) $(-3) + (+9) =$

d) $(+11) + (-6) =$

f) $(-12) + (-8) =$

10. Resta.

a) $(+7) - (+9) =$

c) $(-8) - (+5) =$

e) $(+7) - (-9) =$

b) $(-9) - (-5) =$

d) $(-12) - (-7) =$

f) $(-6) - (-12) =$

11. Expresa con números y resuelve.

Un submarinista está a 60 m de profundidad y asciende 20 m. ¿Cuál es su posición ahora?

4 Escribir sumas y restas de enteros en forma abreviada

Para sumar o restar varios números enteros, primero escribimos la operación en forma abreviada. Para escribir en **forma abreviada** una operación de números enteros sigue estas reglas:

REGLA 1. Al primer número se le quitan los paréntesis, y si su signo es positivo, se escribe el número sin signo.

REGLA 2. Al quitar un paréntesis precedido del signo +, se mantiene el signo del número.

REGLA 3. Al quitar un paréntesis precedido del signo -, se cambia el signo del número.

$$(+2) + (-4) - (-5) - (+2) \blacktriangleright \text{REGLA 1: } 2 + (-4) - (-5) - (+2)$$

$$\text{REGLA 2: } 2 - 4 - (-5) - (+2)$$

$$\text{REGLA 3: } 2 - 4 + 5 - 2$$

12. Escribe en forma abreviada y calcula.

a) $(+6) + (-7) =$

c) $(-3) - (-5) =$

e) $(-5) + (-7) =$

b) $(+7) - (+27) =$

d) $(-8) - (-5) =$

f) $(-7) + (-9) =$

13. Escribe estas operaciones de números enteros en forma abreviada.

a) $(-5) - (-2) + (-5) - (+7) - (+8) =$

b) $(+8) + (-6) - (+4) - (-3) - (+12) =$

c) $(+9) - (+7) - (-3) + (-2) - (-18) =$

d) $(-5) - (-2) + (-5) - (+7) - (+6) =$

e) $(+13) + (-10) - (-9) - (+21) + (-3) =$

f) $(-17) + (-8) - (+6) - (-7) - (+9) =$

5 Resolver operaciones de suma y resta de números enteros

Para **calcular sumas y restas de números enteros** sigue estos pasos:

1.º Escribe la expresión en forma abreviada.

2.º Suma los números con signo +.

3.º Suma los números con signo -.

4.º Resta al primer resultado el segundo.

