EGITEN JAKIN
PROIEKTUA

Matematika
Gizarte Zientziei aplikatua

EBATZI SAILA

Batxilergoko 2. mailarako Matematika Gizarte Zientziei aplikatua liburua Zubia Editoriala, S. L.ren eta Santillana Educación, S. L.ren Hezkuntza Argitalpenetarako Sailean **Joseba Santxo Uriarte**ren eta **Teresa Grence Ruiz**en zuzendaritzapean sortu, taxutu eta gauzaturiko talde-lana da.

Liburu honen prestatze- eta argitaratze-lanean honako talde honek esku hartu du:
José Carlos Gámez Pérez
Silvia Marín García
Alfredo Martín Palomo
Carlos Pérez Saavedra
Domingo Sánchez Figueroa

EDIZIOA
Ainhoa Basterretxea Llona
Carlos Pérez Saavedra
José Antonio Almodóvar Herráiz
Ana de la Cruz Fayos
Silvia Marín García
Virgilio Nieto Barrera
Laura Sánchez Fernández

PROIEKTUAREN ZUZENDARITZA
Joseba Santxo Uriarte
Domingo Sánchez Figueroa

Liburu honetako ariketak ezin dira inola ere liburuan bertan egin. Ariketetan proposatzen ditugun taulak, eskema eta gainerako baliabideak ikasleak koadernoan egin beharrekoen ereduak baino ez dira.

BATXILERGOA 2

SANTILLANA
ZUBIA

Aurkibidea

UNITATEA	JAKIN		
1 Matrizeak 9	1. Matrizeak 2. Matrize iraulia 3. Eragiketak matrizeekin 4. Matrize baten heina 5. Alderantzizko matrizea 6. Ekuazio matrizialak	10 13 14 18 20 22	• Bi matrizeren arteko biderkadura kalkulatzea • Matrize baten heina kalkulatzea Gaussen metodoaren bidez • Alderantzizko matrizea kalkulatzea, Gauss-Jordanen metodoaz • $AX = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea • $XA = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea
2 Determinanteak 35	1. Determinanteak 2. Determinanteen propietateak 3. Minor osagarria eta adjuntua 4. Determinante bat adjuntuen bidez garatzea 5. Matrize baten heina kalkulatzea 6. Matrize baten alderantzizkoa kalkulatzea	36 37 41 42 44 46	• Matrize baten determinantea kalkulatzea determinanteen propietateak erabiliz • Determinanteak kalkulatzea *zeroak eginez* • Matrize baten heina kalkulatzea minorretatik abiatuta • Matrize baten alderantzizkoa determinanteen bidez kalkulatzea • Determinanteak dituzten ekuazioak ebaztea
3 Ekuazio-sistemak 59	1. Ekuazio linealen sistemak 2. Ekuazio-sistema baten adierazpen matriziala 3. Sistemak ebazteko Gaussen metodoa 4. Rouché-Fröbeniusen teorema 5. Cramerren erregela 6. Sistema homogeneoak 7. Parametroen mendeko ekuazio-sistemak 8. Problemak ebaztea ekuazio-sistemak erabiliz	60 62 63 65 67 69 70 72	• Sistema bat Gaussen metodoaren bidez ebaztea • Ekuazio linealen sistema bat Rouché-Fröbeniusen teorema baliatuz eztabaidatzea • Ekuazio-sistema bateragarri determinatu bat Cramerren erregela erabiliz ebaztea • Ekuazio homogeneoen sistema bat eztabaidatzea eta ebaztea • Parametroen mendeko ekuazio-sistema bat Rouché-Fröbeniusen teorema baliatuz eztabaidatzea
4 Programazio lineala 85	1. Inekuazioak 2. Bi ezezaguneko inekuazio linealak 3. Bi ezezaguneko inekuazio-sistemak 4. Programazio lineala 5. Ebazteko metodoak 6. Soluzio motak 7. Ekoizpen-problemak 8. Dieta-problemak 9. Garraio-problemak	86 88 89 90 94 96 99 100 101	• Ezezagun bateko lehen mailako inekuazio bat ebaztea • Ezezagun bateko bigarren mailako inekuazio bat ebaztea • Bi ezezaguneko inekuazio lineal bat ebaztea • Bi ezezaguneko inekuazioen sistema bat ebaztea • Programazio linealeko problema bat planteatzea • Eskualde egingarri baten erpinak kalkulatzea • Programazio linealeko problemak analitikoki ebaztea
5 Limiteak eta jarraitutasuna 113	1. Funtzio baten limitea infinituan 2. Eragiketak limiteekin 3. Limiteak kalkulatzea 4. Indeterminazio batzuen ebazpena 5. Funtzio baten limitea puntu batean 6. Funtzio baten jarraitutasuna	114 116 118 120 123 126	• $\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioa duten limiteak ebaztea • $\infty - \infty$ motako indeterminazioak dituzten limiteak ebaztea • 1^{∞} motako indeterminazioa duten limiteak ebaztea • Funtzio baten limiteak kalkulatzea $\frac{0}{0}$ motako indeterminazioa duten puntu batean • Funtzio bat puntu batean jarraitua den zehaztea
6 Deribatuak 139	1. Batez besteko aldakuntza-tasa 2. Funtzio baten deribatua puntu batean 3. Alboko deribatuak 4. Deribagarritasuna eta jarraitutasuna 5. Funtzio deribatuak. Ondoz ondoko deribatuak 6. Eragiketak deribatuekin 7. Deribatuen kalkulua 8. Katearen erregela 9. Oinarrizko funtzioen deribatuak	140 141 142 143 144 145 146 147 148	• Funtzio baten deribatua puntu batean kalkulatzea • Funtzio konposatu baten deribatua kalkulatzea • Funtzio konposatuen deribatua kalkulatzea, katearen erregela ondoz ondo aplikatuz • Funtzio baten aldakuntza-tasa zehaztea haren grafikotik abiatuta • Batez besteko aldakuntza-tasa interpretatzea problemetan • Funtzio baten deribatua kalkulatzea puntu batean, definizioa erabiliz

EGITEN JAKIN

- $AX + B = C$ motako ekuazio matrizialak ebaztea
- Ekuazioak ebaztea matrizeak erabiliz
- Matrize baten berretura kalkulatzea
- Baldintza jakin bat betetzen duten matrizeak zehaztea
- Matrizeen arteko berdintza betetzea eragiten duten konstanteak kalkulatzea
- Problemak ebaztea matrizeak erabiliz
- Taulak matrize moduan idaztea
- Parametro baten mende dagoen matrize baten heina kalkulatzea
- Parametro baten mende dagoen matrize baten alderantzizkoa kalkulatzea
- Ekuazio matrizialen sistema bat ebaztea

- Determinanteak dituzten ekuazioak ebaztea
- Parametro baten mende dagoen matrize baten heina kalkulatzea
- Parametro baten mende dagoen matrize karratu baten heina aztertzea, determinanteak erabiliz
- Parametro baten mendeko matrize ez-karratu baten heina kalkulatzea, determinanteak erabiliz
- Matrize baten elementu batzuk kalkulatzea, baldintza bete dadin
- Parametro baten mendeko matrize batek alderantzizkoa duen aztertzea
- $AX = C$ motako ekuazio matrizial bat ebaztea
- $AX + B = C$ motako ekuazio matrizial bat ebaztea
- Biderkagai komuna ateratzea beharrezkoa den ekuazio matrizial bat ebaztea

- Parametroen mendeko ekuazio-sistema bat ebaztea Cramerren erregela erabiliz
- Problema erreal bat ekuazio linealen sistemen bidez planteatu eta ebaztea
- Problema erreal bat ekuazio linealen sistemen bidez ebaztea
- $AX = XA$ motako ekuazio matrizialak ebaztea
- $AX = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea
- Sistema bat aztertzea eta ebaztea, Rouché-Fröbeniusen teorema erabiliz
- Parametro baten mendeko bi ekuazioko eta bi ezezaguneko sistema bat eztabaidatzea
- Parametro baten mendeko hiru ekuazioko eta hiru ezezaguneko sistema bat eztabaidatzea
- Parametro baten mendeko hiru ekuazioko eta hiru ezezaguneko sistema homogeneo bat eztabaidatzea
- Problemak ebaztea ekuazio linealen sistemak erabiliz
- Problema bat ebaztea infinitu soluzio dituen ekuazio linealen sistema erabiliz

- Programazio linealeko problemak grafikoki ebaztea
- Eskualde egingarria grafikoki adieraztea
- Baldintzak zehaztea, eskualde egingarria jakinda
- Baldintzak eranstea eskualde egingarri jakin bat lortzeko
- Funtzio baten maximoa eta minimoa kalkulatzea eskualde egingarri bornatu batean
- Funtzio baten maximoa eta minimoa kalkulatzea eskualde egingarri bornatu gabe batean
- Baldintzetako bat ezezagunen arteko erlazioa duen problema bat ebaztea
- Helburu-funtzioa $f(x, y) = ax + by + k$ motakoa duen problema bat ebaztea
- Eskualde egingarria bornatuta ez duen problema bat ebaztea
- Ondorioak ateratzea problema baten soluzio optimotik

- Zatika definitutako funtzio baten jarraitutasuna aztertzea
- Problema erreal batean funtzio baten limitea interpretatzea
- Funtzio bateko parametroa kalkulatzea, $\infty - \infty$ indeterminazioa duen limite batean badago
- Funtzio bateko parametroa kalkulatzea, 1^{∞} motako indeterminazioa duen limite batean agertzen bada
- Bi funtzio esponentzialen zatiduraren limitea kalkulatzea
- Funtzio batek puntu batean limitea baduen ala ez zehaztea
- Indeterminazio bat ebaztea $\sqrt{f(x)} \pm a$ motako adierazpen bat agertzen denean
- Parametroa kalkulatzea, funtzioaren limitea existitu dadin puntu batean
- Zatika definitutako funtzio baten jarraitutasuna aztertzea puntu batean
- Parametroak kalkulatzea funtzio bat jarraitua izan dadin
- Funtzio baten jarraitutasuna aztertzea problema erreal batean

- Funtzio baten deribatua kalkulatzea puntu batean, formula ezagunak erabiliz
- Funtzio bat zehaztea haren puntu bateko deribatutik abiatuta
- Funtzio baten deribagarritasuna eta jarraitutasuna aztertzea
- Parametroak dituen funtzio baten deribagarritasuna eta jarraitutasuna puntu batean aztertzea
- Jarraitua eta deribagarria den funtzio baten parametroak kalkulatzea
- Katearen erregela aplikatzea
- Funtzioen arteko eragiketen deribatua kalkulatzea
- Funtzio konposatuen arteko eragiketen deribatua kalkulatzea

