



Fisika

IKERTU SAILA

Batxilergoko 2. mailarako **Fisika** liburua Zubia Editoriala, S. L.ren eta eta Santillana Educación, S. L.ren Hezkuntza Argitalpenetarako Sailean **Joseba Santxo Uriarte** eta **Teresa Grence Ruizen** zuzendaritzapean sortu, taxutu eta gauzaturiko talde-lana da.

Liburu honen prestatze-lanean honako talde honek esku hartu du:

Testua:

M.^a del Carmen Vidal Fernández

David Sánchez Gómez

Lanbide-profilak:

José M.^a Prada Carrillo

EDIZIOA

Ainhoa Basterretxea Llona

David Sánchez Gómez

Laura Muñoz Ceballos

Bárbara Braña Borja

PROIEKTUAREN ZUZENDARITZA

Joseba Santxo Uriarte

Antonio Brandi Fernández

Liburu honetako jarduerak ezin dira inola ere liburuan bertan egin. Jardueretan proposatzen ditugun taulak, eskemak eta gainerako baliabideak ikasleak koadernoan egin beharrekoen ereduak baino ez dira.

Unitateen eskema

Unitatearen sarrerako orrialdea

Unitateen hasieran, edukien gainean hausnartzeko eta arreta bereganatzeko irudi bat dago.

Unitateko edukiak. Edukien azalpenen eta teknika edo prozeduren eskema bat.

Irudia. Unitateko edukiak aurkeztuko dituen argazki bat.

Testua. Edukien garrantziari buruzko sarrerako gogoeta bat.



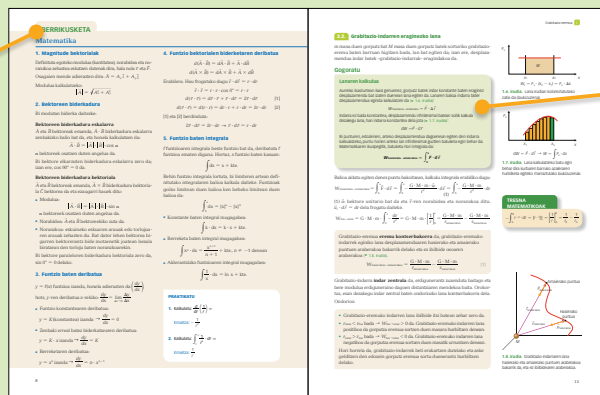
Unitatearen izenburua

Hasteko. Gaiaren gaineko gogoeta edo eztabaida eragingo duten zenbait galdera.

Edukien orrialdeak

Edukien garapena zenbait elementuren bidez dago egituratuta.

Berrikusketa. Unitateko edukiak jorratzen hasi aurretik, Matematikako edo Fisika eta Kimikako zenbait eduki gogoratuko dira, gaia ulertzeko ezinbestekoak.

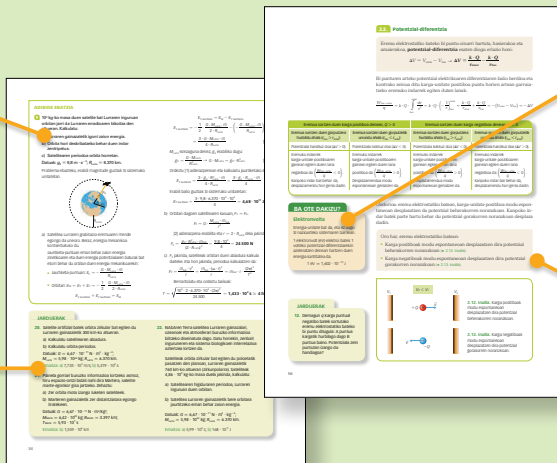


Gogoratu. Atal honetan, aurreko ikasturteetan edo unitateetan landutako edukien berri ematen da.

811487_Unidad 01.pdf:7

Adibide ebatiak. Unitate osoan barrena, adibide ebati ugari daude –zenbakizkoak eta ez-zenbakizkoak–, azalduko edukiak praktikan jartzeko lagungarriak.

Jarduerak behealdean. Inguruan azaldu diren edukiak lantzeko jarduerak dira.



Ba ote dakizu? Ikasgaiarekin lotura duten arren, unitatearen garapenerako garrantzitsuak ez diren edukiak hartzen ditu barnean.

Nabarmenak. Funtsezko edukiak eta definizioak koloretako hondo batekin daude nabarmenduta.