$$(+8) + (-6) - (-2) - (+5) = 8 - 6 + 2 - 5 = (8 + 2) - (6 + 5) = 10 - 11 = -1$$

14. Escribe en forma abreviada y calcula.

a) $(+3) + (-6) - (+7) - (-5) =$

c) $(-8) + (+6) - (+2) - (-5) =$

b) $(-10) - (+9) - (-13) - (+7) =$

d) $(-11) - (+7) + (-9) - (-6) =$

15. Calcula.

a) $(+7) + (-3) - (+4) - (-7) - (-8) - (+9) =$

b) $(-9) - (-5) - (+8) + (-5) - (-3) + (-12) =$

c) $(-5) - (-5) - (-2) - (+5) - (-5) - (+13) =$

d) $(+11) - (-9) + (-10) - (+12) - (-9) - (-7) =$

e) $(-10) + (-8) - (-6) + (-5) - (-4) + (-12) - (-8) =$

f) $(-11) - (-4) + (-7) - (+6) + (+14) - (-21) =$

16. Calcula.

a) $(-5) - (-2) + (-1) + (+4) + (-8) - (-6) =$

b) $(+10) - (-7) + (-4) - (-2) - (+5) - (-9) =$

c) $(-6) + (-4) - (-7) + (-2) + (-7) + (-11) =$

d) $(+9) - (-6) - (-7) + (-2) + (-3) - (-3) =$

e) $(-12) - (-6) + (-2) + (-5) - (-8) + (-10) =$

f) $(+9) - (+2) - (-5) - (-3) - (-11) + (-12) =$

17. Completa el término que falta y calcula.

a) $(-2) + (+5) - (-3) - (-7) + (+4) - (+2) = \square + 5$

b) $(-3) - (+4) - (-7) + (-2) - (+3) - (-9) = \square - 8$

c) $(-7) - (-3) + (-2) - (+8) + (+4) - (+10) = \square - 10$

d) $(+10) - (-7) + (-4) - (-2) - (+5) - (-9) = \square + 9$

e) $(-7) + (-4) - (+2) - (+4) - (-7) - (-2) = \square - 6$

6 Calcular sumas y restas de números enteros con paréntesis

Para **calcular sumas y restas de números enteros con paréntesis** sigue estos pasos:

1.º Calcula las operaciones que hay dentro de los paréntesis.

2.º Calcula las sumas y restas obtenidas.

$$\begin{aligned} & (-2 + 3 - 9 + 4) - (-3 - 12) = \\ & = (-11 + 7) - (-15) = \\ & = (-4) - (-15) = -4 + 15 = +11 \end{aligned}$$

18. Calcula.

a) $12 - (3 + 2) =$

e) $-9 + (-5 - 4) =$

i) $-5 - (6 - 7) =$

b) $-10 + (-7 + 2) =$

f) $12 - (5 - 8) =$

j) $-8 - (-5 - 8) =$

c) $(-6 + 2) - 8 =$

g) $(2 - 8) + 3 =$

k) $(-3 - 6) - 7 =$

d) $(-11 - 9) + 6 =$

h) $(2 - 15) + 8 =$

l) $(-4 - 15) + 9 =$

19. Calcula.

a) $(2 - 3) + (-5 + 4) =$

d) $(-6 + 2) + (-4 + 3) =$

g) $(3 - 7) - (-1 - 8) =$

b) $(3 - 8) + (-2 - 5) =$

e) $(-9 + 2) + (-2 - 5) =$

h) $(5 - 9) - (-5 - 3) =$

c) $(-3 - 6) + (-4 - 8) =$

f) $(-10 + 5) - (4 - 11) =$

i) $(-6 - 7) - (2 - 10) =$

20. Calcula.

a) $(3 - 5 - 8) + (-4 + 2) - 6 =$

e) $(-4 - 5 - 3) + (-2 + 6 - 8) =$

b) $(-6 - 4) - (3 + 2) - (-8 + 4 - 7) =$

f) $(-10 + 5 - 9) - 4 - (-7 + 6) + 2 =$

c) $5 - (-8 - 10) - (-3 - 8 - 4) =$

g) $(-8 - 7 + 4) - (-6 + 5 - 9) =$

d) $12 - (-8 + 5 - 1) - (-9 - 7 - 5) =$

h) $12 - (-10 - 4 + 3) - (-2 + 1 - 7) - 9 =$

21. Calcula el valor del término que falta.

a) $(-2 + 5 - \square) + 7 = 2 + 7 = 9$

d) $(-4 + 5 - \square) + 9 = -2 + 9 = 7$

b) $(3 - 4 + \square) - 9 = 2 - 9 = -7$

e) $(-7 + 5 - \square) + 10 = -14 + 10 = -4$

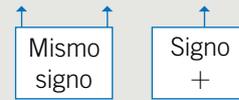
c) $(-9 - 3 + \square) - 5 = -7 - 5 = -12$

f) $(9 - 5 - \square) - 12 = -8 - 12 = -20$

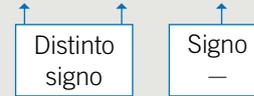
7 Multiplicar y dividir números enteros

- Para **multiplicar dos números enteros**, primero multiplica sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo $+$ si los dos factores tienen el mismo signo, y tendrá el signo $-$, si los factores tienen signos diferentes.
- Para **dividir dos números enteros**, primero divide sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo $+$ si los dos factores tienen el mismo signo, y tendrá el signo $-$ si los factores tienen signos diferentes.