Aurkibidea

UNITATEA	JAKIN		
7 Deribatuaren aplikazioak 159	1. Deribatuaren interpretazio geometrikoa 2. Gorakortasuna eta beherakortasuna 3. Maximo eta minimo erlatiboak 4. Ahurtasuna eta ganbiltasuna 5. Inflexio-puntuak 6. Funtzioak optimizatzea	160 162 163 165 166 168	• Funtzio baten gorakortasuna eta beherakortasuna kalkulatzea • Funtzio baten maximoak eta minimoak kalkulatzea, lehen deribatua erabiliz • Funtzio baten maximoak eta minimoak kalkulatzea, bigarren deribatua erabiliz • Funtzio baten ahurtasuna eta ganbiltasuna zehaztea • Funtzio baten inflexio-puntuak kalkulatzea • Funtzio baten inflexio-puntuak kalkulatzea, hirugarren deribatua erabiliz • Optimizazio-problema bat ebaztea
8 Funtzioen adierazpena 181	1. Eremua eta ibiltartea 2. Funtzio baten ebakipuntuak eta zeinua 3. Simetriak eta periodikotasuna 4. Adar infinituak. Asintotak 5. Funtzio baten monotonia 6. Funtzio baten kurbadura 7. Funtzio polinomikoak 8. Funtzio arrazionalak 9. Erroketak dituzten funtzioak 10. Funtzio esponentzialak 11. Funtzio logaritmikoak 12. Zatika definitutako funtzioak	182 183 184 185 189 190 191 192 193 194 195 196	• Funtzio baten eremua kalkulatzea • Ardatzekiko ebakipuntuak kalkulatzea • Funtzio baten zeinua kalkulatzea • Funtzio bat simetrikoa den edo ez zehaztea • Funtzio baten asintota bertikalak kalkulatzea • Funtzio baten asintota horizontalak kalkulatzea • Funtzio baten asintota zeiharrak kalkulatzea • Funtzio baten adar infinituak aztertzea • Funtzio baten gorakortasuna eta beherakortasuna aztertzea • Funtzio baten kurbadura aztertzea
9 Integralak 209	1. Funtzio baten jatorrizko funtzioa 2. Funtzio baten integrala 3. Oinarrizko funtzioen integralak 4. Integral mugatua 5. Barrowen erregela 6. Kurba batek itxitako azalera 7. Bi kurbaren arteko azalera	210 211 212 218 219 220 222	• Zenbakizko biderkagai bat falta duen integral bat ebaztea • $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}$ motako integral bat kalkulatzea • Integral mugatu bat kalkulatzea, Barrowen erregela aplikatuz • Grafiko baten eta X ardatzaren arteko azalera kalkulatzea • Bi kurbaren arteko azalera kalkulatzea • Funtzio bat kalkulatzea, deribatua eta funtzioa pasatzen den puntu bat jakinda
10 Probabilitatea 235	1. Kontaketa-metodoak 2. Lagin-espazioa. Gertaerak 3. Eragiketak gertaerekin 4. Laplaceren erregela 5. Probabilitatearen propietateak 6. Esperimentu konposatuak 7. Probabilitate baldintzatua 8. Probabilitate osoaren teorema 9. Bayesen teorema	236 239 240 242 243 244 245 248 249	• Aukera kopurua kalkulatzea aldakuntzekin, permutazioekin eta konbinazioekin • Gertaera baten kontrakoa kalkulatzea • Gertaera baten probabilitatea kalkulatzea esperimentu bidez • Probabilitateak kalkulatzea Laplaceren erregela erabiliz • Probabilitateak kalkulatzea kontingentzia-taulak erabiliz
11 Banaketa binomiala eta normala 261	1. Populazioa eta lagina 2. Laginketa 3. Ausazko laginketa motak 4. Ausazko aldagaiak 5. Banaketa binomiala 6. Banaketa normala 7. Tarte karakteristikoak 8. Binomiala normalera hurbiltzea	262 263 264 268 270 272 274 275	• Laginketa geruzatu bat lortzea • Ausazko aldagai batek banaketa binomiala duen jakitea eta haren probabilitate-funtzioa kalkulatzea • Probabilitateak kalkulatzea banaketa binomiala duten ausazko aldagaietan • Taulak erabiliz, probabilitateak kalkulatzea banaketa normala duten ausazko aldagaietan
12 Inferentzia estatistikoa. Estimazioa 287	1. Limitearen teorema zentrala 2. Batezbestekoaren banaketa 3. Proportzioaren banaketa 4. Batezbestekoen kenduren banaketa 5. Parametroen estimazioa 6. Konfiantza-tarteak 7. Batezbestekorako konfiantza-tarteak 8. Proportziorako konfiantza-tarteak 9. Batezbestekoen arteko kendurarako konfiantza-tarteak	288 289 290 291 292 293 294 296 298	• Batezbestekorako konfiantza-tartea kalkulatzea • Proportziorako konfiantza-tarte bat kalkulatzea • Batezbestekoen arteko kendurarako konfiantza-tarte bat kalkulatzea • Normal baten batezbestekoa kalkulatzea bi probabilitate dakizkigunean • Laginaren batezbestekoaren batezbestekoa eta bariantza kalkulatzea

EGITEN JAKIN	
• Optimizazio-problema bat ebaztea, aldagai bat bakandu beharra dagoenean • Funtzio baten puntu bateko zuzen ukitzailearen ekuazioa kalkulatzea • Funtzio baten parametroa kalkulatzea haren zuzen ukitzailea ez dakigunean • Funtzio bat zehaztea, mutur erlatibo bat eta funtzioaren puntu bat jakinda • Parametro baten balioa kalkulatzea, funtzio bat beti ahurra izateko	• Funtzio baten funtzio deribatua adieraztea, grafikoa abiapuntu hartuta • Aldagai bat bakantzea eskatzen duen optimizazio-problema bat ebaztea • Optimizazio-problema bat ebaztea, tarteen muturrak aztertuz • Optimizazio-problema bat ebaztea, optimizatu behar den funtzioa beste funtzio batetik abiatuta kalkulatu behar denean
• Funtzio polinomiko bat adieraztea • Funtzio arrazional bat adieraztea • Erroketak dituzten funtzioak adieraztea • Funtzio esponentzial bat adieraztea • Funtzio logaritmiko bat adieraztea • Zatika definitutako funtzio bat adieraztea • Funtzio konposatu baten eremua kalkulatzea • Funtzio konposatu baten simetria aztertzea • Parametro ezezagunak kalkulatzea, asintotak abiapuntu hartuta	• Funtzio baten monotonia eta kurbadura aztertzea, deribatuaren grafikotik abiatuta • Baldintza jakin batzuk betetzen dituen funtzio baten grafikoa adieraztea • Funtzio simetriko bat adieraztea • Biderkagai bat balio absolutuan adierazita duen funtzio baten grafikoa adieraztea • Funtzio bat grafikoki adieraztea, aurrez parametroen balioa kalkulatuz • Funtzio bat adieraztea eta haren grafikotik informazioa jasotzea
• Baldintza bat betetzen duen jatorrizkoa kalkulatzea • $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}}$ motako integralak kalkulatzea • $\int \frac{P(x)}{x^n}$ motako integralak ebaztea, $P(x)$ polinomio bat izanda • Balio absolutua duen funtzio baten integral mugatu bat kalkulatzea • Konstante baten balioa kalkulatzea integral mugatuaren balioa jakinda	• Parametro baten balioa kalkulatzea azalera baten balioa jakinda • Zatika definitutako funtzio batek mugatutako azalera kalkulatzea • Kurba baten azpiko azalera kalkulatzea, integrazio-tarterik ematen ez denean • Kurba batek itxitako azalera kalkulatu behar den problemak ebaztea • Kurba batek mugatutako irudi baten azalera kalkulatzea • Balio absolutuan adierazitako kurba batek eta zuzen batek mugatutako azalera kalkulatzea
• Esperimentu konposatu baten lagin-espazioa zehaztea zuhaitz-diagrama bat erabiliz • Gertaerekin eragiketak egitea • Probabilitateak kalkulatzea eragiketak eginez • Ekiprobableak ez diren gertaeren probabilitateak kalkulatzea • Gertaera independenteen probabilitateak kalkulatzea	• Probabilitateak kalkulatzea haien propietateen bidez • Probabilitate-problemak ebaztea kontingentzia-taulak erabiliz • Problema bat ebaztea probabilitate osoaren teorema erabiliz • Problema bat ebaztea Bayesen teorema erabiliz • Probabilitate baldintzatuen problemak ebaztea zenbait teorema erabiliz
• Banaketa binomiala duen ausazko aldagai baten parametroak kalkulatzea, normal batera hurbilduz • Lagin posible guztiak osatzea, laginketa erabiliz • Probabilitateak kalkulatzea banaketa binomial batean, normal batera hurbilduz • Bi banaketa normalen probabilitateak alderatzea • Banaketa normal batean probabilitate jakin bat biltzen duen balioa kalkulatzea	• Banaketa batean baldintza jakin bat betetzen duen datu kopurua kalkulatzea • Balio bat kalkulatzea baldintza jakin bat betetzen duten banakoen kopurua jakinda • Banaketa normal baten batezbestekoa eta bariantza kalkulatzea bi probabilitate jakinda • Batezbestekoan zentratutako tarte karakteristiko bat kalkulatzea
• Laginaren batezbestekoa bi balioren artean egoteko probabilitatea kalkulatzea • Batezbestekoan zentratutako tarte karakteristikoa kalkulatzea • %90, %95 edo %99ko konfiantza-maila ez duen konfiantza-tarte bat kalkulatzea eta interpretatzea • Konfiantza-tarte bat kalkulatzea laginaren datuak izanda	• Estimatzailea kalkulatzea konfiantza-tartea zein den jakinda • Laginaren neurria kalkulatzea, konfiantza-tartearen anplitudea jakinda • Konfiantza-maila kalkulatzea konfiantza-tartea jakina denean • Lagin-proportzioa kalkulatzea konfiantza-tartea badakigunean • Laginaren neurria kalkulatzea errore maximo onargarria jakinda

Unitatearen eskema

Unitate didaktikoen egitura oso sinplea da; izan ere, oinarrizko edukiak, ebatzitako adibideak eta proposatutako jarduerak erraz aurkitzea da helburua.

Unitatean zehar, ikur batzuen bidez, oinarrizko gaitasunak bereziki lantzen dituzten edukiak edo jarduerak daude adierazita. Hona hemen:

Oinarrizko gaitasunak

Liburuan zehar, HEZIBERRIren araberako oinarrizko gaitasunen ikurrak ikusiko dituzu zenbait jardueraren ondoan. Ikur horiek kasu bakoitzean zer gaitasun lantzen den adierazten digute.

Arloko gaitasunak

- Hizkuntza- eta literatura-komunikaziorako gaitasuna
- Matematikarako gaitasuna
- Zientziarako gaitasuna
- Teknologiarako gaitasuna
- Gizarterako eta herritartasunerako gaitasuna
- Arterako gaitasuna
- Mugimendurako gaitasuna

Zehar gaitasunak

- Hitzez, hitzik gabe eta era digitalean komunikatzeko gaitasuna
- Ikasten eta pentsatzen ikasteko gaitasuna
- Elkarbizitzarako gaitasuna
- Ekimenerako eta ekintzaile-sena garatzeko gaitasuna
- Izaten ikasteko gaitasuna

Unitatearen sarrera: edukiak ikastera bultzatzen duen testua.

Unitateko edukiak (**Jakin**) zehazten dira.

Lehen orrialdean, eguneroko bizitzako egoera bat agertzen da, eta horixe erabiliko dugu unitatean ikasiko dituzun edukiak aplikatzeko.

Unitatearen amaierako orrialdeak: ikasitako edukiak aplikatzeko beste urrats bat.

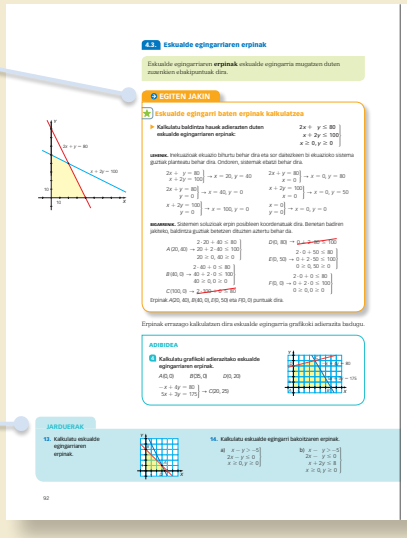
Orrialde horretan, **matematika zure bizitzako** atal bat dela ikusteaz gain, unitatearen lehen orrialdeko galderari erantzuten zaio. Eta horrez gain, zenbait jarduera proposatzen dira, atal horretan ageri den eguneroko egoeran gehiago sakontzeko.

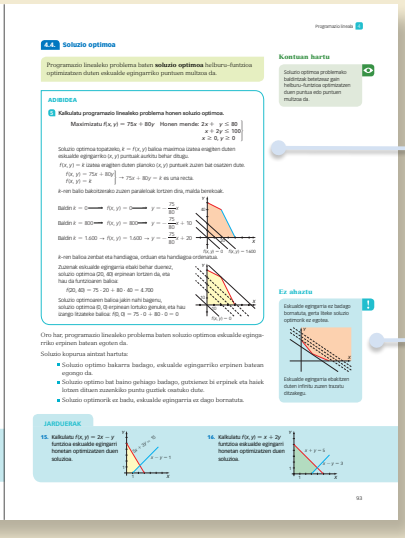
Edukien orrialdeak: JAKIN eta EGITEN JAKIN osotasun moduan jorratuta.

Egiten jakin atalean, urratsez urrats ikasiko dituzu zure matematika-garapenerako beharrezko prozedurak.

Orrialde horietako **Jarduerak** lagungarri izango zaizkizu ikasitakoa praktikan jartzeko.

Horrez gain, sekuentziatuta daudenez, menderatu egingo duzu ikasitakoa.





