



Matematika

EBATZI SAILA

Batxilergoko 2. mailarako Matematika liburua Zubia Editoriala, S. L.ren eta Santillana Educación, S. L.ren Hezkuntza Argitalpenetarako Sailean **Joseba Santxo Uriarteren** eta **Teresa Grence Ruizen** zuzendaritzapean sortu, taxutu eta gauzaturiko talde-lana da.

Liburu honen prestatze- eta argitaratze-lanean honako talde honek esku hartu du:

José Carlos Gámez Pérez
Silvia Marín García
Alfredo Martín Palomo
Carlos Pérez Saavedra
Domingo Sánchez Figueroa

EDIZIOA

Ainhoa Basterretxea Llona
Carlos Pérez Saavedra
José Antonio Almodóvar Herráiz
Ana de la Cruz Fayos
Silvia Marín García
Virgilio Nieto Barrera
Laura Sánchez Fernández

PROIEKTUAREN ZUZENDARITZA

Joseba Santxo Uriarte
Domingo Sánchez Figueroa

Liburu honetako ariketak ezin dira inola ere liburuan bertan egin.
Ariketetan proposatzen ditugun taulak, eskema eta gainerako
baliabideak ikasleak koadernoan egin beharrekoen ereduak baino ez dira.

Aurkibidea

UNITATEA	JAKIN	
1 Matriseak	1. Matriseak 10 2. Matrise iraulia 13 3. Eragiketak matrizeekin 14 4. Matrise baten heina 18 5. Alderantzizko matrizea 20 6. Ekuazio matrizialak 22	• Bi matrizeren arteko biderkadura kalkulatzeko • Matrise baten heina kalkulatzeko Gaussen metodoaren bidez • Alderantzizko matrizea kalkulatzeko, Gauss-Jordanen metodoaz • $AX = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea
2 Determinanteak	1. Determinanteak 36 2. Determinanteen propietateak 37 3. Minor osagarria eta adjuntua 41 4. Determinante bat adjuntuen bidez garatzea 42 5. Matrise baten heina kalkulatzeko 44 6. Matrise baten alderantzizkoa kalkulatzeko 46	• Matrise baten determinante kalkulatzeko determinanteen propietateak erabiliz • Determinanteak kalkulatzeko <i>zeroak eginez</i> • Matrise baten heina kalkulatzeko minorretatik abiatuta • Matrise baten alderantzizkoa determinanteen bidez kalkulatzeko • Determinanteak dituzte ekuazioak ebaztea
3 Ekuazio-sistemak	1. Ekuazio linealen sistemak 60 2. Ekuazio-sistema baten adierazpen matriziala 62 3. Sistemak ebazteko Gaussen metodoa 63 4. Rouché-Fröbeniusen teorema 66 5. Cramerren erregela 68 6. Cramerren erregelaren orokortzea 70 7. Sistema homogeenak 71 8. Parametroen mendeko ekuazio-sistemak 72	• Sistema bat Gaussen metodoaren bidez ebaztea • Sistema bat parametro baten mende eztabaidatzea eta ebaztea, Gaussen metodoa erabiliz • Ekuazio linealen sistema bat Rouché-Fröbeniusen teorema baliatuz eztabaidatzea • Ekuazio-sistema bateragarri determinatu bat Cramerren erregela erabiliz ebaztea • Ekuazio-sistema bat Cramerren erregela erabiliz ebaztea
4 Bektoreak espazioan	1. Bektoreak espazioan 86 2. Bektoreen konbinazio lineala 87 3. Espazioko bektore baten koordenatuak 88 4. Eragiketak koordenatutan 89 5. Bektoreen aplikazioak 90 6. Biderkadura eskalarra 92 7. Biderkadura eskalarren aplikazioak 94 8. Biderkadura bektoriala 96 9. Biderkadura bektorialaren aplikazioak 98 10. Biderkadura mistoa 100 11. Biderkadura mistoaren aplikazioak 101	• Bektore linealki independenteak matrizeen bidez kalkulatzeko • Hiru puntu lerrotatuta dauden edo ez aztertzea • Bektore baten bektore elkarzuta kalkulatzeko • Bektore ortogonalen oinarri bat kalkulatzeko • Triangelu baten azalera kalkulatzeko • Paralelepipedo baten bolumena kalkulatzeko • Tetraedro baten bolumena kalkulatzeko
5 Zuzenak eta planoak espazioan	1. Espazioko zuzenaren ekuazioak 112 2. Espazioko planoaren ekuazioak 114 3. Puntu lerrotatuak eta planokideak 116 4. Plano baten bektore elkarzuta 117 5. Zuzenaren eta planoaren posizio erlatiboak 118 6. Bi planoren posizio erlatiboak 119 7. Hiru planoren posizio erlatiboak 120 8. Bi zuzenen posizio erlatiboak 122 9. Zuzenaren eta planoaren elkarzutasuna 124 10. Plano sortak 125	• Bi puntutatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa kalkulatzeko • Hiru puntutatik pasatzen den planoaren ekuazioa kalkulatzeko • Zenbait puntu lerrotatuta dauden edo ez aztertzea • Zenbait puntu planokideak diren edo ez aztertzea • Bi planok mugatutako zuzen baten bektore gidatzailea kalkulatzeko • Plano baten eta zuzen baten posizio erlatiboa zehaztea • Bi planoren posizio erlatiboa zehaztea • Hiru planoren espazioko posizio erlatiboa zehaztea • Bi zuzenen posizioa kalkulatzeko, bektore gidatzaileen bidez
6 Angeluak eta distantziak	1. Angeluak espazioak 138 2. Proiekzio ortogonalak 140 3. Puntu simetrikak 142 4. Puntuekiko eta planoekiko distantzia 144 5. Puntu batetik zuzen batera arteko distantzia 146 6. Zuzenen arteko distantzia 147 7. Leku geometrikoak. Esfera 149	• Bi zuzenen eta zuzen baten eta plano baten arteko angelua • Bi planoren arteko angelua kalkulatzeko • Puntu baten proiekzio ortogonal zuzen baten gainean • Puntu baten proiekzio ortogonal plano baten gainean • Zuzen baten proiekzio ortogonal plano baten gainean • Puntu baten simetrikoa kalkulatzeko beste puntu batekiko • Puntu baten simetrikoa kalkulatzeko zuzen batekiko • Puntu baten simetrikoa kalkulatzeko plano batekiko • Puntu batetik plano batera arteko distantzia kalkulatzeko
7 Limiteak eta jarraitutasuna	1. Funtzio baten limitea infinituan 162 2. Eragiketak limiteekin 164 3. Limiteak kalkulatzeko 166 4. Indeterminazio batzuen ebazpena 168 5. Funtzio baten limitea puntu batean 171 6. Funtzio baten jarraitutasuna 174 7. Bolzanoren teorema 176 8. Weierstrassen teorema 177	• $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioa duten limiteak ebaztea • $\infty - \infty$ motako indeterminazioak dituzten limiteak ebaztea • 1^∞ motako indeterminazioa duten limiteak ebaztea • Funtzio baten limiteak kalkulatzeko $\frac{0}{0}$ motako indeterminazioa duten puntu batean • Funtzio bat puntu batean jarraitua den zehaztea • Zatika definitutako funtzio baten jarraitutasuna aztertzea

EGITEN JAKIN

- $XA = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea
- $AX + B = C$ motako ekuazio matrizialak ebaztea
- Baldintza jakin bat betetzen duten matrizeak zehaztea
- Matrizeen arteko berdintza betetzea eragiten duten konstanteak kalkulatzeko
- Matrize baten berretura kalkulatzeko

- Matrize batzuen propietateak egiaztatzea
- Problema ebazteko matrizeak erabiliz
- Elementuak zehazteko matrize bat ortogonal izan dadin
- Parametro baten mende dagoen matrize baten heina kalkulatzeko
- Parametro baten mende dagoen matrize baten alderantzizkoa kalkulatzeko
- Ekuazio matrizialen sistema bat ebazteko

- Determinante bat balio jakina duen beste bat bihurtzea
- Determinante bat kalkulatzeko, matrize baten heinaren mende
- Parametro baten mende dagoen matrize karratu baten heina aztertzea, determinanteak erabiliz
- Parametro baten mendeko matrize ez-karratu baten heina kalkulatzeko, determinanteak erabiliz

- Parametro baten mendeko matrize batek alderantzizkoa duen aztertzea
- $AX = C$ motako ekuazio matrizial bat ebazteko
- $AX + B = C$ motako ekuazio matrizial bat ebazteko
- Biderkagai komuna ateratzea beharrezkoa den ekuazio matrizial bat ebazteko

- Ekuazio homogeneoen sistema bat eztatxatzea eta ebazteko
- Parametroen mendeko ekuazio-sistema bat Rouché-Fröbeniusen teorema baliatuz eztatxatzea
- Parametroen mendeko ekuazio-sistema bat ebazteko Cramerren erregela erabiliz
- $AX = XA$ motako ekuazio matrizialak ebazteko
- $AX = B$ motako ekuazio matrizialak ebazteko
- Problema ekuazio linealen sistemen bidez ebazteko

- Sistema bat aztertzea eta ebazteko, Rouché-Fröbeniusen teorema erabiliz
- Parametro baten mendeko bi ekuazioko eta bi ezezaguneko sistema bat eztatxatzea
- Parametro baten mendeko hiru ekuazioko eta hiru ezezaguneko sistema bat eztatxatzea
- Parametro baten mendeko eta ezezagun baino ekuazio gehiagoko sistema bat eztatxatzea
- Parametro baten mendeko hiru ekuazioko eta hiru ezezaguneko sistema bat eztatxatzea

- Bektoreen arteko eragiketak egiteko, koordenatuak erabiliz
- Baldintza batzuk betetzen dituen bektore baten jatorri eta muturraren koordenatuak kalkulatzeko
- Paralelogramo baten erpinak kalkulatzeko
- Bektore baten koordenatuak kalkulatzeko oinarri batekiko
- Parametro bat kalkulatzeko, hiru bektore linealki independenteak izan daitezkeen
- Bektore baten modulua kalkulatzeko, biderkadura eskalarren definizioa erabiliz

- Parametro baten balioa kalkulatzeko, bi bektore elkarzutak izan daitezkeen
- Baldintza batzuk betetzen dituzten bi bektoreen bektore elkarzutak kalkulatzeko
- Triangelu baten erpin bat kalkulatzeko
- Bektoreak kalkulatzeko, biderkadura bektorialari buruzko baldintzak jakinda
- Biderkadura mistoa kalkulatzeko, propietateak aplikatuz

- Bi zuzenen posizioa kalkulatzeko, haien ekuazio inplizituak erabiliz
- Plano baten zuzen elkarzut bat kalkulatzeko
- Zuzen baten plano elkarzut bat kalkulatzeko
- Puntu bat zuzen bateko delat egiaztatzea, parametro baten mende
- Puntu batetik pasatu eta beste zuzen baten paraleloa den zuzen baten ekuazioa kalkulatzeko
- Zuzen bat eta haren kanpoko puntu bat bere baitan dituen planoaren ekuazioa kalkulatzeko
- Bere baitan bi zuzen ebakitzaile dituen planoaren ekuazioa kalkulatzeko

- Bi zuzen paralelo bere baitan dituen planoaren ekuazioa kalkulatzeko
- Puntu batetik pasatzen den eta plano baten paraleloa den planoaren ekuazioa kalkulatzeko
- Zuzen bat bere baitan duen eta plano baten elkarzuta den planoaren ekuazioa kalkulatzeko
- Bi zuzenen elkarzuta den zuzenaren ekuazioa kalkulatzeko
- Bi zuzenen posizio erlatiboak parametro baten mende kalkulatzeko
- Zuzen baten eta plano baten posizio erlatiboak parametro baten mende kalkulatzeko

- Bi planoaren arteko distantzia kalkulatzeko
- Zuzen baten eta plano baten arteko distantzia kalkulatzeko
- Puntu batetik zuzen batera arteko distantzia kalkulatzeko
- Gurutzatzen diren bi zuzenen arteko distantzia kalkulatzeko
- Beste plano batekin angelu jakin bat osatzen duen planoaren ekuazioa kalkulatzeko
- Zuzen baten zuta den eta puntu jakin batetik pasatzen den zuzen bat kalkulatzeko
- Zuzen baten paraleloa den eta puntu batetik pasatzen den plano bat kalkulatzeko

- Plano batekiko zuzen simetrikoa kalkulatzeko
- Puntu baten plano batekiko puntu simetrikoko bat kalkulatzeko, parametroen mende badago
- Simetria-problema ebazteko
- Bi puntuen simetria-planoa kalkulatzeko
- Distantzia jakin batera dauden puntuak bilatzeko
- Zuzen batetik distantzia jakin batera dagoen zuzen bat kalkulatzeko
- Bi puntutatik distantzia berera dauden zuzen bateko puntuak kalkulatzeko