$$(-3) \cdot (-5) = +15$$



$$(-12) : (+4) = -3$$



22. Multiplica estos números enteros.

a) $(-2) \cdot (+3) =$

d) $(-5) \cdot (+6) =$

g) $(+4) \cdot (-8) =$

b) $(+5) \cdot (-4) =$

e) $(+9) \cdot (-7) =$

h) $(-7) \cdot (+9) =$

c) $(+7) \cdot (+8) =$

f) $(-6) \cdot (-7) =$

i) $(-8) \cdot (-5) =$

23. Calcula.

a) $(+2) \cdot (-2) \cdot (-3) =$

c) $(+3) \cdot (-4) \cdot (-5) =$

e) $(-4) \cdot (-2) \cdot (+2) =$

b) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-4) =$

d) $(+3) \cdot (+5) \cdot (-2) =$

f) $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) =$

24. Divide.

a) $(+8) : (+2) =$

d) $(+9) : (-3) =$

g) $(-21) : (+3) =$

b) $(+10) : (+5) =$

e) $(-15) : (-5) =$

h) $(-30) : (-6) =$

c) $(-12) : (-6) =$

f) $(-18) : (+9) =$

i) $(-48) : (+6) =$

25. Calcula el término que falta.

a) $(+4) \cdot \square = -12$

e) $(+5) \cdot \square = -20$

i) $(+7) \cdot \square = -21$

b) $\square \cdot (+4) = -12$

f) $\square \cdot (+5) = -30$

j) $\square \cdot (-6) = -42$

c) $(+12) : \square = +2$

g) $(+14) : \square = -2$

k) $(-16) : \square = +2$

d) $(-20) : \square = -5$

h) $(+24) : \square = -6$

l) $(-30) : \square = +5$

8 Calcular operaciones combinadas con números enteros

Para **calcular operaciones combinadas con números enteros** sigue estos pasos:

1.º Calcula las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen.

2.º Calcula las sumas y restas en el orden en el que aparecen.

$$(-10) : (-2) + (-7) + (-3) \cdot (-7) = (+5) + (-7) + (+21) = (5 + 21) - 7 = 19$$

26. Calcula estas operaciones combinadas.

a) $(+12) - (-3) \cdot (-2) + (-6) =$

c) $(-9) + (-7) \cdot (+4) - (-12) =$

b) $(-9) - (+4) - (-15) : (-3) =$

d) $(+6) - (-18) : (-3) + (-7) =$

27. Calcula.

a) $(+7) \cdot (-2) + (-6) - (-12) : (-6) =$

d) $(-10) - (-2) \cdot (-4) + (-20) : (-5) =$

b) $(-10) + (-2) \cdot (-4) - (+4) \cdot (-3) =$

e) $(-4) \cdot (-5) + (-12) : (-4) - (-9) =$

c) $(-2) \cdot (-6) - (-9) : (-3) - (-10) =$

f) $(-18) : (-6) - (-15) \cdot (-2) + (-14) =$

28. Calcula.

a) $(-5) \cdot (-2) + (-4) - (-5 \cdot 2 - 6) : 4 =$

b) $(-9) - (-1) \cdot (5 - 3) - (-15) : (-3) =$

9 Calcular operaciones de números enteros con paréntesis y corchetes

Para **calcular operaciones combinadas con números enteros con paréntesis y corchetes** sigue estos pasos:

- 1.º Calcula las operaciones que hay dentro de los paréntesis y corchetes.
- 2.º Calcula las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen.
- 3.º Calcula las sumas y las restas en el orden en el que aparecen.

$$(-2 - 5 - 8) \cdot (-2) - (-6 - 3) : (-3) = (-15) \cdot (-2) - (-9) : (-3) = 30 - 3 = 27$$