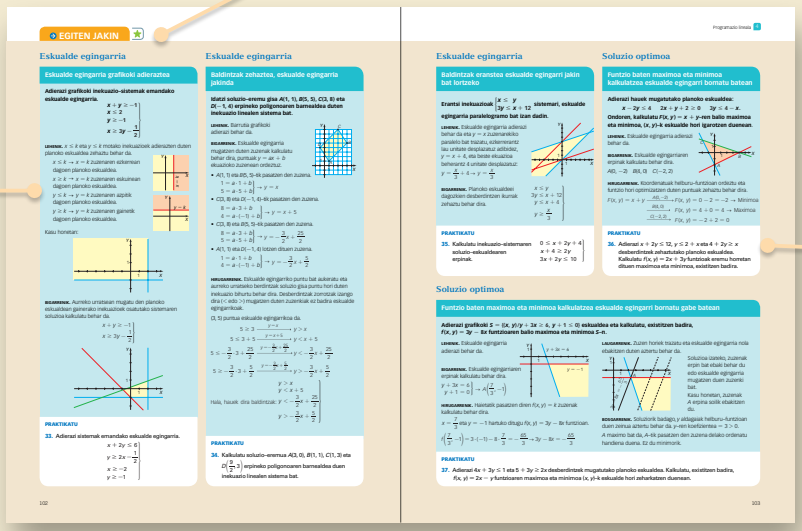
Edukiak (**jakin** beharrekoa) testu argi eta egituratuetan aurkezten dira. **Adibideak** lagungarriak izango zaizkizu ikasitako edukiak finkatzeko.

Azalpen-testuen ertzetan **informazio osagarria** duzu, lauki batzuetan, lantzen diren kontzeptuak eta prozedurak hobeto ulertzeko.

Egiten jakin orrialdeak: matematika ikasteko.

Orrialde hauetan, unitateko oinarrizko prozedurak azaltzen dira (**Egiten jakin**).

Prozedura bakoitza jarduera bat ebatziz azaltzen da. Ebatzitako jarduera horretan, urratsez urrats, ebazteko metodo orokor bat erakusten da.

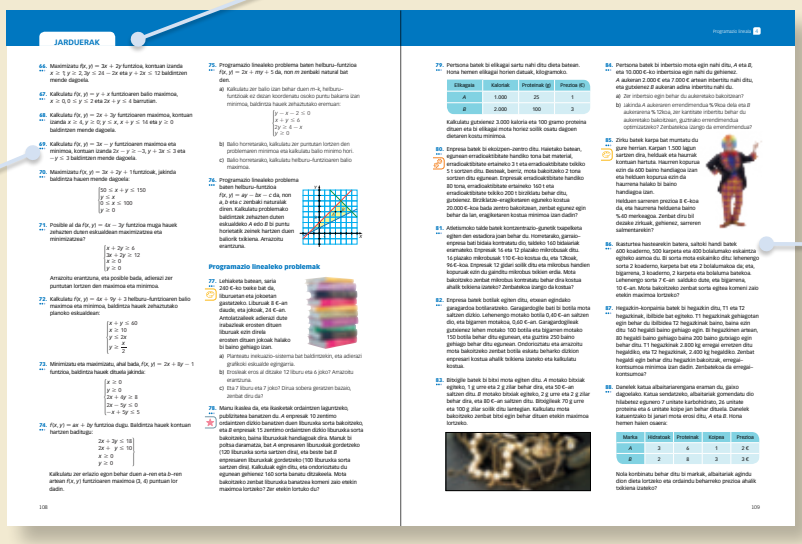


Ebatzitako jarduera bakoitzaren ondoren, jarduera batzuk dituzu, eduki horiek **praktikatu** eta menderatu ditzazun.

Jardueren orrialdeak: praktikatzeko eta eskuratutako ezagutzak finkatzeko.

Amaierako jarduerak sekuentziatuta daude, ahalik probetxu handiena atera diezaiezun ikasitako edukiei.

Jarduera bakoitzaren ondoan, zer **zailtasun** duen adierazten da.



Jarduera horietako asko unibertsitatean sartzeko proban egin beharreko jardueren antzekoak dira.

1 Matrizeak

EDUKIAK

Matrizeak. Matrize motak

Matrize iraulia

Eragiketak matrizeekin

Matrize baten heina. Gaussen metodoa

Alderantzizko matrizea. Gauss-Jordanen metodoa

Ekuazio matrizialak

Ibilgailu modernoek hainbat eta hainbat sistema osagarri dituzte gidatzean segurtasuna handitzeko. Esate baterako, gurpilek ez labaintzeko sistemak, pneumatikoen presioa neurtzen duten sentsoreak, balaztatze-laguntzaileak, gauez ikusteko sistemak... Horrez gain, auto-ekoizleek gidatzea errazagoa izateko eta erosoago gidatzeko sistemak ere garatu dituzte: aparkatzen laguntzeko sistemak, argi- eta euri-sentsoreak, GPS nabigatzailea eta abar.

Azken sistema hori, hasiera batean, kamioi-flotetan erabiltzen hasi ziren, salgaiak ahalik eta denbora laburrenean entregatu ahal izateko: helmugara arazorik gabe iristeko jarraibideak ematen ditu, eta, horrez gain, bide motari eta hartan dagoen trafikoari buruzko informazioa ere ematen du.

Hasiera batean, nabigatzailea luxuzko gaia zen; baina, orain, *smartphoneak* goraldian dauden garai hauetan, oso ohikoak bihurtu dira: unean-unean non gauden, eta leku batetik bestera joateko biderik laburrena, azkarrena edota ekologikoena zein den esaten digu, besteak beste.

Erraza eta azkarra dirudi, baina...

Nola aukeratzen du ibilbide egokia GPS nabigatzaileak?

1 Matrizeak

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1. \\ \leftarrow 2. \\ \dots \\ \leftarrow m. \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1. & 2. & 3. & \dots & n. \end{array} & \end{array}$$

Errenkadak

Zutabeak

m errenkadako eta n zutabeko matrize bat $m \times n$ zenbakiko taula bat da, m errenkadatan eta n zutabetan antolatuta.

a_{ij} zenbakiak matrizearen **elementuak** dira, eta haietan, i azpiindizeak zer errenkadatan dagoen adierazten du, eta j azpiindizeak, zer zutabetan dagoen.

m errenkadako eta n zutabeko matrize baten **dimentsioa** $m \times n$ da.

Honela idazten da:

Matrize bat laburtuta adierazteko, hau idazten da:

$$A = (a_{ij})$$

Dimentsioa erantsi nahi badugu, hau adieraziko dugu:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

ADIBIDEAK

1 **Kalkulatu matrize honen dimentsioa eta adierazi a_{23} eta a_{32} elementuak.**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A matrizeak 3 errenkada eta 4 zutabe ditu. Beraz, matrizearen dimentsioa 3×4 da.

Azpiindizeek adierazten dituzten errenkadei eta zutabeei erreparatu behar diegu.

$a_{23} = 1$ — 2. errenkada, 3. zutabea

$a_{32} = 3$ — 3. errenkada, 2. zutabea

2 **Taula honetan, eskubaloiko bi taldek ligan zehar jokatutako partidak daude. Idatzi informazioa matrize moduan.**

	Irabazitakoak	Berdindutakoak	Galdutakoak
A Taldea	16	0	8
B Taldea	14	1	9

Taulako informazioa 2×3-ko matrize moduan adieraz daiteke.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 \\ 14 & 1 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{A taldea} \\ \leftarrow \text{B taldea} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Irabazi} & \text{Berdindu} & \text{Galdu} \end{array} & \end{array}$$

$a_{11} = 16 \rightarrow$ A taldeak 16 partida irabazi ditu.

$a_{23} = 9 \rightarrow$ B taldeak 9 partida galdu ditu.

$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 24 \rightarrow$ A taldeak 24 partida jokatu ditu guztira.

$a_{21} + a_{22} = 15 \rightarrow$ B taldeak 15 partida ez galtzea lortu du.

$a_{13} + a_{23} = 17 \rightarrow$ Bi taldeen artean 17 partida galdu dituzte.

JARDUERAK

1. Hauek dira Danelek eta Manuk ebaluazio honetako Matematikako kontroletan lortutako notak:

	K1	K2	K3	K4
Danel	8	7	9	10
Manu	6	8	10	9

Egin matrize bat datu horiekin.

2. Idatzi baldintza hauek betetzen dituen 2×3 dimentsioko matrize bat:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{Baldin} \quad i + j = 4 \\ -1 & \text{Baldin} \quad i + j \neq 4 \end{cases}$$

3. Idatzi ezaugarri hauek dituen 4×3 dimentsioko matrize bat: a_{ij} elementuak nuluak dira, $i + j$ zenbaki lehena bada, eta 1 dira, zenbaki lehena ez bada.

1.1. Matrize berdinak

Bi **matrize berdinak dira** dimentsio bera izateaz gain, elementuak gaika berdinak badira.

A eta B berdinak dira $\rightarrow a_{ij} = b_{ij}$, i-ren eta j-ren edozein baliotarako.

Honela idazten da

$a_{ij} = b_{ij}$ bada i, j orotarako, hau esan nahi du:
$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \ldots, a_{mn} = b_{mn}$

ADIBIDEA

3 Adierazi matrize hauek berdinak diren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A-k eta B-k ez dute dimentsio bera, $3 \times 2 \neq 2 \times 3$; eta, beraz, ez dira berdinak.

A-k eta C-k dimentsio bera dute, 3×2; baina $a_{11} = 1 \neq c_{11} = 2$; eta, beraz, ez dira berdinak.

1.2. Matrizeen sailkapena

- **Errenkada-matrizea** errenkada bakarreko eta n zutabeko matrizea da. Haren dimentsioa $1 \times n$ da.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n})$$

- **Zutabe-matrizea** m errenkadako eta zutabe bakarreko matrizea da. Haren dimentsioa $m \times 1$ da.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- **Matrize nulua**, edo **zero matrizea**, elementu guztiak zero dituen matrizea da. 0ren bidez adierazten da.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrize karratua** errenkada adina zutabe dituen matrizea da; hau da n errenkadaz eta n zutabez osatutakoa. Haren dimentsioa $n \times n$ denez, esango dugu haren **ordena** n dela.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrize laukizuzena** errenkada eta zutabe kopuru desberdina duen matrizea da; hau da, ez da karratua.

Kontuan hartu

Dimentsio bakoitzerako, matrize nulu bat dago.

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — 2×1 dimentsioko matrize nulua

$B = (0 \quad 0)$ — 1×2 dimentsioko matrize nulua

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2 ordenako matrize nulua

ADIBIDEA

4 Sailkatu matrize hauek: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = (0 \quad 0 \quad 0)$

A matrize karratua da, 2 ordenakoa.

B zutabe-matrizea da, 2×1 dimentsiokoa.

C errenkada-matrize nulua da, 1×3 dimentsiokoa.

JARDUERAK

4. Kalkulatu zer balio izan behar duten a, b, c eta d elementuek, matrize hauek berdinak izan daitezen:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 & 2 \\ c-2 & 3-a & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & b+1 & d-1 \\ 2c & 1 & b+2 \end{pmatrix}$$

5. Idatzi 3 ordenako matrize karratu bat, elementuak berdintza honek determinatuta dituena.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Baldin } i = j \\ 1 & \text{Baldin } i \neq j \end{cases}$$

1.3. Matrize karratu motak

Matrize karratu baten **diagonal nagusia** a_{ii} formako elementu guztiek osatzen dute.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal nagusia

Matrize karratu baten elementuak nolakoak, honelakoa izan daiteke matrizea:

- **Matrize goi-triangeluarra**
  Diagonal nagusiaren azpiko elementu guztiak zero dira.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrize behe-triangeluarra**
  Diagonal nagusiaren gaineko elementu guztiak zero dira.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matrize diagonala**
  Diagonal nagusitik kanpoko elementu guztiak zero dira.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Identitate-matrizea** edo **unitate-matrizea**
  Diagonal nagusiko elementu guztiak 1 dira. I izendatzen da.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ez ahaztu

Ordena bakoitzeko identitate-matrize bat dago.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2 ordenako identitate-matrizea

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3 ordenako identitate-matrizea

ADIBIDEA

5 Esan zer motatakoa den matrize karratu hauetako bakoitza.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Matrize diagonala — Identitate-matrizea — Behe-triangeluarra — Goi-triangeluarra

JARDUERAK

6. Idatzi baldintza hau betetzen duen 3 ordenako matrizea:
$a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{Baldin } i \le j \\ 0 & \text{Baldin } i > j \end{cases}$. Zer matrize mota da?