- Funtzio bati Bolzanoren teorema aplikatzeko
- Funtzio bati tarteko balioen teorema aplikatzeko
- Funtzio baten zenbait balioen arteko eragiketa baten limitea zehazteko
- Funtzio bateko parametroa kalkulatzeko, $\infty - \infty$ indeterminazioa duen limite batean badago
- Funtzio bateko parametroa kalkulatzeko, 1^∞ motako indeterminazioa duen limite batean agertzen bada
- Bi funtzio esponenzialen zatiketaren limitea kalkulatzeko

- Funtzio batek puntu batean limitea baduen ala ez zehazteko
- Indeterminazio bat ebazteko $\sqrt[n]{f(x)} \pm a$ motako adierazpen bat agertzen denean
- Parametroa kalkulatzeko, funtzioaren limitea existi dadin puntu batean
- Parametroak kalkulatzeko funtzio bat jarraitua izan dadin
- Ekuazio batek erro errealek dituen zehazteko
- Bi kurbak elkar ebakitzen duten zehazteko
- Funtzio batek balio jakin bat hartzen duen erabakitzea

UNITATEA	JAKIN	
8 Deribatuak	1. Deribatuaren definizioa 190 2. Deribatuaren interpretazio geometrikoa 191 3. Alboko deribatuak 192 4. Deribagarritasuna eta jarraitutasuna 193 5. Funtzio deribatuak. Ondo ondoko deribatuak 194 6. Eragiketak deribatuarekin 195 7. Oinarrizko funtzioen deribatua 196 8. Deribazio-teknikak 198	- Funtzio konposatuaren deribatua kalkulatzeko, katearen erregela ondoz ondo aplikatuz $h(x) = f(x)^{g(x)}$ motako funtzioen deribatua kalkulatzeko - Funtzio inplizitu baten deribatua kalkulatzeko puntu batean - Funtzio baten puntu bateko zuzen ukitzailearen ekuazioa kalkulatzeko
189		
9 Deribatuaren aplikazioak	1. Gorakortasuna eta beherakortasuna 212 2. Maximo eta minimo erlatiboak 213 3. Ahurtasuna eta ganbiltasuna 215 4. Inflexio-puntuak 216 5. Funtzioak optimizatzea 218 6. Rolieren teorema 220 7. Batez besteko balioaren teorema 221 8. Batez besteko balioaren teorema orokortua 222 9. L'Hôpitalen erregela 223	- Funtzio baten gorakortasuna eta beherakortasuna kalkulatzeko - Funtzio baten maximoak eta minimoak kalkulatzeko, lehen deribatua erabiliz - Funtzio baten maximoak eta minimoak kalkulatzeko, bigarren deribatua erabiliz - Funtzio baten ahurtasuna eta ganbiltasuna zehazteko - Funtzio baten inflexio-puntuak kalkulatzeko - Funtzio baten inflexio-puntuak kalkulatzeko, hirugarren deribatua erabiliz - Optimizazio-problema bat ebazteko
211		
10 Funtzioen adierazpena	1. Eremua eta ibiltartea 238 2. Funtzio baten ebakipuntuak eta zeinua 239 3. Simetriak eta periodikotasuna 240 4. Adar infinituak. Asintotak 241 5. Funtzio baten monotonía 245 6. Funtzio baten kurbadura 246 7. Funtzio polinomikoak 247 8. Funtzio arrazionalak 248 9. Erroketak dituzten funtzioak 249 10. Funtzio esponenzialak 250 11. Funtzio logaritmikoak 251 12. Zatika definitutako funtzioak 252	- Funtzio baten eremua kalkulatzeko - Ardatzekiko ebakipuntuak kalkulatzeko - Funtzio baten zeinua kalkulatzeko - Funtzio bat simetrikoa den edo ez zehazteko - Funtzio baten asintota bertikalak kalkulatzeko - Funtzio baten asintota horizontalak kalkulatzeko - Funtzio baten asintota zeharrek kalkulatzeko - Funtzio baten adar infinituak aztertzeke - Funtzio baten gorakortasuna eta beherakortasuna aztertzeke - Funtzio baten kurbadura aztertzeke
237		
11 Integral mugagabeak	1. Funtzio baten jatorrizko funtzioa 266 2. Funtzio baten integrala 267 3. Oinarrizko funtzioen integralak 268 4. Zatikako integrazioa 274 5. Funtzio arrazionalen integralak 275 6. Aldagai-aldaketa bidezko integrazioa 280	- Zenbakizko biderkagai bat falta duen integral bat ebazteko $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}$ motako integral bat kalkulatzeko - Integral bat zatika ebazteko - Integral arrazional bat kalkulatzeko, izendatzaileak erro errealek bakunak soilik dituela jakinda - Integral arrazional bat kalkulatzeko, izendatzaileak erro errealek anizkoitz bat soilik duela jakinda - Integral arrazional bat kalkulatzeko, jakinda izendatzaileak erro bakunak eta anizkoitzak dituela - Integral arrazional bat kalkulatzeko, izendatzaileak errealek ez diren erroak dituela jakinda
265		
12 Integral mugatuak	1. Kurba baten azpiko azalera 294 2. Integral mugatua 296 3. Batez besteko balioaren teorema, integralerako 298 4. Kalkulu integralaren oinarrizko teorema 299 5. Barrowen erregela 300 6. Kurba batek itxitako azalera 302 7. Bi kurbaren arteko azalera 304	- Integral mugatu bat kalkulatzeko, Barrowen erregela aplikatuz - Grafiko baten eta X ardatzaren arteko azalera kalkulatzeko - Bi kurbaren arteko azalera kalkulatzeko - Balio absolutua duen funtzio baten integral mugatu bat kalkulatzeko - Funtzio arrazional baten integral mugatu bat kalkulatzeko
293		
13 Probabilitatea	1. Ausazko esperimentuak 318 2. Gertaerak. Eragiketak gertaerekin 320 3. Maiztasuna eta probabilitatea 322 4. Probabilitatearen propietateak 323 5. Laplacen erregela 324 6. Probabilitate baldintzatua 325 7. Kontingentzia-etaulak 326 8. Mendeko gertaerak eta gertaera askeak 327 9. Erabateko probabilitatearen teorema 328 10. Bayesen teorema 329	- Lagin-espazioa zehazteko zuhaitz-diagrama baten bidez - Probabilitateak kalkulatzeko Laplacen erregela erabiliz - Kontingentzia-etaula bat egiteko eta probabilitateak kalkulatzeko erabiltzeko - Aukera kopurua kalkulatzeko, kontaketa-metodoak erabiliz
317		
14 Banaketa binomiala eta normala	1. Ausazko aldagaiak 342 2. Banaketa diskretuak 344 3. Banaketa binomiala 345 4. Banaketa jarraituak 348 5. Banaketa normala 349 6. Binomialaren hurbilketa 351	- Ausazko aldagai bat sortzeko esperimentu batetik abiatuta - Ausazko aldagai diskretu baten probabilitate-funtzioa eta banaketa-funtzioa kalkulatzeko - Ausazko aldagai batek banaketa binomiala duen jakiteko eta haren probabilitate-funtzioa kalkulatzeko - Probabilitateak kalkulatzeko banaketa binomiala duten ausazko aldagaientan - Banaketa binomiala duten ausazko probabilitateak taulen bidez kalkulatzeko
341		

EGITEN JAKIN

- Funtzio baten parametroa kalkulatzeko haren zuzen ukitzailea ez dakigunean
- Funtzio baten parametroak kalkulatzeko haren zuzen ukitzailearen ekuazioa jakinda
- Funtzio baten deribagarritasuna eta jarraitutasuna aztertzea
- Funtzio baten deribagarritasuna eta jarraitutasuna aztertzea, haren parametroetatik abiatuta

- Katearen erregela aplikatzea
- Funtzio ezezagun baten mende dagoen funtzio baten deribatua kalkulatzeko
- Deribatuak kalkulatzeko deribazio logaritmikoa erabiliz
- Problema ebaztea, funtzio inplizituaren deribatua eta bete ditzaketen propietate geometrikoak erabiliz

- Optimizazio-problema bat ebaztea, aldagai bat bakandu beharra dagoenean
- Rolieren teorema aplikatzea
- Batez besteko balioaren teorema aplikatzea
- Batez besteko balioaren teorema orokortua aplikatzea
- L'Hôpitalen erregela aplikatzea, limiteak kalkulatzeko
- 1^∞ , ∞^0 eta 0^0 motatako indeterminazioak ebaztea
- Funtzio bat zehaztea, mutur erlatibo bat eta funtzioaren puntu bat jakinda
- Parametro baten balioa kalkulatzeko, funtzio bat beti ahurra izateko

- Funtzio baten deribatua adieraztea, grafikoa abiapuntu hartuta
- Aldagai bat bakantzea eskatzen duen optimizazio-problema bat ebaztea
- Optimizazio-problema bat ebaztea, tarteen muturrak aztertuz
- Zatika definitutako funtzio bati Rolieren teorema aplikatzea
- Frogapenak egitea, Rolieren teorema erabiliz
- Funtzio baten parametroak kalkulatzeko, batez besteko balioaren teorema aplikatzeko
- Parametro bat kalkulatzeko, limite baten emaitza gisa emandako balio bat lortzeko

- Funtzio polinomiko bat adieraztea
- Funtzio arrazional bat adieraztea
- Erroketak dituzten funtzioak adieraztea
- Funtzio esponentzial bat adieraztea
- Funtzio logaritmiko bat adieraztea
- Zatika definitutako funtzio bat adieraztea
- Funtzio konposatu baten eremua kalkulatzeko
- Funtzio konposatu baten simetria aztertzea
- Parametro ezezagunak kalkulatzeko, asintotak abiapuntu hartuta

- Funtzio baten monotonia eta kurbadura aztertzea, deribatuaren grafikotik abiatuta
- Baldintza jakin batzuk betetzen dituen funtzio baten grafikoa adieraztea
- Funtzio bat grafikoki adieraztea, aurrez parametroen balioa kalkulatu
- Biderkagai esponentzial bat edo logaritmiko bat duten funtzioen grafikoa adieraztea
- Funtzio simetriko bat adieraztea
- Biderkagai bat balio absolutuan adierazita duen funtzio baten grafikoa adieraztea

- Zenbakitzailearen maila izendatzailearena baino handiagoa edo berdina duen integral arrazional bat kalkulatzeko
- Integral bat kalkulatzeko aldagai-aldaketa bat eginez
- Funtzio bat kalkulatzeko deribatua eta funtzioa pasatzen den puntu bat jakinda
- Baldintza bat betetzen duen jatorrizkoa kalkulatzeko
- $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}} dx$ motako integralak kalkulatzeko
- Integral bat kalkulatzeko aldagai-aldaketa jakin bat erabiliz
- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ motako integral bat kalkulatzeko

- $\int e^{ax} \sin x dx$ edo $\int e^{ax} \cos x dx$ motako integral bat zatika kalkulatzeko
- $\int \ln(P(x)) dx$ motako integral bat zatika ebaztea, $P(x)$ 1. mailako poligono bat izanda
- $\int e^{ax+b} \cdot P(x) dx$ motako integral bat zatika ebaztea, $P(x)$ polinomio bat izanda
- Integral bat kalkulatzeko aldagai-aldaketa bat eginez, polinomiko bihurtzeko
- Integral bat kalkulatzeko aldagai-aldaketa bat eginez, arrazional bihurtzeko

- Integral mugatu bat zatika ebaztea
- Integral mugatu bat aldagai-aldaketa eginez ebaztea
- Zatika definitutako funtzio batek mugatutako azalera kalkulatzeko
- Kurba baten azpiko azalera kalkulatzeko, integrazio-muga bat infinitua denean

- Kurba baten azpiko azalera kalkulatzeko, integrazio-tarterik ematen ez denean
- Kurba batek mugatutako irudi baten azalera kalkulatzeko
- Balio absolutuan adierazitako kurba batek eta zuzen batek mugatutako azalera kalkulatzeko

- Gertaeren guztizko kopurua kalkulatzeko, oinarritzko gertaeren kopurua finitua bada
- Esperimentu baten lagin-espazioa kalkulatzeko, sarrera biko taula batekin
- Probabilitateak esperimendatuz kalkulatzeko
- Probabilitateak kalkulatzeko haien propietateak erabiliz

- Gertaera konposatuaren probabilitate-problema ebaztea
- Gertaeren ebakiduren probabilitatea kalkulatzeko zuhaitz diagrama bat erabiliz
- Biderketaren erregelak erabiltzea itzuleradun esperimenduetan
- Probabilitateak kalkulatzeko, erabateko probabilitatearen teorema erabiliz
- Probabilitateak kalkulatzeko, Bayesen teorema erabiliz

- Ausazko aldagai jarraitu baten banaketa-funtzioa kalkulatzeko, dentsitate-funtziotik abiatuta
- Taulak erabiliz, probabilitateak kalkulatzeko banaketa normala duten ausazko aldagaientan
- Banaketa binomiala duen ausazko aldagai baten parametroak kalkulatzeko, normal batera hurbilduz
- Banaketa binomiala duen ausazko aldagai baten parametroak kalkulatzeko
- Ausazko aldagai jarraitu baten dentsitate-funtzioa kalkulatzeko eta haren banaketa-funtzioa adierazteko

- $Z \equiv N(0, 1)$ balio positibo bat baino handiagoa izateko probabilitatea kalkulatzeko
- $Z \equiv N(0, 1)$ bi balioen artean egoteko probabilitatea kalkulatzeko
- $Z \equiv N(0, 1)$ balio negatibo bat baino handiagoa edo txikiagoa izateko probabilitatea kalkulatzeko
- Puntu bat kalkulatzeko, probabilitatea jakinda
- Ausazko aldagai bat tipifikatzea
- Parametroetako bat kalkulatzeko, beste parametroa eta probabilitate bat jakinda
- Batez bestekoa eta desbideratze tipikoa kalkulatzeko, bi probabilitate jakinda
- Banaketa binomiala eta n handia duten ausazko aldagaiekin probabilitateak kalkulatzeko

Unitatearen eskema

Unitate didaktikoen egitura oso sinplea da; izan ere, oinarritzko edukiak, ebatzitako adibideak eta proposatutako jarduerak erraz aurkitzea da helburua.