29. Calcula estas operaciones combinadas.

a) $45 : [(-7) + (-2)] =$

d) $2 \cdot [(-63) : 7] =$

b) $-21 : [3 - (-4)] =$

e) $-49 : [21 : (-3)] =$

c) $[(-6 + 7 - 3) : (-2)] \cdot (-5) =$

f) $[(-2 + 6) : (-2)] \cdot (-9 + 3) : (-2) =$

30. Calcula.

a) $-2 + [-3 - (2 - 4) + 1] - 5 =$

d) $3 - [-2 - (-1 - (-6)) - 3] + 7 =$

b) $1 + [2 - (-7 - 4 - 1)] - 6 =$

e) $-9 - [-1 - (3 + (-1) - 7)] - 10 =$

c) $[(4 - 7 - 9) : (-6)] \cdot 4 : (-2) + (-10) =$

f) $[(-16) : 2 + (-8 + 3)] - (-3) \cdot (-4) =$

31. Calcula.

a) $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5] =$

b) $2 \cdot (4 - 11) - 4 \cdot [6 + 2 \cdot (5 - 8 - 2)] =$

c) $3 \cdot [4 - (6 : 2 - 11)] - 4 \cdot [5 - (7 - 3 - 8)] =$

d) $14 - [8 - (10 - 8) - 4 \cdot 3] : (-2) =$

e) $[2 - (-4) - (-11 + 5)] : [2 - (5 - 9 + 6) - (-3)] =$

f) $-[-4 - (9 + 5 - 3) + 12] \cdot [3 - [-(7 - 2) + 1] - 4] =$

g) $-[(-8 - 10) : (-2) + (3 + 6) : (-3)] \cdot (-5) =$

h) $[(8 - 9) - ((-3) + 2)] \cdot [(-4) \cdot 3 - (-2) + 5 \cdot (-2) + 6] \cdot (-8) : 4 - 2 =$

32. Calcula.

a) $[-13 \cdot 3 - (-12) \cdot 7] - (-3) =$

b) $[(-3) \cdot (-12) - (-15) \cdot (-4)] - (-6) : 2 =$

c) $[(-35) : (-7) + (-54) : 9] - 4 \cdot (-3) =$

d) $[-25 + 5 - (-4)] : (-8) =$

e) $[-16 + (-9) + 5] : (-4) =$

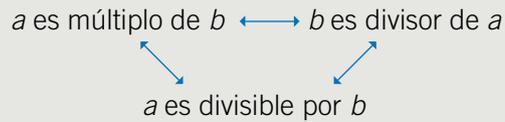
f) $[-4 + (-3) \cdot (-6)] : 7 =$

g) $-11 \cdot [10 + (-7)] + 36 : [(-1) - (-10)] =$

h) $-8 \cdot [5 - (-2)] - 48 : [6 + (-14)] =$

10 Reconocer múltiplos y divisores

- Si la división $a : b$ es una división exacta se cumple:



- Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando el número por la serie de números enteros positivos: 1, 2, 3, 4, ...

Los múltiplos de a se representan por \dot{a} .

La división $12 : 3 = 4$ es una división exacta. Por tanto:

- 12 es múltiplo de 3.
- 3 es divisor de 12.
- 12 es divisible por 3.

33. Escribe cinco múltiplos de cada número.

a) 2

c) 6

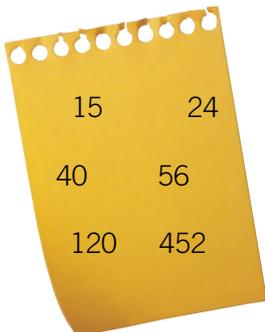
e) 12

b) 4

d) 11

f) 14

34. Observa los números y averigua.



a) Los múltiplos de 2.

c) Los múltiplos de 4.

b) Los múltiplos de 3.

d) Los múltiplos de 5.

35. Calcula y contesta.

a) ¿Es 2 divisor de 10? ¿Y de 15?

b) ¿Es 3 divisor de 234? ¿Y de 540?

c) ¿Es 5 divisor de 300? ¿Y de 845?