7. Idatzi elementu guztien batura 7 duen 3 ordenako matrize diagonal bat.

8. Idatzi elementu nulu bakarrak diagonal nagusian dituen matrize bat.

9. Idatzi baldintza hau betetzen duen 3 ordenako matrizea:
$a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{Baldin } i \ge j \\ 0 & \text{Baldin } i < j \end{cases}$. Zer matrize mota da?

2 Matrize iraulia

$m \times n$ dimentsioko A matrize baten **matrize iraulia**, A^i, beste matrize bat da, $n \times m$ dimentsiokoa, eta honela lortzen da: A matrizean errenkadak zutabeez ordezkatuz edo zutabeak errenkadez ordezkatuz.

$$\text{Baldin } A = (a_{ij}), \text{ orduan } A^i = (a_{ji}).$$

Kontuan hartu

Matrize bat karratua bada, haren matrize irauliak dimentsio bera du.

ADIBIDEA

6 Adierazi $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen matrize iraulia eta haren dimentsioa.

$$A^i = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^i \text{ matrizearen dimentsioa } 3 \times 2 \text{ da.}$$

Matrize simetrikoak eta antisimetrikoak

A matrize karratu bat **simetrikoa** da, matrize irauliarekin bat badator.

$$A = A^i \rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

Eta **antisimetrikoa** da haren aurkakoa, $-A$, matrize irauliarekin bat badator.

$$-A = A^i \rightarrow -a_{ij} = a_{ji}$$

Kontuan hartu

Matrize karratuak soilik izan daitezke simetrikoak edo antisimetrikoak.

ADIBIDEA

7 Adierazi matrize hauek simetrikoak edo antisimetrikoak diren:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = A \rightarrow$ A matrize simetriko bat da.

b) B matrizea ez da karratua; eta, beraz, ezin da ez simetrikoa ez antisimetrikoa izan.

c) $C^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -C \rightarrow$ C matrize antisimetrikoa da.

Propietateak

- Matrize simetriko batean, diagonal nagusiarekiko simetrikoak diren elementuak berdinak dira.

$$A = \begin{pmatrix} a & m & n \\ m & b & v \\ n & v & c \end{pmatrix}$$

- Matrize antisimetriko batean, diagonal nagusiko elementuak zero dira, eta harekiko simetrikoak diren elementuak aurkakoak dira.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & n \\ -m & 0 & v \\ -n & -v & 0 \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

10. Idatzi matrize honen matrize iraulia:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Egiaztatu $a_{ij} = i + j$ betetzen duen matrize karratua matrize simetrikoa dela. Idatzi ezaugarri horiek dituen 3 ordenako matrize bat.

3 Eragiketak matrizeekin

3.1. Matrizeen arteko batuketa

Ez ahaztu

Bi matrizeren arteko batuketa egiteko, dimentsio bera izan behar dute.

Dimentsio bereko A eta B **bi matrizeren arteko batuketa,** $A + B$, dimentsio bereko beste matrize bat da, eta haren elementuak posizio bereko A eta B matrizeetako elementuen arteko batura dira.

$$A + B = C, \text{ non } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

ADIBIDEA

8 Batu, ahal bada, matrize hauek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ez A eta B, ez B eta C ez dira dimentsio berekoak; beraz, ezin dira batu.

A eta C matrizeek ez dute dimentsio bera.

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+5 \\ 3+(-1) & -3+(-4) \\ 0+2 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propietateak

Matrizeen batuketa elementuz elementu egiten denez, zenbaki errealen arteko batuketaren antzeko propietateak ditu.

- **Trukatze-propietatea:** $A + B = B + A$
- **Elkartze-propietatea:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Elementu neutroa:** batuketaren elementu neutroa matrize nulua da.
$$A + 0 = A$$
- **Aurkako elementua:** A matrize bakoitzak aurkako matrizea du, $-A$, A matrizearen elementuen aurkakoek osatutakoa.
$$A + (-A) = 0$$

Kontuan hartu

Bi matrizeren arteko kenketa egiteko, lehenengoari bigarrenaren alderantzizkoa batu behar zaio.

$$A - B = A + (-B)$$

ADIBIDEA

9 Adierazi $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizko matrizea, $-A$, eta egiaztatu bi matrizeen arteko batura matrize nulua dela.

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

12. Egin matrizeen arteko eragiketa hau:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

13. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ da eta $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kalkulatu $A + A^i - I$.

14. Kalkulatu a, b, c, d eta e elementuen balioa, hau betetzeko: $A = B + C$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 7 & 8+d \\ a & 9 & c+9 & e+2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix}$$

3.2. Matrize baten eta zenbaki baten arteko biderketa

k **zenbaki erreal** bat A **matrize** batez biderkatzean beste matrize bat lortzen da, A matrizearen dimentsio berekoa, eta haren elementuak A-ko elementuak k-z biderkatuz lortzen dira.

$$k \cdot A = C, \text{ non } c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

ADIBIDEA

10 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu:

a) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

b) $(-1) \cdot A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Kontuan hartu

Matrize bat diagonala bada eta diagonaleko elementu guztiak berdinak badira, biderkagai komuna atera dezakegu.

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot I$$

3.3. Errenkada-matrize baten eta zutabe-matrize baten biderketa

$1 \times n$ dimentsioko **errenkada-matrize** bat $n \times 1$ dimentsioko **zutabe-matrize** batez biderkatzearen emaitza matrizeko elementuak banan-banan biderkatzearen eta emaitzak batzearen batura da.

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

ADIBIDEA

11 Adierazi honako matrize hauen arteko $A \cdot B$, $C \cdot A$ eta $C \cdot B$ biderketak egin daitezkeen:

$$A = (6 \quad 2 \quad 1) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 4)$$

A matrizea 1×3 dimentsioko errenkada-matrizea da; B matrizea 3×1 dimentsioko zutabe-matrizea da. Beraz, haien arteko biderketa egin daiteke.

$$A \cdot B = (6 \quad 2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 17$$

C matrizea 4 errenkadako errenkada-matrizea da. Beraz, 4×1 dimentsioko matrize batez soilik biderka daiteke. Ezin da ez A-z ez B-z biderkatu.

Ez ahaztu

Errenkada-matrize bat zutabe-matrize batez biderkatzeko, ezinbestekoa da lehenengoaren zutabe kopurua bigarrenaren errenkada kopuruarekin bat etortzea.

JARDUERAK

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu:

a) $3A - B + 2C$ b) $2C + B - 3A$

16. $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ditugu. Posible bada, kalkulatu:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $2A \cdot 3B$ d) $(-2B) \cdot A$

3.4. Bi matrizeren arteko biderketa

$m \times n$ dimentsioko A matrizearen eta $n \times p$ dimentsioko B matrizearen arteko biderkadura beste C matrize bat da, $m \times p$ dimentsiokoa. Matrize horren c_{ij} elementua honela lortzen da: lehenengo matrizearen i. errenkada bigarren matrizearen j. zutabeaz biderkatuz.

$$A \cdot B = C, \text{ non } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mj}.$$

Ez ahaztu

- Bi matrize biderkatzeko, lehenengoaren zutabe kopuruak eta bigarrenaren errenkada kopuruak bat etorri behar dute.
- Biderkadura-matrizeak lehenengoaren errenkada kopurua eta bigarrenaren zutabe kopurua ditu.

EGITEN JAKIN

Bi matrizeren arteko biderkadura kalkulatzea

▶ Kalkulatu matrize hauen $A \cdot B$ biderketaren emaitza.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

LEHENIK. Biderkatu daitezkeen ala ez aztertu behar da: lehenengoaren zutabe kopuruak bat etorri behar du bigarrenaren errenkada kopuruarekin.

A-ren dimentsioa: 2×3

B-ren dimentsioa: 3×2

A-ren zutabe kopurua bat dator B-ren errenkada kopuruarekin, eta, beraz, egin daiteke matrizeen arteko biderketa.

$A \cdot B$ matrizeak A-ren errenkada kopurua eta B-ren zutabe kopurua izango ditu.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. A matrizearen lehenengo errenkada B matrizearen lehenengo zutabeaz biderkatu behar da, biderkadura-matrizearen lehengo elementua lortzeko.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. A matrizearen lehenengo errenkada B matrizearen gainerako zutabeez biderkatu behar da.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

LAUGARRENIK. Gauza bera egin behar da lehenengo matrizearen gainerako errenkadekin eta bigarrenaren zutabeekin.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Kontuan hartu

Hiru matrizeren arteko biderketa egiteko, $A \cdot B \cdot C$, honelako dimentsioak izan behar dituzte:

A-ren dimentsioa: $m \times n$
B-ren dimentsioa: $n \times p$
C-ren dimentsioa: $p \times q$

$A \cdot B \cdot C$ matrizearen dimentsioa hau izango da: $m \times q$.

JARDUERAK

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ditugu. Kalkulatu:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A^i \cdot B$

18. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ ditugu. Kalkulatu $A \cdot B \cdot C$ matrizea.

ADIBIDEA

12 Jatetxe batean hiru menu mota dituzte: eguneko menua, exekutiboentzako menua eta menu berezia. Taula hauetan astean menu bakoitza egiteko erosten den haragi, arrain eta barazki kantitatea dago adierazita, bai eta produktu bakoitzak azken bi asteetan izandako prezioa ere.

	Haragia	Arraina	Barazkia
Egunekoa	6	14	12
Exekutiboa	8	18	13
Berezia	12	26	15

	1. astea	2. astea
Haragia	12,50	10,60
Arraina	16	11,90
Barazkia	6,20	8,40

Kalkulatu menuek astean izan duten kostua.

Problema ebazteko, taula bakoitza matrize moduan hartu eta biderkatu egingo ditugu.

$$\begin{pmatrix} 6 & 14 & 12 \\ 8 & 18 & 13 \\ 12 & 26 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}5 & 10{,}6 \\ 16 & 11{,}9 \\ 6{,}2 & 8{,}4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{1. astea} & \text{2. astea} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 373{,}4 & 331 \\ 468{,}6 & 408{,}2 \\ 659 & 562{,}6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Eguneko menua} \\ \leftarrow \text{Exekutiboentzako menua} \\ \leftarrow \text{Menu berezia} \end{array}$$

Menuak egitea merkeagoa izan da bigarren astean.

Propietateak

A, B eta C matrizeen dimentsioek biderketa egiteko aukera ematen badute, propietate hauek ditu biderketak:

- **Elkartze-propietatea.** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- **Elementu neutroa.** $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
- **Banatze-propietatea.** Ezkerretik: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  Eskuinetik: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

Oro har, matrizeen biderketak ez du trukatze-propietatea betetzen: $A \cdot B \neq B \cdot A$

ADIBIDEA

13 Adierazi ea egin daitekeen matrize hauen arteko biderketa eta aztertu ea trukatze-propietatea betetzen duen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A matrizearen dimentsioa 2×3 eta B matrizearena 2×2 direnez, biderketak ezin du trukatze-propietatea bete, ezin dugulako $A \cdot B$ biderketa egin, baina bai $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -19 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Honela idazten da

$A \cdot B \rightarrow$ A-k ezkerretik biderkatzen du B.

$B \cdot A \rightarrow$ A-k eskuinetik biderkatzen du B.

A eta B bi matrize **trukagarriak** dira (edo elkar trukatzen dute), baldin $A \cdot B = B \cdot A$.

JARDUERAK

19. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ditugu.

a) Aztertu ea A eta B matrizeek trukatze-propietatea betetzen duten.

b) Egiaztatu banatze-propietatea betetzen dela: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

20. Letoia kobrearen eta zinkaren aleazioa da. LETOIAK, SL-k hiru motatako letoiak erabiltzen ditu: A, %30 zink duena; B, %40 zink duena; eta C, %50 zink duena. Bi hornitzaile ditu: M, kobre-kiloa 6,50 €-an eta zink-kiloa 1,50 €-an saltzen duena; eta N, kobre-kiloa 6,70 €-an eta zink-kiloa 1,10 €-an saltzen duena. A motako 100 tona letoi, B motako 550 eta C motako 50 ekoizteko, zein hornitzaileri erosi beharko lioke materiala?

4 Matrize baten heina

4.1. Matrize baten errenkaden konbinazio linealak

Matrize baten E_i errenkada ez-nulua **linealki mendekoa** da $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_m}$ errenkadekiko, hau betetzen bada:

$$E_i = k_1E_{j_1} + k_2E_{j_2} + \ldots + k_mE_{j_m}$$

Matrize baten errenkada bat **linealki independentea** da, matrizearen beste errenkada batzuekiko linealki mendekoa ez bada.