Unitatean zehar, ikur batzuen bidez, oinarritzko gaitasunak bereziki lantzen dituzten edukiak edo jarduerak daude adierazita. Hona hemen:

Oinarritzko gaitasunak

Liburuan zehar, HEZIBERRiren arabera oinarritzko gaitasunen ikurrak ikusiko dituzu zenbat jardueraren ondoan. Ikur horiek kasu bakoitzean zer gaitasun lantzen den adierazten digute.

Arloko gaitasunak

-  Hizkuntza- eta literatura-komunikaziorako gaitasuna
-  Matematikarako gaitasuna
-  Zientziarako gaitasuna
-  Teknolariarako gaitasuna
-  Gizarterako eta herriartasunerako gaitasuna
-  Arterako gaitasuna
-  Mugimendurako gaitasuna

Zehar gaitasunak

-  Hitzez, hitzik gabe eta era digitalean komunikatzeko gaitasuna
-  Ikasten eta pentsatzen ikasteko gaitasuna
-  Elkarbizitzarako gaitasuna
-  Ekimenerako eta ekintzaile-sena garatzeko gaitasuna
-  Izaten ikasteko gaitasuna

Unitatearen sarrera: edukiak ikastera bultzatzen duen testua.

Unitatearen amaierako orrialdeak: ikasitako edukiak aplikatzeko beste urrats bat.

Unitateko edukiak (**Jakin**) zehazten dira.

Lehen orrialdean, eguneroko bizitzako egoera bat agertzen da, eta horixe erabiliko dugu unitatean ikasiko dituzun edukiak aplikatzeko.

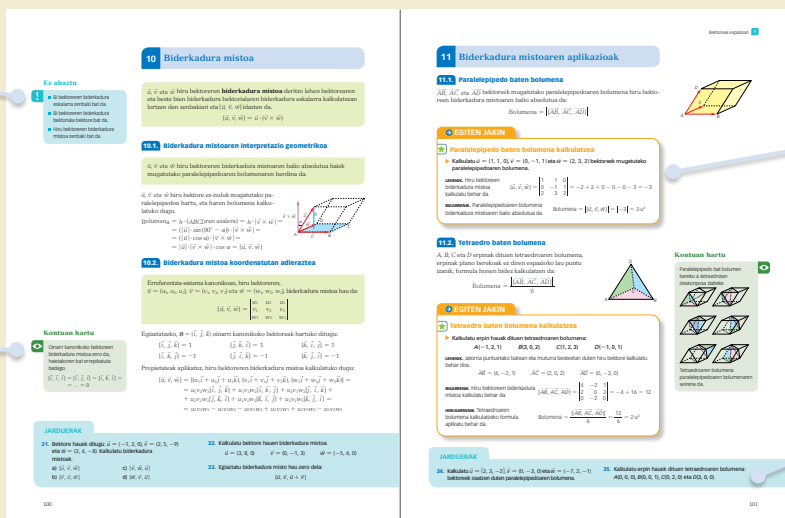


Unitate horretan, **matematika zure bizitzako** atal bat dela ikusteaz gain, unitatearen lehen orrialdeko galderari erantzuten zaio. Eta horrez gain, zenbat jarduera proposatzen dira, atal horretan ageri den eguneroko egoera gehiago sakontzeko.

Edukien orrialdeak: JAKIN eta EGITEN JAKIN osotasun moduan jorratuta.

Edukiak (**jakin** beharrek) testu argi eta egituratuetan aurkezten dira. **Adibideak** lagungarriak izango zaizkizu ikasitako edukiak finkatzeko.

Azalpen-testuen ertzetan **informazio osagarria** duzu, lauki batzuetan, lantzen diren kontzeptuak eta prozedurak hobeto ulertzeko.



Egiten jakin atalean, urratsez urrats ikasiko dituzu zure matematika-garapenerako beharrezko prozedurak.

Orrialde horietako **Jarduerak** lagungarri izango zaizkizu ikasitakoa praktikan jartzeko. Horrez gain, sekuentziatuta daudenez, menderatu egingo duzu ikasitakoa.

Egiten jakin orrialdeak: matematika ikasteko.

Orrialde hauetan, unitateko oinarrizko prozedurak azaltzen dira (**Egiten jakin**).

Prozedura bakoitza
jarduera bat ebatziz
azaltzen da.
Ebatzitako jarduera
horretan, urratsez
urrats, ebazteko
metodo orokor bat
erakusten da.

Ebatzitako jarduerak bakoitzaren ondoren, jarduerak batzuk dituzu, eduki horiek **praktikatu** eta menderatu ditzazun.

Jardueren orrialdeak: praktikatzeko eta eskuratutako ezagutzak finkatzeko.

Amaierako jarduerak sekuentziatuta daude, ahalik probetxu handiena atera diezaiezun ikasitako edukiei.

Jarduera
bakoitzaren ondoan,
zer **zailtasun** duen
adierazten da.

Jarduera horietako asko unibertsitatean sartzeko proban egin beharreko jardueren antzekoak dira.

1

Matrizeak

EDUKIAK

Matrizeak. Matrize motak

Matrize iraulia

Eragiketak matrizeekin

Matrize baten heina.

Gaussen metodoa

Alderantzizko matrizea.

Gauss-Jordanen metodoa

Ekuazio matrizialak



Ibilgailu modernoek hainbat eta hainbat sistema osagarri dituzte gidatzean segurtasuna handitzeko. Esate baterako, gurpilek ez labaintzeko sistemak, pneumatikoen presioa neurtzen duten sentsoreak, balaztatze-laguntzaileak, gauez ikusteko sistemak... Horrez gain, auto-ekoizleek gidatzea errazagoa izateko eta erosoago gidatzeko sistemak ere garatu dituzte: aparkatzen laguntzeko sistemak, argi- eta euri-sentsoreak, GPS nabigatzailea eta abar.



Azken sistema hori, hasiera batean, kamioi-flotetan erabiltzen hasi ziren, salgaiak ahalik eta denbora laburrenean

entregatu ahal izateko: helmugara arazorik gabe iristeko jarraibideak ematen ditu, eta, horrez gain, bide motari eta hartan dagoen trafikoari buruzko informazioa ere ematen du.

Hasiera batean, nabigatzailea luxuzko gaia zen; baina, orain, *smartphoneak* goraldian dauden garai hauetan, oso ohikoak bihurtu dira: unean-unean non gauden, eta leku batetik bestera joateko biderik laburrena, azkarrena edota ekologikoena zein den esaten digu, besteak beste.

Erraza eta azkarra dirudi, baina...

Nola aukeratzen du ibilbide egokia GPS nabigatzaileak?

1 Matrizak

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1. \\ \leftarrow 2. \\ \dots \\ \leftarrow m. \end{matrix} \text{ Errenkadak}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1.^a & 2.^a & 3.^a & \dots & n.^a \end{matrix} \text{ Zutabeak}$$

Honela idazten da:

Matrize bat laburtuta adierazteko, hau idazten da:

$$A = (a_{ij})$$

Dimentsioa erantsi nahi badugu, hau adieraziko dugu:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

m errenkadako eta n zutabeko matrize bat $m \times n$ zenbakiko taula bat da, m errenkadatan eta n zutabetan antolatuta.

a_{ij} zenbakiak matrizearen **elementuak** dira, eta haietan, i azpiindizeak zer errenkadatan dagoen adierazten du, eta j azpiindizeak, zer zutabetan dagoen. m errenkadako eta n zutabeko matrize baten **dimentsioa** $m \times n$ da.

ADIBIDEAK

- 1 Kalkulatu matrize honen dimentsioa eta adierazi a_{23} eta a_{32} elementuak.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A matrizeak 3 errenkada eta 4 zutabe ditu. Beraz, matrizearen dimentsioa 3×4 da. Azpiindizeak adierazten dituzten errenkadei eta zutabeei erreparatu behar diegu.

$$\begin{matrix} & a_{23} = 1 & & & a_{32} = 3 & \\ & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \\ 2. \text{ errenkada} & & 3. \text{ zutabea} & & 3. \text{ errenkada} & & 2. \text{ zutabea} \end{matrix}$$

- 2 Taula honetan, eskubaloiko bi taldek ligan zehar jokaturako partidak daude. Idatzi informazioa matrize moduan.

	Irabazitakoak	Berdindutakoak	Galdutakoak
A taldea	16	0	8
B taldea	14	1	10

Taulako informazioa 2×3 -ko matrize moduan adieraz daiteke.

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 \\ 14 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{A taldea} \\ \leftarrow \text{B taldea} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Irabazi} & \text{Berdindu} & \text{Galdu} \end{matrix}$$

$a_{11} = 16 \rightarrow$ A taldeak 16 partida irabazi ditu.

$a_{23} = 10 \rightarrow$ B taldeak 10 partida galdu ditu.

$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 24 \rightarrow$ A taldeak 24 partida jokatu ditu guztira.

$a_{21} + a_{22} = 15 \rightarrow$ B taldeak 15 partida ez galtzea lortu du.

$a_{13} + a_{23} = 18 \rightarrow$ Bi taldeen artean 18 partida galdu dituzte.

JARDUERAK

1. Hauek dira Danelek eta Manuk ebaluazio honetako Matematikako kontroletan lortutako notak:

	K1	K2	K3	K4
Danel	8	7	9	10
Manu	6	8	10	9

Egin matrize bat datu horiekin.

2. Idatzi baldintza hauek betetzen dituen 2×3 dimentsioko matrize bat:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{Baldin } i + j = 4 \\ -1 & \text{Baldin } i + j \neq 4 \end{cases}$$

3. Idatzi ezaugarri hauek dituen 4×3 dimentsioko matrize bat: a_{ij} elementuak nuluak dira, $i + j$ zenbaki lehena bada, eta 1 dira, zenbaki lehena ez bada.

1.1. Matrize berdinak

Bi **matrize berdinak dira** dimentsio bera izateaz gain, elementuak gaika berdinak badira.

A eta B berdinak dira $\rightarrow a_{ij} = b_{ij}$, i -ren eta j -ren edozein baliotarako.

Honela idazten da

$a_{ij} = b_{ij}$ bada i, j orotarako, hau esan nahi du:

$$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \dots, a_{mn} = b_{mn}$$

ADIBIDEA

3 Adierazi matrize hauek berdinak diren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A -k eta B -k ez dute dimentsio bera, $3 \times 2 \neq 2 \times 3$; eta, beraz, ez dira berdinak.

A -k eta C -k dimentsio bera dute, 3×2 ; baina $a_{11} = 1 \neq c_{11} = 2$; eta, beraz, ez dira berdinak.

1.2. Matrizeen sailkapena

■ **Errenkada-matrizea** errenkada bakarreko eta n zutabeko matrizea da. Haren dimentsioa $1 \times n$ da.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$

■ **Zutabe-matrizea** m errenkadako eta zutabe bakarreko matrizea da. Haren dimentsioa $m \times 1$ da.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

■ **Matrize nulua**, edo **zero matrizea**, elementu guztiak zero dituen matrizea da. Oren bidez adierazten da.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

■ **Matrize karratua** errenkada adina zutabe dituen matrizea da; hau da n errenkadaz eta n zutabez osatutakoa. Haren dimentsioa $n \times n$ denez, esango dugu haren **ordena** n dela.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

■ **Matrize laukizuzena** errenkada eta zutabe kopuru desberdina duen matrizea da; hau da, ez da karratua.

Kontuan hartu

Dimentsio bakoitzerako, matrize nulu bat dago.

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2 \times 1 \text{ dimentsioko matrize nulua}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \times 2 \text{ dimentsioko matrize nulua}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ ordenako matrize nulua}$$

ADIBIDEA

4 Sailkatu matrize hauek: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A matrize karratua da, 2 ordenakoa.

B zutabe-matrizea da 2×1 dimentsiokoa.