11 Calcular todos los divisores de un número

Para **calcular** todos los **divisores de un número** sigue estos pasos:

- 1.º Divide el número entre los números naturales: 1, 2, 3, ..., hasta llegar a una división en la que el cociente sea menor que el divisor.
- 2.º De cada división exacta, se obtienen dos divisores del número: el divisor y el cociente.

Calculamos todos los divisores de 16.

$\begin{array}{r} 16 \overline{) 1} \\ 0 \ 16 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \overline{) 2} \\ 0 \ 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \overline{) 3} \\ 1 \ 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \overline{) 4} \\ 0 \ 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \overline{) 5} \\ 1 \ 3 \\ \hline \end{array}$	← Menor que el cociente
▼	▼		▼		
1 y 16	2 y 8		4		Div (16) = {1, 2, 4, 8, 16}

36. Tacha los números que no sean divisores del número dado y calcula los que faltan.

a) Div (9) = {1, 3, 4, 6, 9}

c) Div (12) = {1, 2, 3, 4, 8, 12}

b) Div (25) = {1, 3, 5, 10, 25}

d) Div (48) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 24, 48}

37. Calcula todos los divisores de cada número.

a) 18

c) 20

e) 30

b) 36

d) 42

f) 60

38. Piensa y contesta.

Si un número a es divisor de 6 y 6 es divisor de b , ¿es el número a divisor de b ?
Comprueba tu respuesta con un ejemplo.

12 Averiguar si un número es primo o compuesto

- Un **número es primo** cuando es positivo y sus únicos divisores son él mismo y la unidad.
- Un **número es compuesto** si tiene más de dos divisores.
Los divisores de 3 son: 1 y 3. El número 3 es un número primo.
Los divisores de 4 son: 1, 2 y 4. El número 4 es un número compuesto.

39. Calcula todos los divisores de cada número y averigua cuáles son primos.

a) $\text{Div}(12) =$

c) $\text{Div}(19) =$

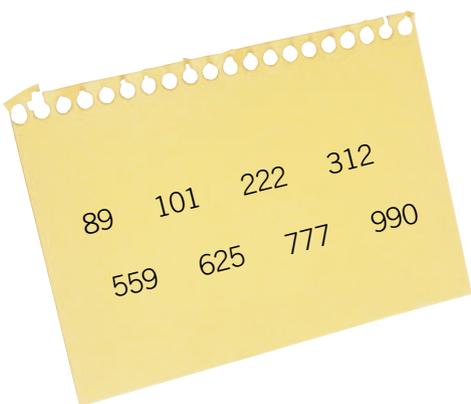
e) $\text{Div}(21) =$

b) $\text{Div}(32) =$

d) $\text{Div}(43) =$

f) $\text{Div}(51) =$

40. Averigua cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos.



41. Piensa y escribe tres números primos y tres compuestos.

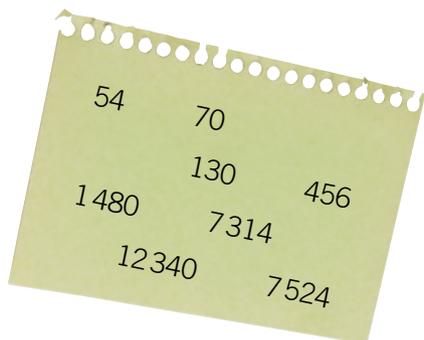
13 Conocer y aplicar los criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que nos permiten averiguar, sin calcular la división, si un número es divisible por otro.

Los criterios de divisibilidad más usados son:

- Un número es **divisible por 2** si su última cifra es 0 o cifra par.
- Un número es **divisible por 3** si la suma de sus cifras es divisible por 3.
- Un número es **divisible por 5** si su última cifra es 0 o 5.
- Un número es **divisible por 11** si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es 0 o divisible por 11.

42. Observa los números y averigua.



- a) Los números divisibles por 2.
- b) Los números divisibles por 3.
- c) Los números divisibles por 5.