Ez ahaztu

Errenkadei dagokienez egin ditugun definizio berberak egin ditzakegu zutabeei dagokienez.

- Matrize baten Z_i zutabe ez-nulua **linealki mendekoa** da $Z_{j_1}, Z_{j_2}, \ldots, Z_{j_m}$ zutabeekiko, hau betetzen bada:

$$Z_i = k_1Z_{j_1} + k_2Z_{j_2} + \ldots + k_mZ_{j_m}$$

- Matrize baten zutabe bat **linealki independentea** da, matrizearen beste errenkada batzuekiko linealki mendekoa ez bada.

ADIBIDEA

14 Adierazi matrize honen errenkada linealki independenteak:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Lehenengo errenkada, E_1, linealki independentea da E_2 bigarren errenkadarekiko, baldin $E_1 = kE_2$; hau da, E_1 errenkadako elementuek E_2 errenkadako elementuen multiploak izan behar dute. Hala ez denez, A matrizearen errenkadak linealki independenteak dira.

4.2. Matrize baten heina

A **matrize baten heina**, heina (A), matrize baten errenkada edo zutabe ez-nulu linealki independenteen kopurua da.

Errenkadakako heina beti da zutabekako heinaren berdina.

Kontuan hartu

Errenkadakako heina zutabekako heinaren berdina denez beti, A matrize batek eta haren irauliak, A^t-k, hein bera dute.

ADIBIDEA

15 Adierazi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & -10 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

E_1 errenkada ez da E_2-rekiko ez E_3-rekiko linealki mendekoa, eta E_2 eta E_3 ere ez.

E_1 errenkada E_2 eta E_3-rekiko linealki mendekoa den aztertu behar dugu; hau da, $E_1 = k_1E_2 + k_2E_3$ den. Errenkaden bi lehenengo elementuak hartuta, hau dugu:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = k_1a_{21} + k_2a_{31} \\ a_{12} = k_1a_{22} + k_2a_{32} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = 3k_1 + 8k_2 \\ 0 = -5k_1 + (-10)k_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_1 = -2 \quad k_2 = 1$$

Aztertu behar da gainerako berdintzak bete egiten direla k_1 eta k_2 balio horiekiko.

$$a_{13} = k_1a_{23} + k_2a_{33} \rightarrow 3 = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 7$$

$$a_{14} = k_1a_{24} + k_2a_{34} \rightarrow -4 = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$$

Beraz, $E_1 = -2E_2 + E_3$; hau da, E_1 errenkada E_2 eta E_3-ren linealki mendekoa da.

E_2 eta E_3 linealki independenteak dira, eta E_1, berriz, E_2 eta E_3-ren mendekoa $\rightarrow$ heina (A) = 2

JARDUERAK

21. Adierazi matrize hauen heina:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

22. Kalkulatu A, B eta $A \cdot B^t$ matrizeen heina.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

4.3. Gaussen metodoa

Honetan datza matrize baten heina kalkulatzeko **Gaussen metodoa** erabiltzea: hasierako matrizea diagonalaren azpiko elementuak zero dituen matrize bihurtzean, egoki diren oinarrizko transformazioak eginez. Matrizearen heina lortutako matrize triangeluarraren errenkada ez-nuluen kopurua izango da.

Oinarrizko transformazio hauek egin daitezke matrizean:

- i errenkada j errenkadarekin trukatzea. Honela idatziko dugu transformazio hori: $E_i \leftrightarrow E_j$.
- i errenkada haren elementu guztiak zero ez den a zenbaki batez biderkatzearen edo zatitzearen emaitzaz ordeztea. $E_i = aE_i$ idatziko dugu.
- i errenkada edo j errenkada bien baturaz ordeztea, nuluak ez diren a eta b zenbakiez biderkatuz. Honela idatziko dugu: $E_i = aE_i + bE_j$.

EGITEN JAKIN

Matrize baten heina kalkulatzea Gaussen metodoaren bidez

▶ Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

LEHENIK. $a_{11} = 0$ bada, lehenengo errenkada lehenengo elementua zero ez duen errenkadaren batekin trukatu behar da, baldin badago. Eragiketak egin behar dira errenkada guztietan, lehenengoan izan ezik, haietako lehenengo elementuak zero izan daitezen.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bigarren errenkadako lehen elementua zero da. Hirugarren errenkadako lehenengo elementua zero egin behar da.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. Egiaztatu behar da $a_{22} \neq 0$ dela. Ez baldin bada, errenkada hori bigarren elementua zero ez duen errenkadaren batekin trukatu behar da, baldin badago. Aurreko urratsean bezala, zero egin behar ditugu errenkada guztietako bigarren elementuak, lehenengokoa eta bigarrenekoa izan ezik.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 = 2E_3 - E_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Prozesu bera egin behar da hasierako matrizearen gainerako errenkadekin, diagonalaren azpiko elementu guztiak zero dituen matrize bat lortu arte. Matrizearen errenkada ez-nuluen kopurua da matrizearen heina. Kasu honetan, bi: $\rightarrow$ heina $(A) = 2$.

Kontuan hartu

Matrize baten heina eta haren matrize irauliarena berdinak direnez, matrizeak errenkada gehiago baditu zutabe baino, laburragoa izango da matrize irauliaren heina kalkulatzea.

$$\text{Heina} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{Heina} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

23. Kalkulatu, Gaussen metodoa erabiliz, A eta B matrizeen heina.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

24. Kalkulatu $A^i \cdot B - C^i$ matrizearen heina, m parametroaren mende.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & m \end{pmatrix}$$

5 Alderantzizko matrizea

Kontuan hartu

Matrize bat karratua ez bada, ez dauka alderantzizko matrizerik.

n ordenako A matrize karratu baten **alderantzizko matrizea** beste matrize bat da, A^{-1}, jatorrizkoaren ordena berekoa eta hau betetzen duena:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad A^{-1} \cdot A = I_n$$

n ordenako matrizea da I_n identitate-matrizea.

Alderantzizko matrizea duten matrizeei **matrize erregularrak** edo **alderantzikagarriak** deritze, eta ez dutenei, **matrize bereziak**.

ADIBIDEA

16 Adierazi matrize hauetakoren bat $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa den:

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ **b)** $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 13 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ **c)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) B matrizea ezin da alderantzizko matrizea izan, ez delako karratua.

b) C matrizea ezin da A-ren alderantzizko matrizea izan, ordena desberdinak dituztelako.

c) D matrizea karratua da eta A-ren ordena bera du. A-ren alderantzizkoa den aztertu behar da.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beraz, D matrizea A matrizearen alderantzizkoa da, $A \cdot D = I$ baita.

Honela idazten da

Matrize bat **alderantzikagarria** da, alderantzizko matrizea badu.

Matrize karratuek soilik izan dezakete alderantzizko matrizea; baina matrize karratu guztiek ez dute alderantzizkoa.

n ordenako A matrize karratuak alderantzizkoa du, baldin heina $(A) = n$ bada.

Propietateak

- Alderantzizko matrizearen alderantzizkoa jatorrizko matrizea da.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- Bi matrizeren biderkaduraren alderantzizkoa matrizeen alderantzizkoak ordena aldatuta biderkatzearen emaitza da.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- Matrize baten irauliaren alderantzizkoa alderantzizko matrizearen irauliaren berdina da.

$$(A^i)^{-1} = (A^{-1})^i$$

JARDUERAK

25. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu.

a) Kalkulatu A^{-1}, definizioa baliatuz.

b) Egiaztatu $(A^{-1})^i = (A^i)^{-1}$ dela.

26. Egiaztatu $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ matrizea alderantzikagarria dela.

27. Egiaztatu matrizea bera dela $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa.

Gauss-Jordanen metodoa

Alderantzizko matrizea kalkulatzeko **Gauss-Jordanen metodoa** honetan datza: hasierako matrizea identitate-matrize bihurtzean, oinarrizko transformazioak eginez. Identitate-matrizean transformazio berak aplikatuz, alderantzizko matrizea lortuko dugu.

EGITEN JAKIN

Alderantzizko matrizea kalkulatzea, Gauss-Jordanen metodoaz

▶ Kalkulatu, ahal bada, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizko matrizea.

LEHENIK. A matrizea eta A-ren ordena bereko identitate-matrizea idatzi behar dira, lerro batez bereizita. $a_{11} = 0$ bada, lehenengo errenkada lehenengo elementua zero ez duen errenkada batekin trukatu behar da.

$a_{11} = 2 \neq 0$ denez, ez dugu errenkadarik trukatuko.

BIGARRENIK. Eragiketak egin behar dira errenkada guztietan, lehenengoan izan ezik, errenkadetako lehenengo elementua zero izateko.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = E_3 + 3E_1]{E_2 = E_2 - 2E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

HIRUGARRENIK. Egiaztatu behar da $a_{22} \neq 0$ dela. Bestela, errenkada hori bigarren elementua zero ez duen ondorengo errenkada batez ordezkatu behar da. Eragiketak egingo dira, errenkada bakoitzeko bigarren elementuak, bigarrenekoa izan ezik, zero egiteko.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = E_3 + E_2]{E_1 = E_1 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

LAUGARRENIK. Prozesu bera egin behar da hasierako matrizearen gainerako errenkadekin.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 = E_2 - 5E_3]{E_1 = E_1 + 7E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

BOSGARRENIK. Errenkada bakoitza diagonalean duen elementuaz zatitu behar da.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 = -E_2 \\ E_3 = -E_3}]{E_1 = \frac{1}{2}E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

SEIGARRENIK. Lerroaren eskuineko elementuek hasierako matrizearen alderantzizkoa osatzen dute.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Gogoratu

Alderantzizko matrizea kalkulatzeko egin daitezkeen oinarrizko eragiketak matrize baten heina kalkulatzeko egin daitezkeen berberak dira.

- i errenkada j errenkadarekin trukatzea.

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

- i errenkada haren elementu guztiak zero ez den a zenbaki batez biderkatzearen edo zatitzearen emaitzaz ordezkatzea.

$$E_i = aE_i$$

- i errenkada edo j errenkada bien baturaz ordezkatzea, nuluak ez diren a eta b zenbakiez biderkatuz.

$$E_i = aE_i + bE_j$$

Honela idazten da

Gauss-Jordanen metodoan hasierako matrizea eta identitate-matrizea adierazteko, hau idazten da:

$$(A \mid I_n)$$

Metodo hori erabiltzean, transformazio hau egiten dugu:

$$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$$

JARDUERAK

28. Kalkulatu, Gauss-Jordanen metodoa erabiliz, matrize hauen alderantzizkoa, eta egiaztatu emaitzako matrizeak benetan direla jatorrizkoaren alderantzizkoak.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

29. Kalkulatu, Gauss-Jordanen metodoa erabiliz, matrize hauen alderantzizkoa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Ekuazio matrizialak

Ekuazio matrizialak gai guztiak matrizeak dituzten ekuazioak dira. Ekuazio matrizialak ebazteko, matrize ezezaguna bakandu behar da, matrizeen arteko eragiketak eginez.

EGITEN JAKIN

$AX = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea

▶ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Ebatzi $AX = B$ ekuazioa.

LEHENIK. X bakandu behar da, A^{-1} ezkerretik biderkatuz.

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \xrightarrow{A^{-1} \cdot A = I} I\,X = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

BIGARRENIK. A^{-1} kalkulatu behar da.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 = E_1 - E_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 = -E_2]{E_1 = \frac{1}{2}E_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Ekuazioa ebatzi behar da.

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gogoratu

Matrizeen arteko biderketak ez du trukatze-propietatea betetzen, eta, beraz, ez da gauza bera A^{-1} eskuinetik biderkatzea eta ezkerretik biderkatzea.

$$A^{-1}B \neq BA^{-1}$$

EGITEN JAKIN

$XA = B$ motako ekuazio matrizialak ebaztea

▶ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu. Ebatzi $XA = B$ ekuazioa.