C errenkada-matrize nulua da, 1×3 dimentsiokoa.

JARDUERAK

4. Kalkulatu zer balio izan behar duten a, b, c eta d elementuek, matrize hauek berdinak izan daitezen.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 & 2 \\ c-2 & 3-a & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & b+1 & d-1 \\ 2c & 1 & b+2 \end{pmatrix}$$

5. Idatzi 3 ordenako matrize karratu bat, elementuak berdintza honek determinatuta dituena.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Baldin } i = j \\ 1 & \text{Baldin } i \neq j \end{cases}$$

1.3. Matrizen karratu motak

Matrizen karratu baten **diagonal nagusia** a_{ii} formako elementu guztiek osatzen dute.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal nagusia

Matrizen karratu baten elementuak nolakoak, honelakoak izan daitezke matrizea:

- **Matrizen goi-triangeluarra**
Diagonal nagusiaren azpiko elementu guztiak zero dira.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrizen behe-triangeluarra**
Diagonal nagusiaren gaineko elementu guztiak zero dira.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrizen diagonalak**
Diagonal nagusitik kanpoko elementu guztiak zero dira.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Identitate-matrizea** edo **unitate-matrizea**
Diagonal nagusiko elementu guztiak 1 dira. I izendatzen da.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ez ahaztu



Ordena bakoitzeko identitate-matrize bat dago.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{2 ordenako identitate-matrizea}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{3 ordenako identitate-matrizea}$$

ADIBIDEA

- 5 Esan zer motatakoa den matrize karratu hauetako bakoitza.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Matrizen diagonalak

Identitate-matrizea

Behe-triangeluarra

Goi-triangeluarra

JARDUERAK

6. Idatzi baldintza hau betetzen duen 3 ordenako matrizea:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{Baldin } i \leq j \\ 0 & \text{Baldin } i > j \end{cases}. \text{ Zer matrize mota da?}$$

7. Idatzi elementu guztien batura 7 duen 3 ordenako matrize diagonal bat.

8. Idatzi elementu nulu bakarrak diagonal nagusian dituen matrize bat.

9. Idatzi baldintza hau betetzen duen 3 ordenako matrizea:

$$a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{Baldin } i \geq j \\ 0 & \text{Baldin } i < j \end{cases}. \text{ Zer matrize mota da?}$$

2 Matrize iraulia

$m \times n$ dimentsioko A matrize baten **matrize iraulia**, A^i , beste matrize bat da, $n \times m$ dimentsiokoa, eta honela lortzen da: A matrizean errenkadak zutabeez ordezkaturik edo zutabeak errenkadez ordezkaturik.

$$\text{Baldin } A = (a_{ij}), \text{ orduan } A^i = (a_{ji}).$$

Kontuan hartu

Matrize bat karratua bada soilik du dimentsio bera matrize irauli batek.



ADIBIDEA

- 6 Adierazi $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen matrize iraulia eta haren dimentsioa.
- $$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^i \text{ matrizearen dimentsioa } 3 \times 2 \text{ da.}$$

Matrize simetrikoak eta antisimetrikoak

A matrize karratu bat **simetrikoa** da, matrize irauliarekin bat badator.

$$A = A^i \rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

Eta **antisimetrikoa** da haren aurkakoa, $-A$, matrize irauliarekin bat badator.

$$-A = A^i \rightarrow -a_{ij} = a_{ji}$$

Kontuan hartu

Matrize karratuak soilik izan daitezke simetrikoak edo antisimetrikoak.



ADIBIDEA

- 7 Adierazi matrize hauek simetrikoak edo antisimetrikoak diren.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = A \rightarrow A$ matrize simetrikoa da.

b) B matrizea ez da karratua; eta, beraz, ezin da ez simetrikoa ez antisimetrikoa izan.

c) $C^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -C \rightarrow C$ matrize antisimetrikoa da.

Propietateak

- Matrize simetriko batean, diagonal nagusiarekiko simetrikoak diren elementuak berdinak dira.
- Matrize antisimetriko batean, diagonal nagusiko elementuak zero dira, eta harekiko simetrikoak diren elementuak aurkakokoak dira.

$$A = \begin{pmatrix} a & m & n \\ m & b & v \\ n & v & c \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & n \\ -m & 0 & v \\ -n & -v & 0 \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

10. Idatzi matrize honen matrize iraulia.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Egiaztatu $a_{ij} = i + j$ betetzen duen matrize karratua matrize simetrikoa dela. Idatzi ezaugarri horiek dituen 3 ordenako matrize bat.

3 Eragiketak matrizeekin

3.1. Matrizeen arteko batuketa

Ez ahaztu



Bi matrizeren arteko batuketa egiteko, dimentsio bera izan behar dute.

Dimentsio bereko A eta B bi matrizeren arteko batuketa, $A + B$, dimentsio bereko beste matrize bat da, eta haren elementuak posizio bereko A eta B matrizeetako elementuen arteko batura dira.

$$A + B = C, \text{ non } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

ADIBIDEA

8 Batu, ahal bada, matrize hauek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ez A eta B , ez B eta C ez dira dimentsio berekoak; beraz, ezin dira batu.

A eta C matrizeek ez dute dimentsio bera.

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+5 \\ 3+(-1) & -3+(-4) \\ 0+2 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propietateak

Matrizeen batuketa elementuz elementu egiten denez, zenbaki errealeen arteko batuketaren antzeko propietateak ditu.

- **Trukatze-propietatea:** $A + B = B + A$
- **Elkartze-propietatea:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Elementu neutroa:** batuketaren elementu neutroa matrize nulua da.
 $A + 0 = A$
- **Aurkako elementua:** A matrize bakoitzak aurkako matrizea du, $-A$, A matrizearen elementuen aurkakoei osatutakoa.
 $A + (-A) = 0$

ADIBIDEA

9 Adierazi $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizko matrizea, $-A$, eta egiaztatu bi matrizeen arteko batura matrize nulua dela.

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontuan hartu



Bi matrizeren arteko kenketa egiteko, lehenengoari bigarrenaren alderantzizkoa batu behar zaio.

$$A - B = A + (-B)$$

JARDUERAK

12. Egin matrizeen arteko eragiketa hau:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

13. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ da eta $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kalkulatu $A + A^i - I$.

14. Kalkulatu a, b, c, d eta e elementuen balioa, hau betetzeko:
 $A = B + C$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 7 & 8+d \\ a & 9 & c+9 & e+2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix}$$

3.2. Matrize baten eta zenbaki baten arteko biderketa

k zenbaki erreal bat A matrize batez biderkatzean beste matrize bat lortzen da, A matrizearen dimentsio berekoa, eta haren elementuak A -ko elementuak k -z biderkatuz lortzen dira.

$$k \cdot A = C, \text{ non } c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

ADIBIDEA

10 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu:

a) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

b) $(-1) \cdot A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Kontuan hartu

Matrize bat diagonala bada eta diagonaleko elementu guztiak berdinak badira, biderkagai komuna atera dezakegu.

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot I$$



3.3. Errenkada-matrize baten eta zutabe-matrize baten biderketa

$1 \times n$ dimentsioko **errenkada-matrize** bat $n \times 1$ dimentsioko **zutabe-matrize** batez biderkatzearen emaitza matrizeko elementuak banan-banan biderkatzearen eta emaitzak batzearen batura da.

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

ADIBIDEA

11 Adierazi honako matrize hauen arteko $A \cdot B$, $C \cdot A$ eta $C \cdot B$ biderketak egin daitezkeen.

$$A = (6 \quad 2 \quad 1) \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 4)$$

A matrizea 1×3 dimentsioko errenkada-matrizea da; B matrizea 3×1 dimentsioko zutabe-matrizea da. Beraz, haien arteko biderketa egin daiteke.

$$A \cdot B = (6 \quad 2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 17$$

C matrizea 1×4 dimentsioko errenkada-matrizea da. Beraz, 4×1 dimentsioko matrize batez soilik biderka daiteke. Ezin da ez A -z ez B -z biderkatu.

Ez ahaztu

Errenkada-matrize bat zutabe-matrize batez biderkatzeko, ezinbestekoa da lehenengoaren zutabe kopurua bigarrenaren errenkada kopuruarekin bat etortzea.



JARDUERAK

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu:

a) $3A - B + 2C$

b) $2C + B - 3A$

16. $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ditugu. Posible bada, kalkulatu:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $2A \cdot 3B$

d) $(-2B) \cdot A$

Ez ahaztu



- Bi matrize biderkatzeko, lehenengoaren zutabe kopuruak eta bigarrenaren errenkada kopuruak bat etorri behar dute.
- Biderkadura-matrizeak lehenengoaren errenkada kopurua eta bigarrenaren zutabe kopurua ditu.

3.4. Bi matrizeren arteko biderketa

$m \times n$ dimentsioko A matrizearen eta $n \times p$ dimentsioko B matrizearen arteko biderkadura beste C matrize bat da, $m \times p$ dimentsiokoa. Matrize horren c_{ij} elementua honela lortzen da: lehenengo matrizearen i . errenkada bigarren matrizearen j . zutabeaz biderkatuz.

$$A \cdot B = C, \text{ non } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

→ EGITEN JAKIN



Bi matrizeren arteko biderkadura kalkulatzea

- Kalkulatu matrize hauen $A \cdot B$ biderketaren emaitza.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

LEHENIK. Biderkatu daitezkeen ala ez aztertu behar da: lehenengoaren zutabe kopuruak bat etorri behar du bigarrenaren errenkada kopuruarekin.

A-ren dimentsioa: 2×3

B-ren dimentsioa: 3×2

A-ren zutabe kopurua bat dator B-ren errenkada kopuruarekin, eta, beraz, egin daiteke matrizeen arteko biderketa.

$A \cdot B$ matrizeak A-ren errenkada kopurua eta B-ren zutabe kopurua izango ditu.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. A matrizearen lehenengo errenkada B matrizearen lehenengo zutabeaz biderkatu behar da, biderkadura-matrizearen lehengo elementua lortzeko.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. A matrizearen lehenengo errenkada B matrizearen gainerako zutabeez biderkatu behar da.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

LAUGARRENIK. Gauza bera egin behar da lehenengo matrizearen gainerako errenkadekin eta bigarrenaren zutabeekin.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Kontuan hartu



Hiru matrizeren arteko biderketa egiteko, $A \cdot B \cdot C$, honelako dimentsioak izan behar dituzte:

A-ren dimentsioa: $m \times n$

B-ren dimentsioa: $n \times p$

C-ren dimentsioa: $p \times q$

$A \cdot B \cdot C$ matrizearen dimentsioa hau izango da: $m \times q$.

JARDUERAK

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ditugu. Kalkulatu:

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A^i \cdot B$

18. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ ditugu. Kalkulatu $A \cdot B \cdot C$ matrizea.

ADIBIDEA

- 12 Jatetxe batean hiru menu mota dituzte: eguneko menua, exekutiboentzako menua eta menu berezia. Taula hauetan astean menu bakoitza egiteko erosten den haragi, arrain eta barazki kantitatea dago adierazita, bai eta produktu bakoitzak azken bi asteetan izandako prezioa ere.

	Haragia	Arraina	Barazkia		1. astea	2. astea
Egunekoa	6	14	12	Haragia	12,50	10,60
Exekutiboa	8	18	13	Arraina	16	11,90
Berezia	12	26	15	Barazkia	6,20	8,40

Kalkulatu menuak astean izan duten kostua.

Problema ebazteko, taula bakoitza matrize moduan hartu eta biderkatu egingo ditugu.

$$\begin{pmatrix} 6 & 14 & 12 \\ 8 & 18 & 13 \\ 12 & 26 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12,5 & 10,6 \\ 16 & 11,9 \\ 6,2 & 8,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 373,4 & 331 \\ 468,6 & 408,2 \\ 659 & 562,6 \end{pmatrix}$$

1. astea 2. astea

← Eguneko menua
← Exekutiboentzako menua
← Menu berezia

Menuak egitea merkeagoa izan da bigarren astean.

Propietateak

A , B eta C matrizeen dimentsioek biderketa egiteko aukera ematen badute, propietate hauek ditu biderketak:

- **Elkartze-propietatea.** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- **Elementu neutroa.** $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
- **Banatze-propietatea.** Ezkerretik: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Eskuinetik: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

Oro har, matrizeen biderketak ez du trukatzeko propietatea betetzen: $A \cdot B \neq B \cdot A$

ADIBIDEA

- 13 Adierazi ea egin daitekeen matrize hauen arteko biderketa eta aztertu ea trukatzeko propietatea betetzen duen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A matrizearen dimentsioa 2×3 eta B matrizearena 2×2 direnez, biderketak ezin du trukatzeko propietatea bete, ezin dugulako $A \cdot B$ biderketa egin, baina bai $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -19 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Honela idazten da:

$A \cdot B \rightarrow$ A-k ezkerretik biderkatzen du B.