43. Calcula el valor que puede tomar n para que el número $43n$ sea:

- a) Divisible por 2.
- b) Divisible por 3.
- c) Divisible por 2 y por 3.
- d) Divisible por 5.
- e) Divisible por 2 y por 5.
- f) Divisible por 11.

44. Piensa y escribe tres números.

- a) Divisibles por 2 y por 3.
- b) Divisibles por 2 y por 5.
- c) Divisibles por 3 y por 5.
- d) Divisibles por 2, por 3 y por 5.

14 Factorizar un número

Factorizar un número es expresarlo como producto de números primos elevados a potencias.

Para factorizar un número sigue estos pasos:

- 1.º Divide el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, ...) tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad.
- 2.º Escribe el número como producto de factores primos y, si hay alguno repetido, exprésalo como potencia.

Factorizamos el número 24.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

45. Calcula el número que tiene cada factorización.

a) $2^2 \cdot 3^2 =$

b) $3 \cdot 5^2 \cdot 7 =$

c) $2^3 \cdot 3 \cdot 5 =$

46. Expresa cada número como producto de factores primos.

a) $32 =$

b) $40 =$

c) $54 =$

d) $90 =$

47. Factoriza los siguientes números.

a) $100 =$

b) $150 =$

c) $240 =$

d) $680 =$

48. Lee y contesta.

Laura ha calculado la factorización de varios números y estos son los resultados que ha obtenido.

$$A = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$B = 3^2 \cdot 5^2$$

$$C = 3 \cdot 4 \cdot 7^2$$

¿En cuál puedes asegurar que se ha equivocado? ¿Por qué?

15 Calcular el máximo común divisor

- El **máximo común divisor** de varios números enteros es el mayor número positivo que es divisor de todos los números.
- Para calcular el m.c.d. de varios números se descomponen los números en producto de factores primos y el m.c.d. es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Calculamos el m.c.d. (12, 32).

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3^2$$
$$\text{m.c.d. (12, 18)} = 2 \cdot 3 = 6$$

49. Calcula.

a) m.c.d. (24, 32) =

c) m.c.d. (10, 30, 62) =

e) m.c.d. (20, 64, 12) =

b) m.c.d. (15, 40) =

d) m.c.d. (22, 48, 72) =

f) m.c.d. (30, 15, 5) =

50. Resuelve.

a) Se quieren envasar 40 latas de naranja y 100 latas de limón en cajas, de tal forma que el contenido de todas las cajas sea igual y que no sobre ninguna lata. ¿Cuál es el máximo número de latas de cada clase que podemos poner en una caja? ¿Cuántas cajas necesitamos?

b) Luis tiene una cuerda de 40 m y otra de 74 m, respectivamente. Quiere cortarlas en trozos cuya longitud sea igual y que no sobre ningún trozo. ¿Cuál es la longitud máxima de cada trozo? ¿Cuántos trozos salen de cada cuerda?

16 Calcular el mínimo común múltiplo

- El **mínimo común múltiplo** de varios números enteros es el menor número positivo que es múltiplo de todos los números.
- Para calcular el m.c.m. de varios números se descomponen los números en producto de factores primos y el m.c.m. es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Calculamos el m.c.m. (12, 50).

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 50 = 2 \cdot 5^2$$

$$\text{m.c.m. (12, 50)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$$

51. Calcula.

a) m.c.m. (30, 54) =

c) m.c.m. (34, 50, 82) =

e) m.c.m. (45, 72, 100) =

b) m.c.m. (25, 60) =

d) m.c.m. (45, 66, 93) =

f) m.c.m. (52, 74, 98) =

52. Resuelve.

- a) Andrea va a natación cada 4 días y a tenis cada 10 días. Hoy ha ido a natación y a tenis. ¿Cuántos días como mínimo han de pasar para que vuelva a ir a las dos actividades?