LEHENIK. X bakandu behar da, A^{-1} eskuinetik biderkatuz.

$$XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \xrightarrow{A \cdot A^{-1} = I} X\,I = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

BIGARRENIK. A^{-1} kalkulatu eta ekuazioa ebatzi behar da.
A^{-1} aurreko ataleko berbera da.

$$X = BA^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

30. A eta B emanda, kalkulatu X matrizea, $A \cdot X = B$ izateko.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

31. A eta B matrizeak ditugu. Ebatzi $X \cdot A = B$ ekuazioa.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EGITEN JAKIN

$AX + B = C$ motako ekuazio matrizialak ebaztea

▶ Ebatzi $AX + 3B = C$ ekuazioa A, B eta C matrizeak hartuta. Hona hemen matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

LEHENIK. Lehendabizi X matrizea bakandu behar da.

$$AX + 3B = C \rightarrow AX = C - 3B$$
$$\rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - 3B) \xrightarrow{A^{-1} \cdot A = I} X = A^{-1}(C - 3B)$$

BIGARRENIK. A^{-1} matrizea bakandu behar da.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = E_3 - 2E_1]{E_2 = E_2 + E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 = E_1 + E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 = E_2 + 2E_3]{E_1 = E_1 + E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = -E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Ekuazioa ebatzi behar da.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

JARDUERAK

32. Ebatzi, matrizeen bidez, $A^i \cdot X - B = 0$ ekuazioa. Hauek dira A eta B matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

33. Zehaztu $X \cdot A + A = 2A^2 X$ ekuazioa betetzen duen matrize bat, jakinda A matrizea hau dela:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Eragiketak matrizeekin

Ekuazioak ebaztea matrizeak erabiliz

$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matrizea dugu. Kalkulatu $M = (3I + A^i)^2$ matrizea, 3 ordenako identitate-matrizea bada I.

LEHENIK. Ekuazioa ebazteko behar diren matrizeak zehaztu behar dira.

$$3 \cdot I = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^i = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. Ekuazioa ebatzi behar da.

$$M = (3I + A^i)^2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 48 \end{pmatrix}$$

PRAKTIKATU

34. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu matrizeen arteko eragiketa hau $A^i(2B - I)^2$, 3 ordenako identitate-matrizea bada I.

Eragiketak matrizeekin

Matrize baten berretura kalkulatzea

$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu A^{99}.

LEHENIK. $A^2, A^3, A^4 \ldots$ kalkulatu behar dira.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I, A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A, A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = I, A^7 = A^6 \cdot A = I \cdot A = A, \ldots$$

BIGARRENIK. Arau orokor bat ondorioztatu behar da, berretzailea matrizeko elementuekin erlazionatzen duena.

1. Berretzailea bikoitia bada $\rightarrow A^{2n} = I$
2. Berretzailea bakoitia bada $\rightarrow A^{2n+1} = A$

HIRUGARRENIK. Arau orokorra aplikatu behar da, eskatutako berretura kalkulatzeko.

99 zenbaki bakoitia denez: $A^{99} = A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

PRAKTIKATU

35. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$ matrizea dugu.

a) Kalkulatu A^{101}.

b) Kalkulatu A^{101}, baldin $k = 3$.

c) k-ren zer baliotarako da $A^{101} = I$?

Eragiketak matrizeekin

Baldintza jakin bat betetzen duten matrizeak zehaztea

Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearekin trukagarriak diren matrize diagonal guztiak.

LEHENIK. Eskatutako baldintza betetzen duten matrize motak zehaztu behar dira.

B matrizeek baldintza hauek bete behar dituzte:

- Matrize diagonalak izatea.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

- *A* matrizearekin trukagarriak izatea.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

BIGARRENIK. Problemako baldintzak ezarri behar dira.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Matrizeak berdindu egin behar dira, elementuz elementu, eta lortutako ekuazio-sistema ebatzi behar da.

$$\left.\begin{aligned} \cancel{2a_{11} = 2a_{11}} \\ a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \\ \cancel{0 = 0} \end{aligned}\right\}$$

Lehenengo ekuazioa eta laugarrena kendu egin daitezke, berdintzak dira eta.

Bigarren eta hirugarren ekuazioetatik hau lortzen da:

$$\left.\begin{aligned} a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \end{aligned}\right\} \rightarrow a_{11} = a_{22}$$

Baldintza bakarra da diagonaleko elementuek berdinak izan behar dutela ($a_{11} = a_{22}$).

Beraz, eskatutako baldintzak betetzen dituzten matrizeak mota honetakoak dira:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad \text{non } k \in \mathbb{R}$$

PRAKTIKATU

36. Zehaztu baldintza hauek betetzen dituzten 2 ordenako *A* eta *B* matrize karratuak:

- Haien batura 2 ordenako identitate-matrizea da: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- *A* matrizea ken *B* matrizea egitean, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrizearen iraulia lortzen da.

Eragiketak matrizeekin

Matrizeen arteko berdintza betetzea eragiten duten konstanteak kalkulatzea

Kalkulatu *m* eta *n* koefizienteen balioa, $mA^2 + nA^i = 2I$ berdintza bete dadin, kontuan izanda *I* identitate-matrizea dela eta $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

LEHENIK. Berdintzaren lehen eta bigarren ataletako eragiketak egin behar dira.

$$\begin{aligned} mA^2 &= m \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= m \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$nA^i = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix}$$

$$2I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. Probleman ezartzen den baldintza aplikatu behar da.

$$mA^2 + nA^i = 2I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & -2m + n \\ 2m - n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

HIRUGARRENIK. Matrizeak berdindu behar dira, elementuz elementu, eta lortutako ekuazio-sistema ebatzi behar da.

$$\left.\begin{aligned} n &= 2 \\ -2m + n &= 0 \\ 2m - n &= 0 \\ \cancel{n = 2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{n = 2} -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$$

Laugarren ekuazioa kendu behar da, lehenengoaren berdina baita.

Lehenengo bi ekuazioetatik $m = 1$ eta $n = 2$ soluzioa ateratzen da.

Soluzio hori gainerako ekuazioetan baliozkoa den aztertu behar da. Ez bada, sistemak ez luke soluziorik izango eta, beraz, ezta problemak ere.

$$2m - n = 0 \xrightarrow{m = 1, n = 2} 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

Soluzioa baliozkoa da; beraz, $m = 1$ eta $n = 2$.

PRAKTIKATU

37. Kalkulatu α eta β balioak, $A^3 = \alpha A + \beta I$ izateko.

Hau da *A* matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

Hau da *I* matrizea: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Eragiketak matrizeekin

Problemak ebaztea matrizeak erabiliz

Matrize honetan jatetxe bati bi enpresak, E_1-k eta E_2-k, hiru produktu, P_1, P_2 eta P_3, aleko zer preziotan (eurotan) eskaintzen dizkioten azaltzen da.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrize-eragiketak erabiliz, kalkulatu zer enpresari egingo zeniokeen eskabide hauetako bakoitza:

a) P_1 produktuaren 8 ale, P_2 produktuaren 5 ale, eta P_3 produktuaren 12 ale.

b) P_1 produktuaren 10 ale, P_2 produktuaren 15 ale, eta P_3 produktuaren 7 ale.

LEHENIK. Matrizeek ematen duten informazioa interpretatu behar da.

Enpresak→ E_1 E_2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to P_1 \text{ produktuaren prezioa enpresa bakoitzean} \\ \to P_2 \text{ produktuaren prezioa enpresa bakoitzean} \\ \to P_3 \text{ produktuaren prezioa enpresa bakoitzean} \end{matrix}$$

a) $B = (8 \quad 5 \quad 12) \to$ Produktu bakoitzetik eskatutako aleak

b) $C = (10 \quad 15 \quad 7) \to$ Produktu bakoitzetik eskatutako aleak

BIGARRENIK. Problema ebazteko eragiketak egin eta soluzioa interpretatu behar da.

a) $B \cdot A = (8 \quad 5 \quad 12) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181 \quad 164)$

Eskabidearen guztizko prezioa E_1-en

Eskabidearen guztizko prezioa E_2-n

Eskabidea merkeagoa izango da E_2 enpresan.

b) $C \cdot A = (10 \quad 15 \quad 7) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198 \quad 219)$

Eskabidearen guztizko prezioa E_1-en

Eskabidearen guztizko prezioa E_2-n

Eskabidea merkeagoa izango da E_1 enpresan.

PRAKTIKATU

38. Matrize honetan, E_1, E_2 eta E_3 enpresetatik datozen A, B, C eta D lau salgairen prezioak daude adierazita, eurotan.

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 46 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Eskabide bat $C = (x \quad y \quad z \quad t)$ matrize-errenkada batek adierazten badu, zer adierazten du CP biderketaren emaitzako elementuetako bakoitzak? A produktuaren 25 ale, B produktuaren 30, C produktuaren 60 eta D produktuaren 75 ale erosi nahi badugu, zer enpresak eskaintzen du preziorik onena?

Eragiketak matrizeekin

Taulak matrize moduan idaztea

Jostailuak egiten dituen enpresa batek hiru jostailu mota egiten ditu: T_1, T_2 eta T_3. Beheko taulan adierazi dira jostailu bakoitzaren kostua eta enpresak haietako bakoitzarekin eskuratzen duen diru-sarrera.

	T_1	T_2	T_3
Kostua	4 €	6 €	9 €
Diru-sarrera	10 €	16 €	24 €

Guztira, T_1 motako 4.500 jostailu saldu dira, T_2 motako 3.500, eta T_3 motako 1.500.

Zehaztu K, D eta S matrizeak, jakinda K kostuen matrizea eta D diru-sarreren matrizea diagonalak direla, eta S salmenten matrizea errenkada-matrizea dela. Kalkulatu, aurreko matrizeak erabiliz, hiru jostailu moten urteko kostuak, urteko diru-sarrerak eta urteko irabaziak adierazten dituzten matrizeak.

LEHENIK. Dugun informazioarekin matrizeak zehaztu behar dira.

K eta D matrizeak diagonalak dira $\to K = K = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

S errenkada-matrizea da $\to S = (4.500 \quad 3.500 \quad 1.500)$

BIGARRENIK. Beste matrizeak zehaztu behar dira eragiketen bidez.

Kostuak = Urteko salmentak · Jostailuaren kostua = SK

Diru-sarrerak = Urteko salmentak · Jostailuaren diru-sarrera = SD

Irabaziak = Urteko diru-sarrerak − Urteko salmentak = $SD - SK$

HIRUGARRENIK. Eragiketak egin behar dira.

Kostuak $= SK = (4.500 \quad 3.500 \quad 1.500) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$
$= (18.000 \quad 21.000 \quad 13.500)$

Diru-sarrerak $= SD = (4.500 \quad 3.500 \quad 1.500) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} =$
$= (45.000 \quad 56.000 \quad 36.000)$

Irabaziak $= SD - SK =$
$= (45.000 \quad 56.000 \quad 36.000) - (18.000 \quad 21.000 \quad 13.500) =$
$= (27.000 \quad 35.000 \quad 22.500)$

PRAKTIKATU

39. Loradenda batek hiru motako lore sortak egiten ditu. Denda bakoitzak duen lore kopurua taulan adierazi da.

	I. mota	II. mota	III. mota
Krabelinak	12	4	8
Arrosak	10	15	5
Tulipak	3	6	12

Zehaztu, matrizeak erabiliz, lore mota bakoitzeko zenbat behar diren I. motako 87 sorta, II. motako 27, eta III. motako 53 sorta egiteko.

Matrize baten heina

Parametro baten mende dagoen matrize baten heina kalkulatzea

Eztabaidatu, $m \in \mathbb{R}$ parametroaren mende, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

LEHENIK. Gaussen metodoa aplikatu behar da, matrizearen heina kalkulatzeko.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3 = E_3 - 2E_1]{E_2 = E_2 - mE_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & -1-m^2 \\ 0 & -1 & 1-2m \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2 \leftrightarrow E_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1-2m \\ 0 & 0 & -1-m^2 \end{pmatrix}$$

BIGARRENIK. Matrizeak parametroaren mende duen errenkada ez-nuluen kopurua aztertu behar da.

- Lehenengo eta bigarren errenkada beti ez-nuluak dira.
- Hirugarren errenkada nulua da baldin $-1 - m^2 = 0 \to m^2 = -1$.

Ez du soluziorik $m \in \mathbb{R}$-ren inolako baliotarako. Beraz, hirugarren errenkada inoiz ez da nulua.

Heina $(A) = 3$, $m \in \mathbb{R}$-ren edozein baliotarako.

PRAKTIKATU

40. Matrize hau dugu $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \\ 3 & 2-a & 3 & 3+a \end{pmatrix}$.

Aztertu, a parametroaren mende, matrizearen heina.

Alderantzizko matrizea

Parametro baten mende dagoen matrize baten alderantzizkoa kalkulatzea

Adierazi noiz den alderantzikagarria $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}$.