$B \cdot A \rightarrow$ A-k eskuinetik biderkatzen du B.

A eta B bi matrize **trukagarriak** dira (edo elkar trukutzen dute), baldin $A \cdot B = B \cdot A$.



JARDUERAK

19. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ditugu.

- Aztertu ea A eta B matrizeek trukatzeko propietatea betetzen duten.
- Egiaztatu banatze-propietatea betetzen dela: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

20. Letoia kobreak eta zinkaren aleazioa da. LETOIAK, SL-k hiru motatako letoiak erabiltzen ditu: A, %30 zink duena; B, %40 zink duena; eta C, %50 zink duena. Bi hornitzaile ditu: M, kobreak 6,50 €/an eta zink-kiloa 1,50 €/an saltzen duena; eta N, kobreak 6,70 €/an eta zink-kiloa 1,10 €/an saltzen duena. A motako 100 tona letoi, B motako 550 eta C motako 50 ekoizteko, zein hornitzaile erosi beharko lioke materiala?

4 Matrizen baten heina

4.1. Matrizen baten errenkadaren konbinazio linealak

Matrizen baten E_i errenkada ez-nulua **linealki mendekoa** da $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_m}$ errenkadekiko, hau betetzen bada:

$$E_i = k_1 E_{j_1} + k_2 E_{j_2} + \dots + k_m E_{j_m}$$

Matrizen baten errenkada bat **linealki independentea** da, matrizen beste errenkada batzuekiko linealki mendekoa ez bada.

Ez ahaztu



Errenkadei dagokienez egin ditugun definizio berberak egin ditzakegu zutabeei dagokienez.

- Matrizen baten Z_i zutabe ez-nulua **linealki mendekoa** da $Z_{j_1}, Z_{j_2}, \dots, Z_{j_m}$ zutabeei, hau betetzen bada:

$$Z_i = k_1 Z_{j_1} + k_2 Z_{j_2} + \dots + k_m Z_{j_m}$$

- Matrizen baten zutabe bat **linealki independentea** da, matrizen beste errenkada batzuekiko linealki mendekoa ez bada.

ADIBIDEA

- 14 Adierazi matrizen honen errenkada linealki independenteak.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Lehenengo errenkada, E_1 , linealki independentea da E_2 bigarren errenkadekiko, baldin $E_1 = kE_2$; hau da, E_1 errenkadako elementuek E_2 errenkadako elementuen multiploak izan behar dute. Hala ez denez, A matrizen errenkadak linealki independenteak dira.

4.2. Matrizen baten heina

A matrizen baten heina, heina (A), matrizen baten errenkada edo zutabe ez-nulu linealki independenteen kopurua da.

Errenkadakako heina beti da zutabekako heinaren berdina.

ADIBIDEA

- 15 Adierazi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & -10 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ matrizen heina.

E_1 errenkada ez da E_2 -rekiko ez E_3 -rekiko linealki mendekoa, eta E_2 eta E_3 ere ez.

E_1 errenkada E_2 eta E_3 -rekiko linealki mendekoa den aztertu behar dugu; hau da, $E_1 = k_1 E_2 + k_2 E_3$ den. Errenkaden bi lehenengo elementuak hartuta, hau dugu:

$$\begin{cases} a_{11} = k_1 a_{21} + k_2 a_{31} \\ a_{12} = k_1 a_{22} + k_2 a_{32} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = 3k_1 + 8k_2 \\ 0 = -5k_1 + (-10)k_2 \end{cases} \rightarrow k_1 = -2 \quad k_2 = 1$$

Aztertu behar da gainerako berdintzak bete egiten direla k_1 eta k_2 balio horiekiko.

$$a_{13} = k_1 a_{23} + k_2 a_{33} \rightarrow 3 = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 7$$

$$a_{14} = k_1 a_{24} + k_2 a_{34} \rightarrow -4 = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$$

Beraz, $E_1 = -2E_2 + E_3$; hau da, E_1 errenkada E_2 eta E_3 -ren linealki mendekoa da.

E_2 eta E_3 linealki independenteak dira, eta E_1 , berriz, E_2 eta E_3 -ren mendekoa $\rightarrow$ heina (A) = 2.

Kontuan hartu



Errenkadakako heina zutabekako heinaren berdina denez beti, A matrizen batek eta haren irauliak, A^t -k, hein bera dute.

JARDUERAK

21. Adierazi matrizen hauen heina:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

22. Kalkulatu A , B eta $A \cdot B^t$ matrizen heina.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

4.3. Gaussen metodoa

Honetan datza matrize baten heina kalkulatzeko **Gausen metodoa** erabiltzea: hasierako matrizea diagonalaren azpiko elementuak zero dituen matrize bihurtzean, egoki diren oinarritzko transformazioak eginez. Matrizearen heina lortutako matrize trianguluarraren errenkada ez-nuluen kopurua izango da.

Oinarritzko transformazio hauek egin daitezke matrizean:

- i errenkada j errenkadarekin trukatzeta. Honela idatziko dugu transformazio hori: $E_i \leftrightarrow E_j$.
- i errenkada haren elementu guztiak zero ez den a zenbaki batez biderkatzearen edo zatitzearen emaitzaz ordezteta. $E_i = aE_i$ idatziko dugu.
- i errenkada edo j errenkada bien baturaz ordezteta, nuluak ez diren a eta b zenbakiez biderkatuz. Honela idatziko dugu: $E_i = aE_i + bE_j$.

→ EGITEN JAKIN

★ Matrize baten heina kalkulatzeta Gaussen metodoaren bidez

► Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

LEHENIK. $a_{11} = 0$ bada, lehenengo errenkada lehenengo elementua zero ez duen errenkadaren batekin trukatu behar da, baldin badago. Eragiketak egin behar dira errenkada guztietan, lehenengoan izan ezik, haietako lehenengo elementuak zero izan daitezen.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bigarren errenkadako lehen elementua zero da. Hirugarren errenkadako lehenengo elementua zero egin behar da.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. Egiaztatu behar da $a_{22} \neq 0$ dela. Ez baldin bada, errenkada hori bigarren elementua zero ez duen errenkadaren batekin trukatu behar da, baldin badago. Aurreko urratsean bezala, zero egin behar ditugu errenkada guztietako bigarren elementuak, lehenengokoa eta bigarrenekoa izan ezik.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 = 2E_3 - E_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Prozesu bera egin behar da hasierako matrizearen gainerako errenkadekin, diagonalaren azpiko elementu guztiak zero dituen matrize bat lortu arte. Matrizearen errenkada ez-nuluen kopurua da matrizearen heina. Kasu honetan, bi: $\rightarrow$ heina $(A) = 2$.

Kontuan hartu

Matrize baten heina eta haren matrize irauliarena berdinak direnez, matrizeak errenkada gehiago baditu zutabe baino, laburragoa izango da matrize irauliaren heina kalkulatzeta.

$$\begin{aligned} \text{Heina} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} &= \\ &= \text{Heina} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



JARDUERAK

23. Kalkulatu, Gaussen metodoa erabiliz, A eta B matrizeen heina.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

24. Kalkulatu $A^i \cdot B - C^j$ matrizearen heina, m parametroaren mende.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & m \end{pmatrix}$$

5 Alderantzizko matrizea

Kontuan hartu



Matrize bat karratua ez bada, ez dauka alderantzizko matrizerik.

n ordenako A matrize karratu baten **alderantzizko matrizea** beste matrize bat da, A^{-1} , jatorrizkoaren ordena berekoa eta hau betetzen duena:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad A^{-1} \cdot A = I_n$$

n ordenako matrizea da I_n identitate-matrizea.

Alderantzizko matrizea duten matrizeei **matrize erregularrak** edo **alderantzikagarriak** deritze, eta ez dutenei, **matrize bereziak**.

ADIBIDEA

16 Adierazi matrize hauetakoren bat $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa den.

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 13 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- a) B matrizea ezin da alderantzizko matrizea izan, ez delako karratua.
- b) C matrizea ezin da A -ren alderantzizko matrizea izan, ordena desberdinak dituztelako.
- c) D matrizea karratua da eta A -ren ordena bera du. A -ren alderantzizkoa den aztertu behar da.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beraz, D matrizea A matrizearen alderantzizkoa da, $A \cdot D = I$ baita.

Honela idazten da



Matrize bat **alderantzikagarria** da, alderantzizko matrizea badu.

Matrize karratuak soilik izan dezakete alderantzizko matrizea; baina matrize karratu guztiek ez dute alderantzizkoa.

n ordenako A matrize karratuak alderantzizkoa du, baldin heina (A) = n bada.

Propietateak

- Alderantzizko matrizearen alderantzizkoa jatorrizko matrizea da.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- Bi matrizeren biderkaduraren alderantzizkoa matrizeen alderantzizkoak ordena aldatuta biderkatzearen emaitza da.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- Matrize baten irauliaren alderantzizkoa alderantzizko matrizearen irauliaren berdina da.

$$(A^i)^{-1} = (A^{-1})^i$$

JARDUERAK

25. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu.

- a) Kalkulatu A^{-1} , definizioa baliatuz.
- b) Egiaztatu $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ dela.

26. Egiaztatu $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ matrizea alderantzikagarria dela.

27. Egiaztatu matrizea bera dela $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa.

Gauss-Jordanen metodoa

Alderantzizko matrizea kalkulatzeko **Gauss-Jordanen metodoa** honetan datza: hasierako matrizea identitate-matrize bihurtzean, oinarritzko transformazioak eginez. Identitate-matrizean transformazio berak aplikatuz, alderantzizko matrizea lortuko dugu.

EGITEN JAKIN

★ Alderantzizko matrizea kalkulatzeko, Gauss-Jordanen metodoaz

► Kalkulatu, ahal bada, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizko matrizea.

LEHENIK. A matrizea eta A-ren ordena bereko identitate-matrizea idatzi behar dira, lerro batez bereizita. $a_{11} = 0$ bada, lehenengo errenkada lehenengo elementua zero ez duen errenkada batekin trukatu behar da.

$a_{11} = 2 \neq 0$ denez, ez dugu errenkadarik trukatu.

BIGARRENIK. Eragiketak egin behar dira errenkada guztietan, lehenengoan izan ezik, errenkadetako lehenengo elementua zero izateko.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 = E_3 + 3E_1]{E_2 = E_2 - 2E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

HIRUGARRENIK. Egiaztatu behar da $a_{22} \neq 0$ dela. Bestela, errenkada hori bigarren elementua zero ez duen ondorengo errenkada batez ordezkatu behar da. Eragiketak egingo dira, errenkada bakoitzeko bigarren elementuak, bigarrenekoa izan ezik, zero egiteko.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 = E_3 + E_2]{E_1 = E_1 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

LAUGARRENIK. Prozesu bera egin behar da hasierako matrizearen gainerako errenkadekin.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_2 = E_2 - 5E_3]{E_1 = E_1 + 7E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

BOSGARRENIK. Errenkada bakoitza diagonalean duen elementuaz zatitu behar da.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 = -E_3]{F_1 = \frac{1}{2}F_1, E_2 = -E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

SEIGARRENIK. Lerroaren eskuineko elementuek hasierako matrizearen alderantzizkoa osatzen dute.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Gogoratu

Alderantzizko matrizea kalkulatzeko egin daitezkeen oinarritzko eragiketak matrize baten heina kalkulatzeko egin daitezkeen berberak dira.

- i errenkada j errenkadarekin trukatzeko.

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

- i errenkada haren elementu guztiak zero ez den a zenbaki batez biderkatzearen edo zatitzearen emaitzaz ordezkatzeko.

$$E_i = aE_i$$

- i errenkada edo j errenkada bien baturaz ordezkatzeko, nuluak ez diren a eta b zenbakiez biderkatuz.

$$E_i = aE_i + bE_j$$

Honela idazten da

Gauss-Jordanen metodoan hasierako matrizea eta identitate-matrizea adierazteko, hau idazten da:

$$(A \mid I_n)$$

Metodo hori erabiltzean, transformazio hau egiten dugu:

$$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$$

JARDUERAK

28. Kalkulatu, Gauss-Jordanen metodoa erabiliz, matrize hauen alderantzizkoa, eta egiaztatu emaitzako matrizeak benetan direla jatorrizkoaren alderantzizkoak.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

29. Kalkulatu, Gauss-Jordanen metodoa erabiliz, matrize hauen alderantzizkoa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Ekuazio matrizialak

Ekuazio matrizialak gai guztiak matrizeak dituzten ekuazioak dira. Ekuazio matrizialak ebazteko, matrize ezezaguna bakandu behar da, matrizeen arteko eragiketak eginez.

→ EGITEN JAKIN

★ $AX = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea

► $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Ebatzi $AX = B$ ekuazioa.

LEHENIK. X bakandu behar da, A^{-1} ezkerretik biderkatuz.