- b) Pablo ha hecho un mosaico cuadrado formado por baldosas rectangulares de 12 cm de ancho y 18 cm de largo, sin cortar ninguna. ¿Cuánto mide como mínimo el lado del mosaico?

17 Resolver problemas utilizando el m.c.d. y el m.c.m.

53. Resuelve.

- a) Marcos tiene 20 sellos de Europa y 56 de Asia. Quiere hacer el mayor número posible de lotes que tengan el mismo número de sellos, sin mezclar sellos de Europa y Asia y sin que sobre ninguno. ¿Cuántos lotes hará? ¿Cuántos sellos pondrá en cada lote?



- b) Jaime va a la carnicería cada 6 días y a la pescadería cada 4 días. Si el día 3 de marzo estuvo en ambos establecimientos, ¿cuántos días como mínimo han de pasar para que vuelva a los dos establecimientos? ¿Qué día de marzo será?

- c) Una alarma suena cada 15 minutos, otra cada 20 minutos y una tercera cada 25 minutos. Hoy a las 17:50 han sonado las tres alarmas a la vez. ¿A qué hora volverán a sonar juntas la próxima vez? ¿Cuántas veces coincidirán las tres alarmas hasta las 10 de la noche?

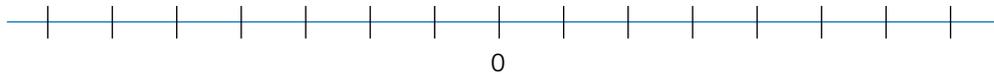
- d) Nuria tiene 8 bolitas rojas, 16 verdes y 10 amarillas. Quiere hacer el mayor número de pulseras iguales, sin que sobre ninguna bola. ¿Cuántas pulseras puede hacer? ¿Cuántas bolas de cada color tendrá cada pulsera?



- e) Javier quiere poner un rodapié de madera a dos paredes de 24 m y 18 m, respectivamente. Ha calculado la longitud del mayor listón de madera que cabe un número exacto de veces en las dos paredes. ¿Cuál será la longitud de este listón?

REPASA LO APRENDIDO

- 1 Completa la recta numérica y colorea los números que se indican.



-  El número situado 4 unidades a la derecha de -1 .
-  El número situado 6 unidades a la izquierda de $+2$.
-  El número situado 3 unidades a la derecha de -6 .
-  El número situado 5 unidades a la izquierda de -1 .

- 2 Escribe un número que haga ciertas las igualdades.

- a) $|\square| = 2$ c) $\text{Op}(\square) = +4$ e) $\text{Op}|\square| = 5$ g) $\text{Op}(\text{Op}\square) = +8$
b) $|\square| = 9$ d) $\text{Op}(\square) = -8$ f) $\text{Op}(\text{Op}\square) = -7$ h) $\text{Op}(\text{Op}\square) = -10$

- 3 Escribe tres números enteros que cumplan cada desigualdad.

- a) $-5 < \square < +3$ c) $-8 < \square < 0$ e) $-11 < \square < -6$
b) $+5 > \square > -1$ d) $-12 < \square < 0$ f) $-7 > \square > -15$

- 4 Calcula estas operaciones con números enteros.

- a) $(+12) + (-5) =$ f) $[(-7) - (+4)] \cdot (-2) + 7 =$
b) $(-9) + (+7) \cdot (-2) =$ g) $(+9) - [(-6) + 3] \cdot 5 - (-2) =$
c) $[(+7) + (-16)] : (-3) =$ h) $[(-15) - (-8) + 2] \cdot (-1) =$
d) $[(-13) + (-8)] : 7 \cdot (-2) =$ i) $[(-14) - (-5) \cdot 2 + (-5)] - (-7) =$
e) $[(-12) : (-4)] + (-3) \cdot 2 =$ j) $[(-20) - (+3) : (-3) + (-2)] \cdot (-3) =$

- 5 Piensa y escribe.

- a) Una suma de dos números enteros cuyo resultado sea un número entero negativo. b) Una resta de dos números enteros cuyo resultado sea un número entero negativo.