LEHENIK. Matrizearen heina kalkulatu behar da

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3 = E_3 - (a-1)E_1]{E_2 = E_2 - E_1} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & -a^2+2a & -a^2+a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_2 \leftrightarrow E_3]{} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & -a^2+2a & -a^2+a+2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Diagonaleko elementuak aztertu behar dira.

- Hirugarren errenkadan, baldin $1 - a = 0 \to a = 1$
- Bigarren errenkadan, baldin $-a^2 + a = 0$

$$-a^2 + a = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Lehenengo errenkadan, $1 \neq 0$

Beraz: Baldin $a = 1 \to$ Heina $(A) = 2$
Baldin $a = 0 \to$ Heina $(A) = 2$
Baldin $a = 2 \to$ Heina $(A) = 2$

BIGARRENIK. Heinak eta ordenak berdinak izan behar dute.

Baldin $a = 0$, $a = 1$ edo $a = 2 \to$ Ez du alderantzizkorik.

PRAKTIKATU

41. Noiz da alderantzikagarria $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$?

Ekuazio matrizialak

Ekuazio matrizialen sistema bat ebaztea

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu sistema hau betetzen duten X eta Y matrizeak $\left.\begin{matrix} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{matrix}\right\}$.

LEHENIK. Sistema ebatzi behar da.

$$\left.\begin{matrix} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{matrix} 6X + 2Y = 2A \\ 4X + 2Y = B \end{matrix}\right\}$$

$$2X = 2A - B$$

$$X = A - \frac{1}{2}B \to Y = -2A + \frac{3}{2}B$$

BIGARRENIK. X eta Y kalkulatu behar dira.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

PRAKTIKATU

42. Kalkulatu 2 ordenako X eta Y matrize karratuak, $\left.\begin{matrix} 2X + Y = A^2 \\ X - Y = A^{-1} \end{matrix}\right\}$ sistema ebazteko, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ izanik.

Matrizeak. Eragiketak matrizeekin

43. Idatzi, matrize mota bakoitzerako, dimentsio desberdineko bi adibide.

a) Errenkada-matrizea.
b) Zutabe-matrizea.
c) Matrize diagonala.
d) Identitate-matrizea.
e) Matrize goi-triangeluarra.
f) Matrize behe-triangeluarra.

44. Kalkulatu 2 ordenako matrize goi-triangeluarra, diagonal nagusiko elementuak 1 dituena eta elementu guztien batuketaren emaitza 6 duena.

45. Kalkulatu x-ren eta y-ren balioak, matrize hauek berdinak izan daitezen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x+3 \\ 3 & x & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 3 & 2y-5 & -4 \end{pmatrix}$$

46. Egin eragiketa hauek $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrizeekin:

a) $A + B$
b) $A - B$
c) $A - 2B$
d) $2A + 3B$

47. $A_{m\times n}$, $B_{m\times p}$ eta $C_{p\times n}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu matrize hauen dimentsioa:

a) $A^i \cdot B$
b) $A \cdot C^i$
c) $B \cdot C$
d) $C \cdot A^i$
e) $B \cdot C + A$
f) $B^i \cdot A - C$

48. $A_{2\times 3}$, $B_{6\times 2}$, $C_{3\times 4}$ eta $D_{4\times 3}$ matrizeak ditugu. Kalkulatu matrize hauen dimentsioa:

a) $A \cdot C$
b) $A^i \cdot B^i$
c) $C \cdot D$
d) $B \cdot A$
e) $C^i \cdot A^i \cdot B^i$
f) $(C^i + D) \cdot A^i$

49. Matrize hauek ditugu: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Kalkulatu:

a) $A \cdot B$
b) $B^i \cdot A$
c) A^2

50. Egiaztatu 3 ordenako matrize orok betetzen duela $(A^i)^i = A$ berdintza.

51. Egiaztatu matrize karratu batek $a_{ij} = i - j$ betetzen badu antisimetrikoa dela. Idatzi 3 ordenako matrize bat.

52. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Egin, ahal bada, biderketa hauek:

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$
c) $B \cdot C$
d) $C \cdot B^i$

53. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu, ahal bada, biderketa hauek:

a) $A \cdot B \cdot C$
b) $A \cdot C^i + B$
c) $B^i \cdot A - C$
d) $B \cdot C \cdot A$
e) $A^i \cdot C^i$
f) $B^i \cdot C^i$

54. Egiaztatu matrize hauek trukagarriak direla:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

55. Adierazi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin trukagarriak diren matrize guztien adierazpen orokorra.

56. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea dugu. Adierazi baldintza hauek betetzen dituen B matrize bat: A matrizearekin trukagarria da, goi-triangeluarra da, eta diagonal nagusiko elementuen batura 2 da.

57. Matrize hauek ditugu: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Egin honako hau:

a) Egiaztatu A eta B trukagarriak direla.
b) Adierazi A matrizearekin trukagarriak diren matrize guztien adierazpen orokorra.

58. C matrizea $a, b \in \mathbb{R}$ baldintza betetzen duten $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ formako matrize guztien adierazpena da. Egiaztatu horrelako bi matrize beti trukagarriak direla.

59. Egiaztatu batuketa honetan matrizeen arteko biderketaren banatze-propietatea betetzen dela:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Erabili matrize hauek:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

60. Kalkulatu zer balio izan behar duen t koefizienteak, baldintza hau bete dadin:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

61. Kalkulatu zer balio izan behar duten x, y eta z-k, berdintza hau bete dadin:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

62. Kalkulatu zer balio izan behar duen x-k, hau betetzeko:

$$\begin{pmatrix} x^2+3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4-4x & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

63. Kalkulatu zer balio izan behar duen x-k, berdintza hau betetzeko:

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

64. Aurkitu $\lambda \neq 0$ den zenbaki erreal bat eta 2×2 dimentsioko B matrize ez-nulu guztiak, baldintza hau betetzen dutenak:

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

65. Kalkulatu α $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ matrizean, $AA^i = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}$ bada.

66. A eta B matrizeak 3 ordenako matrize karratuak dira, eta A matrize diagonal bat da. Esan al dezakegu A eta B matrizeak trukagarriak direla biderketarekiko. Nolakoa izan beharko luke A matrizeak, hala izateko?

67. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea dugu. Kalkulatu $A \cdot B = B \cdot A^i$ baldintza betetzen duten B matrizeak.

68. Adierazi $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ forma duten eta $M^2 - 2M = 3I$ ekuazioa betetzen duten M matrize guztiak. I identitate-matrizea da.

69. Kalkulatu zer balio izan ditzakeen m elementuak, $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizeak $X^2 - 4X + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ekuazioa bete dezan. Ekuazioan, I identitate-matrizea da.

70. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu x-ren balioa, berdintza hau bete dadin:

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

71. Egiaztatu bete egiten dela $(A \cdot B)^i = B^i \cdot A^i$ propietatea, matrize hauetarako.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

72. $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$ matrizea dugu. Kalkulatu zer balio izan behar dituzten m eta n koefizienteek, $(I + A)^3 = mI + nA$ betetzeko. I identitate-matrizea da.

73. Kalkulatu α-ren eta β-ren zer baliok betetzen duten $A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0$ ekuazioa, jakinda 2 ordenako identitate-matrizea dela I eta $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dela.

74. Kalkulatu B matrize bat, jakinda lehenengo errenkada (2, 0) dela eta $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dela. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ da.

75. Aztertu ea matrize hauek trukatze-propietatea betetzen duten biderketarekiko:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

76. Kalkulatu $A^2 = B$ berdintza betetzen duten A matrize antisimetriko guztiak, jakinda hau dela B matrizea:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

77. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Kalkulatu $(A + B)^2$.

b) Kalkulatu $A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$.

c) Zer baldintza bete beharko lukete A eta B matrizeek $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$ betetzeko? Arrazoitu.

78. Kalkulatu $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$-rekin trukagarriak diren $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ formako matrize guztiak. Ondoren, adierazi baldintza hauek betetzen dituen matrizea: diagonal nagusiko elementu guztien batura 5 izatea, eta $a_{11} = -a_{12}$.

79. Kalkulatu $X = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ formako matrize guztiak, $X^2 = I$ berdintza betetzen dutenak. I identitate-matrizea da.

80. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu A^{41}.

81. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu $A^{2.000}$.

82. Badakigu A matrizeak $A^2 = 2A - I$ betetzen duela (I identitate-matrizea da).
Kalkulatu A matrizearen n. berbidura.

83. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

a) Egiaztatu A eta B trukagarriak direla.

b) Kalkulatu A^n eta B^n.

84. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Egin honako hau:

a) Kalkulatu A-rekin trukagarriak diren B matrize guztiak.

b) Kalkulatu A-ren n. berbidura.

85. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu A^2, A^3, A^4 eta A^5 matrizeak. Kalkulatu, arrazoituz, A^n, $n > 5$ izanik.

86. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu honako hau:

a) A-rekin trukagarriak diren M matrize guztiak.

b) A^4 eta A^n.

87. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ eta $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu, non $a, b \in \mathbb{R}$.
Kalkulatu.

a) M^n, baldin $n = 1, 2, 3\ldots$

b) $M^{100} = V$ betetzen duten M matrize guztiak.

88. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu:

a) m eta n konstanteak $A^2 = mA + nI$ betetzen dutenak. I identitate-matrizea da.

b) A^5, aurreko ataleko adierazpena soilik erabiliz, eta A^3 eta A^4 kalkulatu gabe.

89. Matrize karratu bat idenpotentea dela esaten da haren berbidura haren berbera bada; hau da, $A^2 = A$ bada.

a) Idatzi 3 ordenako matrize bat, unitate-matrizearen eta matrize nuluaren desberdina eta idenpotentea dena.

b) Kalkulatu zer balio izan behar duen m-k $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix}$ matrizea idenpotentea izateko.

c) Kalkulatu idenpotenteak diren $\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}$ motako matrize guztiak.

90. A matrize karratua dugula, haren aztarna, $Az(A)$, diagonal nagusiko elementuen baturari esaten zaio.

a) Egiaztatu edozein A eta B matrize karratutarako hau betetzen dela: $Az(A \cdot B) = Az(B \cdot A)$.

b) Aplikatu aurreko emaitza, a kalkulatzeko, jakinda A eta B matrizeak karratuak direla eta $AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ dela, eta $BA = \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

91. Matrize karratu bat nilpotentea dela esaten da haren berbiduretako bat matrize nulua bada. n zenbaki oso positibo txikiena bada $A^n = 0$ egiten duena, esaten da A matrizea n. mailako matrize nilpotentea dela.

a) Frogatu honako matrize hau 3. mailako matrize nilpotentea dela:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Hau da, $A^2 \neq 0$ eta $A^3 = 0$.

b) Kalkulatu 2. mailako $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ matrize nilpotente guztiak.

Matrize baten heina

92. Kalkulatu matrizeen heina.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

93. Kalkulatu matrizeen heina.

a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

94. Kalkulatu matrizearen heina.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{7}{2} & 4 & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

95. Kalkulatu a parametroaren balioa, matrizearen heina 2 izan dadin.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

96. Kalkulatu A matrizearen heina, m parametroaren balioen mende.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

97. $M = \begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix}$. matrizea daukagu. Eztabaidatu haren heina, a parametroaren mende.

98. Kalkulatu matrizearen heina, m parametroaren balioen mende.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{-1}{2} & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m \end{pmatrix}$$

99. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu A^n matrizearen heina. n-ren mende al dago heina?

100. $A = \begin{pmatrix} d & a & a \\ b & d & 3 \\ c-4 & c & d \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. a, b, c eta d zenbaki errealak dira.

a) Kalkulatu a, b, c eta d-ren balioak, A matrizea antisimetrikoa izan dadin.

b) $a = b = c = 0$ bada, adierazi A-ren heina, d parametroaren mende

101. Kalkulatu A matrizearen balioak, a parametroaren mende.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & 3 & -2 \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Alderantzizko matrizea

102. Kalkulatu matrize hauen alderantzizko matrizea.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

103. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dauzkagu. Kalkulatu.

a) A^{-1} eta B^{-1} b) $(A \cdot B)^{-1}$

Egiaztatu hau betetzen dela: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

104. Matrize hau daukagu: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Kalkulatu.

a) A^{-1} b) $(A^i)^{-1}$

Egiaztatu hau betetzen dela: $(A^{-1})^i = (A^i)^{-1}$.

105. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ditugu. Kalkulatu.

a) $(A^{-1})^{-1}$ b) $B^{-1} \cdot B$

Edozein matrizerekin lortzen al dira emaitza berberak?