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \xrightarrow{A^{-1} \cdot A = I} IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

BIGARRENIK. A^{-1} kalkulatu behar da.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 = E_1 - E_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ E_2 = -E_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Ekuazioa ebatzi behar da.

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gogoratu



Matrizeen arteko biderketak ez du trukatzeko-propietatea betetzen, eta, beraz, ez da gauza bera A^{-1} eskuinetik biderkatzea eta ezkerretik biderkatzea.

$$A^{-1}B \neq BA^{-1}$$

→ EGITEN JAKIN

★ $XA = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea

► $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Ebatzi $XA = B$ ekuazioa.

LEHENIK. X bakandu behar da, A^{-1} eskuinetik biderkatuz.

$$XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \xrightarrow{A \cdot A^{-1} = I} XI = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

BIGARRENIK. A^{-1} kalkulatu eta ekuazioa ebatzi behar da.

A^{-1} aurreko ataleko berbera da.

$$X = BA^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

30. A eta B emanda, kalkulatu X matrizea, $A \cdot X = B$ izateko.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

31. A eta B matrizeak ditugu. Ebatzi $X \cdot A = B$ ekuazioa.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EGITEN JAKIN

★ $AX + B = C$ motako ekuazio matrizialak ebaztea

- Ebatzi $AX + 3B = C$ ekuazioa A , B eta C matrizeak hartuta. Hona hemen matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

LEHENIK. Lehendabizi X matrizea bakandu behar da.

$$\begin{aligned} AX + 3B &= C \rightarrow AX = C - 3B \\ \rightarrow A^{-1}AX &= A^{-1}(C - 3B) \xrightarrow{A^{-1} \cdot A = I} X = A^{-1}(C - 3B) \end{aligned}$$

BIGARRENIK. A^{-1} matrizea bakandu behar da.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_2 = E_2 + E_1 \\ E_3 = E_3 - 2E_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 = E_1 + E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{E_1 = E_1 + E_3 \\ E_2 = E_2 + 2E_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 = -E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Ekuazioa ebatzi behar da.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

- 32.** Ebatzi, matrizeen bidez, $A^i \cdot X - B = 0$ ekuazioa. Hauek dira A eta B matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 33.** Zehaztu $X \cdot A + A = 2A^2 X$ ekuazioa betetzen duen matrize bat, jakinda A matrizea hau dela:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$



Eragiketak matrizeekin

Baldintza jakin bat betetzen duten matrizeak zehaztea

Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearekin trukagarriak diren matrize diagonal guztiak.

LEHENIK. Eskatutako baldintza betetzen duten matrize motak zehaztu behar dira.

B matrizeek baldintza hauek bete behar dituzte:

- Matrize diagonalak izatea.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

- A matrizearekin trukagarriak izatea.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

BIGARRENIK. Problema baldintzak ezarri behar dira.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Matrizeak berdindu egin behar dira, elementuz elementu, eta lortutako ekuazio-sistema ebatzi behar da.

$$\begin{cases} 2a_{11} = 2a_{11} \\ a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Lehenengo ekuazioa eta laugarrena kendu egin daitezke, berdintzak dira eta.

Bigarren eta hirugarren ekuazioetatik hau lortzen da:

$$\begin{cases} a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \end{cases} \rightarrow a_{11} = a_{22}$$

Baldintza bakarra da diagonaleko elementuek berdinak izan behar dutela ($a_{11} = a_{22}$).

Beraz, eskatutako baldintzak betetzen dituzten matrizeak mota honetakoak dira:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{non } k \in \mathbb{R}$$

PRAKTIKATU

34. Zehaztu baldintza hauek betetzen dituzten 2 ordenako A eta B matrize karratuak:

- Haien batura 2 ordenako identitate-matrizea da: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- A matrizea ken B matrizea egitean, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrizearen iraulia lortzen da.

Eragiketak matrizeekin

Matrizeen arteko berdintza betetzea eragiten duten konstanteak kalkulatzeko

Kalkulatu m eta n koefizienteen balioa, $mA^2 + nA^t = 2I$ berdintza bete dadin, kontuan izanda I identitate-matrizea dela eta $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

LEHENIK. Berdintzaren lehen eta bigarren ataletako eragiketak egin behar dira.

$$\begin{aligned} mA^2 &= m \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= m \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} \\ nA^t &= n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix} \\ 2I &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

BIGARRENIK. Probleman ezartzen den baldintza aplikatu behar da.

$$\begin{aligned} mA^2 + nA^t &= 2I \\ \begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} n & -2m+n \\ 2m-n & n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

HIRUGARRENIK. Matrizeak berdindu behar dira, elementuz elementu, eta lortutako ekuazio-sistema ebatzi behar da.

$$\begin{cases} n = 2 \\ -2m + n = 0 \\ 2m - n = 0 \\ n = 2 \end{cases} \xrightarrow{n=2} \begin{cases} -2m + 2 = 0 \\ 2m - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow m = 1$$

Laugarren ekuazioa kendu behar da, lehenengoaren berdina baita.

Lehenengo bi ekuazioetatik $m = 1$ eta $n = 2$ soluzioa ateratzen da.

Soluzio hori gainerako ekuazioetan baliozkoa den aztertu behar da. Ez bada, sistemak ez luke soluziorik izango eta, beraz, ezta problemak ere.

$$2m - n = 0 \xrightarrow{m=1, n=2} 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

Soluzioa baliozkoa da; beraz, $m = 1$ eta $n = 2$.

PRAKTIKATU

35. Kalkulatu α eta β balioak, $A^3 = \alpha A + \beta I$ izateko.

$$\text{Hau da } A \text{ matrizea: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Hau da } I \text{ matrizea: } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eragiketak matrizeekin

Matrize baten berretura kalkulatzea

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrizea daukagu. Kalkulatu } A^{101}.$$

LEHENIK. $A^2, A^3, A^4 \dots$ kalkulatu behar dira.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$
 $A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2$
 $A^6 = A^5 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = I$
 $A^7 = A^6 \cdot A = I \cdot A = A$
 $A^8 = A^7 \cdot A = A \cdot A = A^2$
 $A^9 = A^8 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = I$
 $\dots$

BIGARRENIK. Arau orokor bat ondorioztatu behar da, berretzailea matrizeko elementuekin erlazionatzen duena.

- Berretzailea 3ren multiploa bada $\rightarrow A^{3n} = I$
- Berretzailea $3n + 1$ formakoa bada $\rightarrow A^{3n+1} = A$
- Berretzailea $3n + 2$ formakoa bada $\rightarrow A^{3n+2} = A^2$

HIRUGARRENIK. Arau orokorra aplikatu behar da, eskatutako berretura kalkulatzeko.

$101 = 3 \cdot 33 + 2$ denez, hau da, $3n + 2$ formakoa:

$$A^{101} = A^{3 \cdot 33 + 2} = A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PRAKTIKATU

36. Matrize hau dugu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kalkulatu A^{101} .

Eragiketak matrizeekin

Matrize batzuen propietateak egiaztatzea

Bi errenkadako eta bi zutabeko M matrize bat dugu, $M^2 = M$ berdintza betetzen duena. Egiaztatu, arrazoituz, $P = I - M$ matrizeak $P^2 = P$ betetzen duela.

LEHENIK. Berdintzan adierazten diren eragiketak egin behar dira.

$$P^2 = (I - M)^2 = (I - M) \cdot (I - M) = I^2 - IM - MI + M^2 = I - 2M + M^2$$

BIGARRENIK. Enuntziatutako baldintzak emaitzan aplikatu behar dira.

$$M^2 = M \rightarrow P^2 = I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$$

PRAKTIKATU

37. Bi errenkadako eta bi zutabeko M matrize bat dugu, $M^2 = M$ berdintza betetzen duena. Egiaztatu, arrazoituz, $P = I - M$ matrizeak $PM = MP = 0$ betetzen duela, 0 matrizea 2 ordenako matrize nulua izanda.



Eragiketak matrizeekin

Problemak ebaztea matrizeak erabiliz

Matrize honetan jabetxe bati bi enpresak, E_1 -k eta E_2 -k, hiru produktu, P_1 , P_2 eta P_3 , aleko zer preziotan (eurotan) eskaintzen dizkioten azaltzen da.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrize-eragiketak erabiliz, kalkulatu zer enpresari egingo zeniokkeen eskabide hauetako bakoitza:

- a) P_1 produktuaren 8 ale, P_2 produktuaren 5 ale, eta P_3 produktuaren 12 ale.
 b) P_1 produktuaren 10 ale, P_2 produktuaren 15 ale, eta P_3 produktuaren 7 ale.

LEHENIK. Matrizeek ematen duten informazioa interpretatu behar da.

Enpresak → E_1 E_2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} P_1 \text{ produktuaren prezioa enpresa bakoitzean} \\ P_2 \text{ produktuaren prezioa enpresa bakoitzean} \\ P_3 \text{ produktuaren prezioa enpresa bakoitzean} \end{matrix}$$

- a) $B = (8 \ 5 \ 12) \rightarrow$ Produktu bakoitzetik eskatutako aleak
 b) $C = (10 \ 15 \ 7) \rightarrow$ Produktu bakoitzetik eskatutako aleak

BIGARRENIK. Problema ebazteko eragiketak egin eta soluzioa interpretatu behar da.

$$a) \ B \cdot A = (8 \ 5 \ 12) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181 & 164 \end{pmatrix}$$

Eskabidearen guztizko prezioa E_1 -en
 Eskabidearen guztizko prezioa E_2 -n

Eskabidea merkeagoa izango da E_2 enpresan.

$$b) \ C \cdot A = (10 \ 15 \ 7) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 198 & 219 \end{pmatrix}$$

Eskabidearen guztizko prezioa E_1 -en
 Eskabidearen guztizko prezioa E_2 -n

Eskabidea merkeagoa izango da E_1 enpresan.

PRAKTIKATU

38. Matrize honetan, E_1 , E_2 eta E_3 enpresetatik datozen A , B , C eta D lau salgairen prezioak daude adierazita, eurotan.

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 46 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Eskabide bat $C = (x \ y \ z \ t)$ matrize-errenkada batek adierazten badu, zer adierazten du CP biderketaren emaitzako elementuetako bakoitzak? A produktuaren 25 ale, B produktuaren 30, C produktuaren 60 eta D produktuaren 75 ale erosi nahi badugu, zer enpresak eskaintzen du preziorik onena?

Matrize iraulia

Elementuak zehaztea, matrize bat ortogonalak izan dadin

A matrize karratu bat ortogonalak dela esaten da, hau betetzen bada: $A^t \cdot A = I$. Berdintza horretan, I identitate-matrizea da, eta A^t , berriz, **A** matrizearen iraulia.

Kalkulatu a -ren eta b -ren balioak $A = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$

matrizea ortogonalak izan dadin.

LEHENIK. Matrizea ortogonalak izateko baldintzak ezarri behar dira.

$$A^t \cdot A = I \rightarrow \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & b \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & ab \\ 0 & 2a^2 + b^2 & -ab - b \\ ab & -ab - b & b^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. Matrizeak berdindu egin behar dira, elementuz elementu, eta identitateak eta errepikatutako ekuazioak kendu.

$$\begin{matrix} 2a^2 = 1 & 0 = 0 & 0 = 0 \\ 0 = 0 & 2a^2 + b^2 = 1 & -ab - b = 0 \\ ab = 0 & -ab - b = 0 & b^2 + 1 = 1 \end{matrix}$$

HIRUGARRENIK. Lortutako ekuazio-sistema ebatzi egin behar da. Lehenengo ekuazioetatik a -ren eta b -ren balioak lortuko ditugu.

$$2a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ab = 0 \xrightarrow{a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}} b = 0$$

Lehenengo eta hirugarren ekuaziotik $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 0$ eta $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 0$ soluzioak lortzen dira.

Soluzioa gainerako ekuazioetarako baliozkoa den egiaztatu behar da. Ez bada, sistemak ez luke soluziorik izango.

$$2a^2 + b^2 = 1 \rightarrow 2 \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 = 1 \rightarrow 2 \cdot \frac{2}{4} = 1$$

$$-ab - b = 0 \rightarrow -\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 0 - 0 = 0$$

$$b^2 + 1 = 1 \rightarrow 0^2 + 1 = 1$$

Soluzioak baliozkoak dira; beraz,

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = 0 \text{ eta } a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b = 0.$$

PRAKTIKATU

39. Kalkulatu baldintza betetzen duten $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ formako matrizeak.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrize baten heina

Parametro baten mende dagoen matrize baten heina kalkulatzeko

Eztabaidatu, $m \in \mathbb{R}$ parametroaren mende, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

LEHENIK. Gaussen metodoa aplikatu behar da, matrizearen heina kalkulatzeko.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_2 = E_2 - mE_1 \\ E_3 = E_3 - 2E_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & -1 - m^2 \\ 0 & -1 & 1 - 2m \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 - 2m \\ 0 & 0 & -1 - m^2 \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. Matrizeak parametroaren mende duen errenkada ez-nuluaren kopurua aztertu behar da.