106. Kalkulatu $A^{-1} = 2I - A$ betetzen duten $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ formako matrize guztiak. 2 ordenako identitate-matrizea da I.

107. Esaten da n ordenako bi matrize karratu, A eta B, antzekoak direla hau betetzen duen M matrize alderantzikagarri bat badago: $B = M^{-1} \cdot A \cdot M$, non M^{-1} matrizea M-ren alderantzizko matrizea den.

Adierazi matrize hauek antzekoak diren ala ez.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

108. Hartu kontuan $A^2 - 3I = 2A$ ekuazioa betetzen duen A matrizea, non I identitate-matrizea den.

a) Aztertu ea badagoen A-ren alderantzizko matrizea eta, ahal bada, adierazi A^{-1} matrizea, A-ren eta I-ren mende.

b) Adierazi $A^2 - 3I = 2A$ ekuazioa betetzen duten $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ formako A matrize guztiak.

109. Badakigu A matrizearen alderantzizkoa $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dela, eta AB matrizearen alderantzizkoa $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ dela. Kalkulatu B matrizea.

110. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Egin eskatzen zaizuna.

a) Adierazi A matrizearekin trukagarriak diren matrizeen multzoa.

b) Kalkulatu A^n eta ondorioztatu, hartatik, A^{-1}.

111. 2 ordenako matrize generikoa da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizea.

a) Adierazi matrize horren alderantzizkoaren adierazpen generikoa.

b) Arrazoitu zer kasutan diren alderantzikagarriak 2 ordenako matrizeak.

112. Kalkulatu A^{-1} eta A^n, non A matrizea 3 ordenako matrize bat den, elementu guztiak nuluak dituena, hauek izan ezik: $a_{11} = a_{23} = a_{32} = \frac{1}{5}$.

113. A matrize karratu batek $A^2 + 7A = I$ betetzen du, non I unitate-matrizea den. Kalkulatu A^{-1} matrizea, A-ren mende.

114. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Kalkulatu:

a) a, b eta c konstanteak, $A^i = A^{-1}$ berdintza bete dadin.

b) A^4 matrizea, lortutako a, b eta c balioetarako.

115. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu.

a) Egiaztatu $A^2 = 2I$ dela.

b) Kalkulatu A^{-1}.

c) Kalkulatu A^{12} eta A^{12}-ren alderantzizkoa.

Ekuazio matrizialak

116. Bakandu X matrizea ekuazio matrizial hauetako bakoitzean.

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) $AX + B = C$

d) $AX + A = B$

e) $A^{-1}X = B$

f) $AXB = C$

g) $A^iX = B$

h) $AXA = A^2 + I$

117. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu ekuazio hau betetzen duen 2 ordenako X matrize bat:

$$X + A = B$$

Zer motatakoa da lortutako X matrizea?

118. Kalkulatu $A + X = 2B$ berdintza betetzen duen X matrizea, non $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diren.

119. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu $2A - 5X = B$ betetzen duen X matrizea.

120. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adierazi berdintza hau betetzen duen X matrize bat:

$$A - A^2 = A \cdot B - X$$

121. Ebatzi ekuazio matrizial hau:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

122. Adierazi 2 ordenako X matrize bat, hau betetzen duena:

$A + X = AX + XA$, non $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ den.

123. Ebatzi $XA + AX = B$ ekuazio matriziala, non $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ diren.

124. Adierazi, baldin badago, ekuazio matrizial hau betetzen duen 2 ordenako D matrize bat.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

125. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu $AX = B$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

126. Kalkulatu $(X - I)B = A$ ekuazioa betetzen duen X matrizea, non A eta B matrize hauek diren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

127. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu. Egin eskatutakoa.

a) Kalkulatu m-ren zer baliotarako duen soluzioa $AX - A^i = A$ ekuazioak.

b) Ebatzi $AX - A^i = A$ baldin $m = 0$ bada.

128. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ matrizeak ditugu.

Kalkulatu $X + XA = B^i$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

129. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea daukagu.

a) Kalkulatu A^{-1} matrizea.

b) Ebatzi $AXA = A^2 + A$ ekuazioa.

130. Kalkulatu $XB + A = B + A^2$ betetzen duen X matrizea, jakinda A eta B matrize hauek direla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

131. Ebatzi ekuazio matrizialen sistema hauek:

a) $\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} X + 3Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

132. Kalkulatu A eta B matrizeak, jakinda baldintza hauek betetzen dituztela:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

133. Kalkulatu $2X + Y = A$ eta $3X + 2Y = B$ ekuazioak betetzen dituzten X eta Y matrizeak, jakinda A eta B matrize hauek direla:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

134. A, B eta C matrize hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu ekuazio matrizialen sistema hau betetzen duten X eta Y matrizeak.

$$\left.\begin{array}{r} AX + BY = C \\ AX = Y \end{array}\right\}$$

135. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ ditugu.

Kalkulatu ekuazio hauek betetzen dituzten X eta Y matrizeak.

$$\left.\begin{array}{r} 2X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{array}\right\}$$

136. Hauek dira A eta B matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Zer balio izan behar du μ-k, $A^{-1} = \frac{1}{6}A$ izateko?

b) $\mu = -3$ izanda, kalkulatu $A^i \cdot X = B$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

137. Matrize hau dugu: $M = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Kalkulatu α parametroaren balioak, $M^2 + 3M$ matrizea alderantzikagarria izan ez dadin.

b) $\alpha = 0$ izanda, ebatzi ekuazio matrizial hau: $MX + M = 2I$.

138. Matrize hau daukagu: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Kalkulatu A^n.

b) Kalkulatu ekuazio hau betetzen duen X matrizea:

$$X \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

139. Matrize hauek ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Aztertu matrize bakoitzaren heina, a parametroaren mende.

b) $a = 0$ izanda, kalkulatu $AX = B$ ekuazioa betetzen duen X matrizea.

Problemak matrizeekin

140. Idatzi taula moduan enuntziatu hau, eta adierazi datuak matrize moduan.

Familia batek, irailean 400 € gastatu zituen janaritan, eta 120 € ur-, argi- eta gas-horniduran; urrian, berriz, 500 € janaritan eta 180 € ur-, argi- eta gas-horniduran; eta azaroan, 350 € janaritan eta 250 € ur-, argi- eta gas-horniduran.

141. Autobus-enpresa batek hiru linea ditu: *A*, *B eta C*. Astelehenean *A* lineako 5 autobus atera ziren, *B* lineako 3 autobus, eta *C* lineako 4. Asteartean *A* lineako 2 autobus atera ziren, *B* lineako autobus bat, eta *C* lineako 5. Asteazkenean, *A* lineako autobus bat atera zen, *B* lineako 3 autobus, eta *C* lineako 5. Adierazi matrize moduan.

142. Enpresa batek hiru salgai ekoizten ditu: A, B eta C. Aleko kostuak 32 €, 46 € eta 71 € dira, hurrenez hurren, eta aleko salmenta-prezioak 53 €, 82 € eta 140 €. Urtean salgai horien 2.100, 1.400 eta 900 ale saltzen dira hurrenez hurren. Adierazi aleko kostuen errenkada-matrizea, aleko salmenten errenkada-matrizea, aleko etekinen errenkada-matrizea, saldutako aleen zutabe-matrizea eta lortutako urteko etekinak.

143. Hotel-kate batek hiru hotel ditu hiri jakin batean: Eden hotela, Paraiso hotela eta Oasis Spa. Hotel bakoitzak hiru gela mota ditu: luxuzkoa, gela bikoitza eta banako gela. Eden hotelak luxuzko 6 gela, 30 gela bikoitz eta banako 10 gela ditu. Paraiso hotelak, 4, 50 eta 10, hurrenez hurren, eta Oasis Spak, 4, 50 eta 8. Hauek dira gelako gau bakoitzeko prezioak: 120 €, luxuzko gela; 80 €, gela bikoitza; eta 50 €, banako gela.

a) Bildu datuak bi matrizetan, eta adierazi zer esan nahi duen errenkada eta zutabe bakoitzak.

b) Adierazi matrize baten bidez hotel bakoitzean gau batean lortutako diru-sarrerak hotelak guztiz beteta badaude.

144. Lantegi batek bi torloju mota ekoizten ditu, torloju lauak eta izar-buruko torlojuak. Torloju mota bakoitzeko hiru modelo egiten ditu: *L*, *M* eta *S*. Taula honetan adierazita dago astean egiten dituen torlojuen kopurua, milaka aletan.

	L mota	*M* mota	*S* mota
Torloju lauak	2	7	4
Izar-buruko torlojuak	3	5	6

L motako torloju akastunak %4 dira, *M* motakoak %2, eta *S* motakoak %1. Kalkulatu, matrize bidez, astean akatsik gabeko zenbat torloju lau eta izar-buruko torloju ekoizten dituen lantegiak.

145. Lantegi batek bi produktu mota ekoizten ditu, *X* eta *Y*, eta hiru enpresari saltzen dizkie, *A*, *B* eta *C* enpresei. Hasieran, produktu bakoitzeko 1.000 ale saltzen zizkion enpresa bakoitzari, baina gaur *A* enpresak *X* produktuaren 600 ale eta *Y* produktuaren 300 ale jaso ditu; *B* enpresak, *X*-ren 400 ale eta *Y*-ren 800; eta *C* enpresak *X*-ren 900 ale eta *Y*-ren 700. Adierazi matrize baten bidez enpresa horiei egindako banaketan izan diren murrizketak, ehunekotan.

ZERTARAKO BALIO DUTE MATRIZEEK?

Leku batetik beste batera joateko ibilbide egokiena aukeratzeko

Demagun mapa bat dugula eta hartan zenbait helmuga eta haietara joateko har ditzakegun bideak adierazita ditugula. Nola aukeratzen du gure GPS nabigatzaileak ibilbiderik egokiena? Bada nabigatzaileak lekuak puntu moduan adierazten ditu (erpin deituko diegu), eta leku horiek lotzen dituzten bideak, erpinak lotzen dituzten ertz moduan. Horrela, guk xehetasun guztiz ikusten dugun mapa nabigatzaileak krokis soil moduan ikusten du (grafo esaten zaio).

Egoera hori n ordenako matrize karratu moduan deskriba daiteke. Hartan, n grafoak dituen erpinak dira, eta a_{ij} elementu bakoitza, i erpinetik j erpinera doazen ertzen kopurua. Matrize horri grafoaren auzokidetasun-matrizea deritzo. Hona hemen aurreko grafoaren matrizea:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizearen berbiduraren ij elementuak i erpinaren eta j erpinaren artean dauden bi ertzeko bideen kopurua adierazten du.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esate baterako, 2 ertzeko bide bat dago 1. erpinetik 4. erpinera, eta 2 ertzeko 3 bide daude 2. erpinetik 2. erpinera.

M^3 matrizeak hiru ertzeko bideak adierazten ditu; M^4 matrizeak, 4. ertzeko bideak; eta horrela hurrenez hurren.

Hala, nabigatzaileak bide posible guztiak kalkulatzen ditu, eta, ertzen luzera batuta, bide laburrena zein den adieraz dezake, bai eta zein den azkarrena ere, ertz bakoitzeko denborak batuz.

IRAKURRI ETA ULERTU

1. Mapa bateko bi puntu lotzen dituen errepidea zuzena ez bada eta 4 bihurgune handi baditu, zenbat erpin adierazi beharko ditugu grafoan?

INTERPRETATU

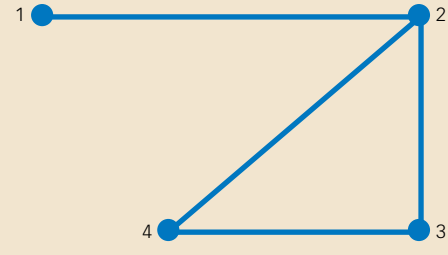
2. Sailkatu testuan agertzen diren matrizeak, formaren arabera eta elementuen posizioaren arabera.

HAUSNARTU

3. Bide bat sinplea dela esaten dugu bi aldiz ez bada pasatzen erpin beretik. 5 erpin dituen grafo bat baldin badugu, zenbat ertz izan ditzake gehienez?

APLIKATU

4. Matrize hauek ditugu. Marraztu matrizeak auzokidetasun-matrizetzat dituen grafo bat.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Grafo hau aintzat hartuta, kalkulatu hiru ertzeko zenbat bide dauden 2. erpinaren eta 4. erpinaren artean.