- Lehenengo eta bigarren errenkada beti ez-nuluak dira.
- Hirugarren errenkada nulua da baldin $-1 - m^2 = 0 \rightarrow m^2 = -1$.

Ez du soluziorik $m \in \mathbb{R}$ -ren inolako baliotarako. Beraz, hirugarren errenkada inoiz ez da nulua.

Heina (A) = 3, $m \in \mathbb{R}$ -ren edozein baliotarako.

PRAKTIKATU

40. Matrize hau dugu $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \\ 3 & 2 - a & 3 & 3 + a \end{pmatrix}$.

Aztertu, a parametroaren mende, matrizearen heina.

Alderantzizko matrizea

Parametro baten mende dagoen matrize baten alderantzizkoa kalkulatzeko

Adierazi noiz den alderantzizkagarria $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a - 1 & a & 2 \end{pmatrix}$.

LEHENIK. Matrizearen heina kalkulatu behar da.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a - 1 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - (a - 1)F_1}} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 - a \\ 0 & -a^2 + 2a & -a^2 + a + 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & -a^2 + 2a & -a^2 + a + 2 \\ 0 & 0 & 1 - a \end{pmatrix}$$

Diagonaleko elementuak aztertu behar dira.

- Hirugarren errenkadan, baldin $1 - a = 0 \rightarrow a = 1$
- Bigarren errenkadan, baldin $-a^2 + 2a = 0$
 $-a^2 + 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$
- Lehenengo errenkadan, $1 \neq 0$

Beraz: Baldin $a = 1 \rightarrow$ Heina (A) = 2
 Baldin $a = 0 \rightarrow$ Heina (A) = 2
 Baldin $a = 2 \rightarrow$ Heina (A) = 2

BIGARRENIK. Heinak eta ordenak berdinak izan behar dute.
 Baldin $a = 0$, $a = 1$ edo $a = 2 \rightarrow$ Ez du alderantzizkorik.

PRAKTIKATU

41. Noiz da alderantzizkagarria $M = \begin{pmatrix} k + 1 & 1 & 1 \\ 0 & k - 2 & 1 \\ 0 & k - 2 & -k \end{pmatrix}$?

Ekuazio matrizialak

Ekuazio matrizialen sistema bat ebaztea

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu sistema hau betetzen duten X eta Y

matrizeak $\begin{cases} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{cases}$.

LEHENIK. Sistema ebatzi behar da.

$$\begin{cases} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 6X + 2Y = 2A \\ 4X + 2Y = B \end{cases} \xrightarrow{2X = 2A - B} \begin{cases} 3X + Y = A \\ 2X = 2A - B \end{cases}$$

$$X = A - \frac{1}{2}B \rightarrow Y = -2A + \frac{3}{2}B$$

BIGARRENIK. X eta Y kalkulatu behar dira.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

PRAKTIKATU

42. Kalkulatu 2 ordenako X eta Y matrize karratuak,
 $\begin{cases} 2X + Y = A^2 \\ X - Y = A^{-1} \end{cases}$ sistema ebazteko, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
 izanik.

Matrizeak. Eragiketak matrizeekin

43. Idatzi, matrize mota bakoitzerako, dimentsio desberdineko bi adibide.

- a) Errenkada-matrizea. d) Identitate-matrizea.
b) Zutabe-matrizea. e) Matrize goi-triangeluarra.
c) Matrize diagonal. f) Matrize behe-triangeluarra.

44. Kalkulatu 2 ordenako matrize goi-triangeluarra, diagonal nagusiko elementuak 1 dituen eta elementu guztien batuketaren emaitza 6 duena.

45. Kalkulatu x -ren eta y -ren balioak, matrize hauek berdinak izan daitezen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x+3 \\ 3 & x & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 3 & 2y-5 & -4 \end{pmatrix}$$

46. Egin eragiketa hauek $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrizeekin.

- a) $A + B$ b) $A - B$ c) $A - 2B$ d) $2A + 3B$

47. $A_{m \times n}$, $B_{m \times p}$ eta $C_{p \times n}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu matrize hauen dimentsioa.

- a) $A^i \cdot B$ c) $B \cdot C$ e) $B \cdot C + A$
b) $A \cdot C^j$ d) $C \cdot A^j$ f) $B^i \cdot A - C$

48. $A_{2 \times 3}$, $B_{6 \times 2}$, $C_{3 \times 4}$ eta $D_{4 \times 3}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu matrize hauen dimentsioa.

- a) $A \cdot C$ c) $C \cdot D$ e) $C^j \cdot A^i \cdot B^j$
b) $A^i \cdot B^j$ d) $B \cdot A$ f) $(C^j + D) \cdot A^i$

49. Matrize hauek ditugu: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Kalkulatu:

- a) $A \cdot B$ b) $B^j \cdot A$ c) A^2

50. Egiaztatu 3 ordenako matrize orok betetzen duela $(A^i)^j = A$ berdintza.

51. Egiaztatu matrize karratu batek $a_{ij} = i - j$ betetzen badu antisimetrikoa dela. Idatzi 3 ordenako matrize bat.

52. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Egin, ahal bada, biderketa hauek:

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $B \cdot C$ d) $C \cdot B^j$

53. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu, ahal bada, biderketa hauek:

- a) $A \cdot B \cdot C$ c) $B^j \cdot A - C$ e) $A^i \cdot C^j$
b) $A \cdot C^j + B$ d) $B \cdot C \cdot A$ f) $B^j \cdot C^i$

54. Egiaztatu matrize hauek trukagarriak direla:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

55. Adierazi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin trukagarriak diren matrize guztien adierazpen orokorra.

56. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea dugu. Adierazi baldintza hauek betetzen dituen B matrize bat: A matrizearekin trukagarria da, goi-triangeluarra da, eta diagonal nagusiko elementuen batura 2 da.

57. Matrize hauek ditugu: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Egin honako hau:

- a) Egiaztatu A eta B trukagarriak direla.
b) Adierazi A matrizearekin trukagarriak diren matrize guztien adierazpen orokorra.

58. C matrizea $a, b \in \mathbb{R}$ baldintza betetzen duten

$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ formako matrize guztien adierazpena da. Egiaztatu horrelako bi matrize beti trukagarriak direla.

59. M matrizea $a^2 + b^2 = 1$ berdintza betetzen duten zenbaki errealek $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ formako matrize guztien multzoa da.

Egiaztatu M multzoko bi edozein matrize biderkatzen badira, multzo bereko beste matrize bat lortzen dela. Hau da, $A \in M$ eta $B \in M$ bada, $A \cdot B \in M$ betetzen dela.

60. Kalkulatu zer balio izan behar duen t koefizienteak, baldintza hau bete dadin:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

61. Kalkulatu zer balio izan behar duten x, y eta z -k, berdintza hau bete dadin:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

62. Kalkulatu zer balio izan behar duen x -k, hau betetzeko:

$$\begin{pmatrix} x^2 + 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 4x & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

63. Kalkulatu zer balio izan behar duen x -k, berdintza hau betetzeko:

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

64. Aurkitu $\lambda \neq 0$ den zenbaki erreal bat eta 2×2 dimentsioko B matrize ez-nulu guztiak, baldintza hau betetzen dutenak:

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

65. Kalkulatu $A^4 = 16 \cdot I$ baldintza betetzen duten 2 ordenako A matrize antisimetriko guztiak.

66. A eta B matrizeak 3 ordenako matrize karratuak dira, eta A matrize diagonal bat da. Esan al dezakegu A eta B matrizeak trukagarriak direla biderketarekiko. Nolakoa izan beharko luke A matrizeak, hala izateko?

67. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea dugu. Kalkulatu $A \cdot B = B \cdot A^i$ baldintza betetzen duten B matrizeak.

68. Adierazi $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ forma duten eta $M^2 - 2M = 3I$ ekuazioa betetzen duten M matrize guztiak. I identitate-matrizea da.

69. Kalkulatu zer balio izan ditzakeen m elementuak, $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak, $X^2 - 4X + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ekuazioa bete dezan. Ekuazioan, I identitate-matrizea da.

70. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu x -ren balioa, berdintza hau bete dadin:

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

71. Egiaztatu bete egiten dela $(A \cdot B)^i = B^i \cdot A^i$ propietatea, matrize hauetarako.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

72. $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$ matrizea dugu. Kalkulatu zer balio izan behar dituzten m eta n koefizienteek, $(I + A)^3 = mI + nA$ betetzeko. I identitate-matrizea da.

73. Kalkulatu α -ren eta β -ren zer baliok betetzen duten $A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0$ ekuazioa, jakinda 2 ordenako identitate-matrizea dela I eta $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dela.

74. Kalkulatu B matrize bat, jakinda lehenengo errenkada $(2, 0)$ dela eta $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dela. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ da.

75. Aztertu ea matrize hauek trukatzeko-propietatea betetzen duten biderketarekiko:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

76. Kalkulatu $A^2 = B$ berdintza betetzen duten A matrize antisimetriko guztiak, jakinda hau dela B matrizea:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

77. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Kalkulatu $(A + B)^2$.
b) Kalkulatu $A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$.
c) Zer baldintza bete beharko lukete A eta B matrizeek $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$ betetzeko? Arrazoitu.

78. Kalkulatu $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -rekin trukagarriak diren $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

formako matrize guztiak.

Haietatik guztietatik, adierazi baldintza hauek betetzen dituen matrizea: diagonal nagusiko elementu guztien batura 5 izatea, eta $a_{11} = -a_{12}$.

79. Kalkulatu $X = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ formako matrize guztiak,

$X^2 = I$, berdintza betetzen dutenak. I identitate-matrizea da.

80. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu A^{41} .

81. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu matrize hau:
 $T_n = I + A + A^2 + \dots + A^n$.

82. Badakigu A matrizeak $A^2 = 2A - I$ betetzen duela (I identitate-matrizea da). Kalkulatu A matrizearen n . berbidura.

83. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

- a) Egiaztatu A eta B trukagarriak direla.
b) Kalkulatu A^n eta B^n .

84. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Egin honako hau:

- a) Kalkulatu A -rekin trukagarriak diren B matrize guztiak.
b) Kalkulatu A -ren n . berbidura.

85. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu A^2, A^3, A^4 eta A^5 matrizeak. Kalkulatu, arrazoituz, $A^n, n > 5$ izanik.

86. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu honako hau:

- a) A -rekin trukagarriak diren M matrize guztiak.
b) A^4 eta A^n .

87. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ eta $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu, non $a, b \in \mathbb{R}$. Kalkulatu.

- a) M^n , baldin $n = 1, 2, 3, \dots$
b) $M^{100} = V$ betetzen duten M matrize guztiak.

88. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu:

- a) m eta n konstanteak $A^2 = mA + nI$ betetzen dutenak. I identitate-matrizea da.
- b) A^5 , aurreko ataleko adierazpena soilik erabiliz, eta A^3 eta A^4 kalkulatu gabe.

89. Matrize karratu bat idenpotentea dela esaten da haren berbidura haren berbera bada; hau da, $A^2 = A$ bada.

- a) Idatzi 3 ordenako matrize bat, unitate-matrizearen eta matrize nulua desberdina eta idenpotentea dena.
- b) Kalkulatu zer balio izan behar duen m -k $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix}$ matrizea idenpotentea izateko.
- c) Kalkulatu idenpotenteak diren $\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}$ motako matrize guztiak.

90. A matrize karratua dugula, haren azterna, $Az(A)$, diagonal nagusiko elementuen baturari esaten zaio.

- a) Egiaztatu edozein A eta B matrize karratutarako hau betetzen dela: $Az(A \cdot B) = Az(B \cdot A)$.
- b) Aplikatu aurreko emaitza, a kalkulatzeko, jakinda A eta B matrizeak karratuak direla eta $AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ dela, eta $BA = \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

91. Matrize karratu bat nilpotentea dela esaten da haren berbiduretako bat matrize nulua bada. n zenbaki oso positibo txikiena bada $A^n = 0$ egiten duena, esaten da A matrizea n . mailako matrize nilpotentea dela.

- a) Frogatu honako matrize hau 3. mailako matrize nilpotentea dela:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Hau da, $A^2 \neq 0$ eta $A^3 = 0$.

- b) Kalkulatu 2. mailako $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ matrize nilpotente guztiak.

Matrize baten heina

92. Kalkulatu matrizeen heina.

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
- c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

93. Kalkulatu matrizeen heina.

- a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- c) $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

94. Kalkulatu matrizearen heina.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

95. Kalkulatu zer balio izan behar duen a -k, matrizearen heina 2 izan dadin.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

96. Kalkulatu A matrizearen heina, m parametroaren balioen mende.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

97. $M = \begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Eztabaidatu haren heina, a parametroaren mende.

98. Kalkulatu matrizearen heina, m parametroaren balioen mende.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{-1}{2} & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m \end{pmatrix}$$

99. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu

A^n matrizearen heina. n -ren mende al dago heina?

100. $A = \begin{pmatrix} d & a & a \\ b & d & 3 \\ c-4 & c & d \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. a, b, c eta d zenbaki errealak dira.

- a) Kalkulatu a, b, c eta d -ren balioak, A matrizea antisimetrikoa izan dadin.
- b) $a = b = c = 0$ bada, adierazi A -ren heina, d parametroaren mende

101. Kalkulatu A matrizearen balioak, a parametroaren mende.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 3 & -2 \\ a+2 & 0 & a \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Alderantzizko matrizea

102. Kalkulatu matrize hauen alderantzizko matrizea.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} & \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & \text{d) } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

103. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dauzkagu. Kalkulatu.

a) A^{-1} eta B^{-1} b) $(A \cdot B)^{-1}$

Egiaztatu hau betetzen dela: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

104. Matrize hau daukagu: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Kalkulatu:

a) A^{-1} b) $(A^t)^{-1}$

Egiaztatu hau betetzen dela: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

105. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu.

a) $(A^{-1})^{-1}$ b) $B^{-1} \cdot B$

Edozein matrizearekin lortzen al dira emaitza berberak?

106. Kalkulatu $A^{-1} = 2I - A$ betetzen duten $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ formako matrize guztiak. 2 ordenako identitate-matrizea da I .

107. Esaten da n ordenako bi matrize karratu, A eta B , antzekoak direla hau betetzen duen M matrize alderantzikagarri bat badago: $B = M^{-1} \cdot A \cdot M$, non M^{-1} matrizea M -ren alderantzizko matrizea den.

Adierazi matrize hauek antzekoak diren ala ez.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

108. Hartu kontuan $A^2 - 3I = 2A$ ekuazioa betetzen duen A matrizea, non I identitate-matrizea den.

- a) Aztertu ea badagoen A -ren alderantzizko matrizea eta, ahal bada, adierazi A^{-1} matrizea, A -ren eta I -ren mende.
b) Adierazi $A^2 - 3I = 2A$ ekuazioa betetzen duten $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ formako A matrize guztiak.

109. Badakigu A matrizearen alderantzizkoa $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dela, eta AB matrizearen alderantzizkoa $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ dela. Kalkulatu B matrizea.

110. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Egin eskatzen zaizuna.

- a) Adierazi A matrizearekin trukagarriak diren matrizeen multzoa.
b) Kalkulatu A^n eta ondorioztatu, hartatik, A^{-1} .

111. 2 ordenako matrize generikoa da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizea.

- a) Adierazi matrize horren alderantzizkoaren adierazpen generikoa.
b) Arrazoitu zein kasutan diren alderantzikagarriak 2 ordenako matrizeak.

112. Kalkulatu A^{-1} eta A^n , non A matrizea 3 ordenako matrize bat den, elementu guztiak nuluak dituen, hauek izan ezik: $a_{11} = a_{23} = a_{32} = \frac{1}{5}$.

113. A matrize karratu batek $A^2 + 7A = I$ betetzen du, non I unitate-matrizea den. Kalkulatu A^{-1} matrizea, A -ren mende.

114. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu:

- a) a , b eta c konstanteak, $A^t = A^{-1}$ berdintza bete dadin.
b) A^4 matrizea, lortutako a , b eta c balioetarako.

115. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu.

- a) Egiaztatu $A^2 = 2I$ dela.
b) Kalkulatu A^{-1} .
c) Kalkulatu A^{12} eta A^{12} -ren alderantzizkoa.

Ekuazio matrizialak

116. Bakandu X matrizea ekuazio matrizial hauetako bakoitzean.

- a) $AX = B$ e) $A^{-1}X = B$
b) $XA = B$ f) $AXB = C$
c) $AX + B = C$ g) $A^tX = B$
d) $AX + A = B$ h) $AXA = A^2 + I$

117. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu ekuazio hau betetzen duen 2 ordenako X matrize bat:

$$X + A = B$$

Zer motatakoa da lortutako X matrizea?

118. Kalkulatu $A + X = 2B$ berdintza betetzen duen

X matrizea, non $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diren.

119. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu $2A - 5X = B$ betetzen duen X matrizea.

120. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adierazi berdintza hau betetzen duen X matrize bat:

$$A - A^2 = A \cdot B - X$$

121. Ebatzi ekuazio matritzial hau:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

122. Adierazi 2 ordenako X matrize bat, hau betetzen duena:

$$A + X = AX + XA, \text{ non } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ den.}$$

123. Ebatzi $XA + AX = B$ ekuazio matritziala, non

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ eta } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ diren.}$$

124. Adierazi, baldin badago, ekuazio matritzial hau betetzen duen 2 ordenako D matrize bat.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

125. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu $AX = B$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

126. Kalkulatu $(X - I)B = A$ ekuazioa betetzen duen X matrizea, non A eta B matrize hauek diren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

127. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Egin eskatutakoa.

- Kalkulatu m -ren zer baliotarako duen soluzioa $AX - A^i = A$ ekuazioak.
- Ebatzi $AX - A^i = A$ baldin $m = 0$ bada.

128. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu $X + XA = B^i$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

129. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu.

- Kalkulatu A^{-1} matrizea.
- Ebatzi $AXA = A^2 + A$ ekuazioa.

130. Kalkulatu $XB + A = B + A^2$ betetzen duen X matrizea, jakinda A eta B matrize hauek direla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

131. Ebatzi ekuazio matritzialen sistema hauek:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2X + Y &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{c) } 3X + Y &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & X - 2Y &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } X + 3Y &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} & \text{d) } 2X + 3Y &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & 3X - 2Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

132. Kalkulatu A eta B matrizeak, jakinda baldintza hauek betetzen dituztela:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

133. Kalkulatu $2X + Y = A$ eta $3X + 2Y = B$ ekuazioak betetzen dituzten X eta Y matrizeak, jakinda A eta B matrize hauek direla:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

134. A , B eta C matrize hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu ekuazio matritzialen sistema hau betetzen duten X eta Y matrizeak.

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

135. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ ditugu.

Kalkulatu ekuazio hauek betetzen dituzten X eta Y matrizeak.

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{cases}$$

136. Hauek dira A eta B matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Zer balio izan behar du μ -k, $A^{-1} = \frac{1}{6}A$ izateko?

b) $\mu = -3$ izanda, kalkulatu $A^i \cdot X = B$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

137. Matrize hau dugu: $M = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Kalkulatu α parametroaren balioak, $M^2 + 3M$ matrizea alderantzikagarria izan ez dadin.
- $\alpha = 0$ izanda, ebatzi ekuazio matritzial hau: $MX + M = 2I$.

138. Matrize hau daukagu: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Kalkulatu A^n .
b) Kalkulatu ekuazio hau betetzen duen X matrizea:

$$X \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

139. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Aztertu matrize bakoitzaren heina, a parametroaren mende.
b) $a = 0$ izanda, kalkulatu $AX = B$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

Problemak matrizeekin

140. Idatzi taula moduan enuntziatu hau, eta adierazi datuak matrize moduan.



Familia batek, irailean 400 € gastatu zituen janaritan, eta 120 € ur-, argi- eta gas-horniduran; urrian, berriz, 500 € janaritan eta 180 € ur-, argi- eta gas-horniduran; eta azaroan, 350 € janaritan eta 250 € ur-, argi- eta gas-horniduran.

141. Autobus-enpresa batek hiru linea ditu: A , B eta C . Astelehenean A lineako 5 autobus ateratzen ziren, B lineako 3 autobus, eta C lineako 4. Asteartean A lineako 2 autobus ateratzen ziren, B lineako autobus bat, eta C lineako 5. Asteazkenean, A lineako autobus bat ateratzen zen, B lineako 3 autobus, eta C lineako 5. Adierazi matrize moduan.



142. Enpresa batek hiru salgai ekoizten ditu: A , B eta C . Aleko kostuak 32 €, 46 € eta 71 € dira, hurrenez hurren, eta aleko salmenta-prezioak 53 €, 82 € eta 140 €. Urtean salgai horien 2.100, 1.400 eta 900 ale saltzen dira hurrenez hurren. Adierazi aleko kostuen errenkada-matrizea, aleko salmenten errenkada-matrizea, aleko etekinen errenkada-matrizea, saldutako aleen zutabe-matrizea eta lortutako urteko etekinak.

143. Hotel-kate batek hiru hotel ditu hiri jakin batean: Eden hotela, Paraiso hotela eta Oasis Spa. Hotel bakoitzak hiru gela mota ditu: luxuzkoa, gela bikoitza eta banako gela. Eden hotelak luxuzko 6 gela, 30 gela bikoitz eta banako 10 gela ditu. Paraiso hotelak, 4, 50 eta 10, hurrenez hurren, eta Oasis Spak, 4, 50 eta 8. Hauek dira gelako gau bakoitzeko prezioak: 120 €, luxuzko gela; 80 €, gela bikoitza; eta 50 €, banako gela.



- a) Bildu datuak bi matrizeetan, eta adierazi zer esan nahi duen errenkada eta zutabe bakoitzak.
b) Adierazi matrize baten bidez hotel bakoitzean gau batean lortutako diru-sarrerak hotelak guztiz beteta badaude.

144. Lantegi batek bi torloju mota ekoizten ditu, torloju lauak eta izar-buruko torlojuak. Torloju mota bakoitzeko hiru modelo egiten ditu: L , M eta S . Taula honetan adierazita dago astean egiten dituen torlojuen kopurua, milaka aletan.

	L mota	M mota	S mota
Torloju lauak	2	7	4
Izar-buruko torlojuak	3	5	6

L motako torloju akastunak %4 dira, M motakoak %2, eta S motakoak %1. Kalkulatu, matrize bidez, astean akatsik gabeko zenbat torloju lau eta izar-buruko torloju ekoizten dituen lantegiak.

145. Lantegi batek bi produktu mota ekoizten ditu, X eta Y , eta hiru enpresari saltzen dizkie, A , B eta C enpresei.



Hasieran, produktu bakoitzeko 1.000 ale saltzen zizkion enpresa bakoitzari, baina gaur A enpresak X produktuaren 600 ale eta Y produktuaren 300 ale jaso ditu; B enpresak, X -ren 400 ale eta Y -ren 800; eta C enpresak X -ren 900 ale eta Y -ren 700. Adierazi matrize baten bidez enpresa horiei egindako banaketan izan diren murrizketak, ehunekotan.





ZERTARAKO BALIO DUTE MATRIZEEK?

Leku batetik beste batera joateko ibilbide egokiena aukeratzeko

Demagun mapa bat dugula eta hartan zenbait helmuga eta haietara joateko har ditzakegun bideak adierazita ditugula. Nola aukeratzeko du gure GPS nabigatzaileak ibilbiderik egokiena? Bada nabigatzaileak lekuak puntu moduan adierazten ditu (erpin deituko diegu), eta leku horiek lotzen dituzten bideak, erpinak lotzen dituzten ertz moduan. Horrela, guk xehetasun guztiz ikusten dugun mapa nabigatzaileak krokis soil moduan ikusten du (grafo esaten zaio).



Egoera hori n ordenako matrize karratu moduan deskriba daiteke. Hartan, n grafoak dituen erpinak dira, eta a_{ij} elementu bakoitza, i erpinetik j erpinera doazen ertzen kopurua. Matrize horri grafoaren auzokidetasun-matrizea deritzen. Hona hemen aurreko grafoaren matrizea:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizearen berbiduraren ij elementuak i erpinaren eta j erpinaren artean dauden bi ertzeko bideen kopurua adierazten du.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esate baterako, 2 ertzeko bide bat dago 1. erpinetik 4. erpinera, eta 2 ertzeko 3 bide daude 2. erpinetik 2. erpinera.

M^3 matrizeak hiru ertzeko bideak adierazten ditu; M^4 matrizeak, 4. ertzeko bideak; eta horrela hurrenez hurren.

Hala, nabigatzaileak bide posible guztiak kalkulatzeko, eta, ertzen luzera batuta, bide laburrena zein den adieraz dezake, bai eta zein den azkarrena ere, ertz bakoitzeko denborak batuz.

IRAKURRI ETA ULERTU

1. Mapa bateko bi puntu lotzen dituen errepidea zuzena ez bada eta 4 bihurgune handi baditu, zenbat erpin adierazi beharko ditugu grafoan?

i INTERPRETATU

2. Sailkatu testuan agertzen diren matrizeak, formaren arabera eta elementuen posizioaren arabera.

HAUSNARTU

3. Bide bat sinplea dela esaten dugu bi aldiz ez bada pasatzen erpin beretik. 5 erpin dituen grafo bat baldin badugu, zenbat ertz izan ditzake gehienez?

▶ APLIKATU

4. Matrize hauek ditugu. Marratzu matrizeak auzokidetasun-matrizetzat dituen grafo bat.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Grafo hau aintzat hartuta, kalkulatu hiru ertzeko zenbat bide dauden 2. erpinaren eta 4. erpinaren artean.