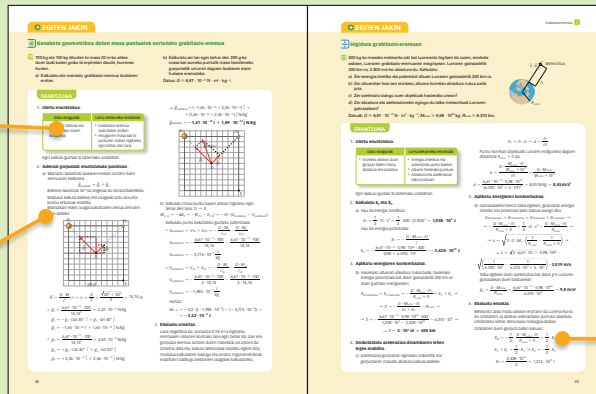
EGITEN JAKIN

Atal honetan, unitateko edukiak barneratu direla erakusteko ondo jakin behar diren prozedurak jasotzen dira.

Ulertu enuntziatua.

Eskema erraz baten bitartez, ondo ulertuz irakurriko da proposatutako jarduera.

Garapena. Urratsez urrats, proposatutako jarduera garatzeko argibideak emango dira.



Ebaluatu emaitza.

Kasu bakoitzean, lortutako emaitza ebaluatuko da, jardueraren testuingurua kontuan hartuta.

Amaierako jarduerak

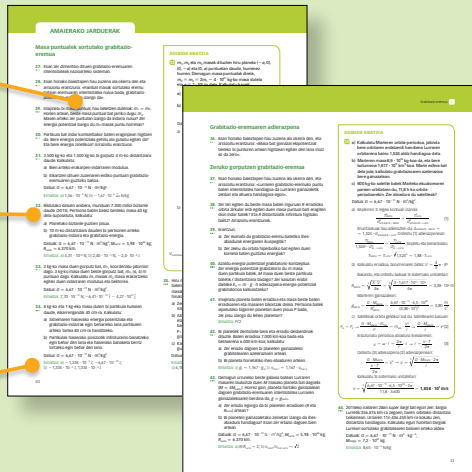
Ikasitakoa finkatzeko jarduera-bilduma.

Atalak. Jarduerak unitateko edukiak kontuan hartuta daude sailkatuta.

Zailtasun-maila. Kode honen bitartez adierazten da jardueren zailtasun-maila:

●●● Erraza ●● Tartekoa ●●● Zaila

Emaitza. Zenbakizko emaitza duten jarduerak beste lerro batean dute erantzuna. Hala, ikasleen lana erraztuko da.



Laburpena

Unitatean landutako eduki garrantzitsuenen errepasoa.

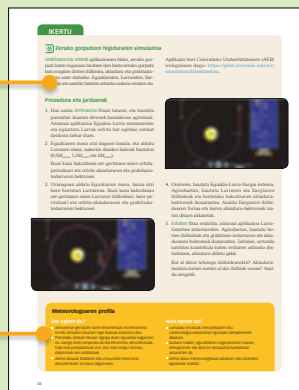


Ikertu

Unitate bakoitzaren amaieran, lan praktikoari lotutako orrialde bat dago.

Unitate bakoitzaren amaierako orrialde batean, laborategiko esperimendu bat edo animazio interaktibo batekin egiteko lan bat proposatzen da.

Unitate bakoitzaren amaieran, zenbait lanbide ageri dira, ikasitakoari lotutakoak.



Oinarrizko gaitasunak

Liburuan zehar, HEZIBERRIren arabera oinarrizko gaitasunen ikurrak ikusiko dituzu zenbait jardueraren ondoan. Ikur horiek kasu bakoitzean zer gaitasun lantzen den adierazten dituzte.

Arloko gaitasunak

- Hizkuntza- eta literatura-komunikaziorako gaitasuna
- Matematikarako gaitasuna
- Zientziarako gaitasuna
- Teknologiarako gaitasuna
- Gizarterako eta herritartasunerako gaitasuna
- Arterako gaitasuna
- Mugimendurako gaitasuna

Zehar gaitasunak

- Hitzez, hitzik gabe eta era digitalean komunikatzeko gaitasuna
- Ikasten eta pentsatzen ikasteko gaitasuna
- Elkarbizitzarako gaitasuna
- Ekimenerako eta ekintzaile-sena garatzeko gaitasuna
- Izaten ikasteko gaitasuna

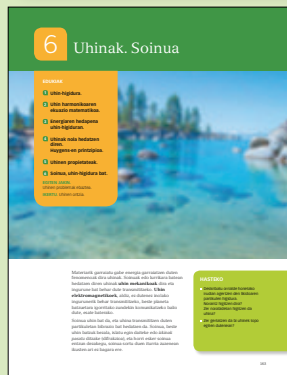
[illegible][illegible][illegible][illegible]

1. Grabitazio-eremua	7
1. Eremu kontzeptua	10
2. Masa puntualek sortutako grabitazio-eremua	11
3. Grabitazio-eremuaren adierazpena	23
4. Zeruko gorputzen grabitazio-eremua	25
5. Planeten eta sateliteen higidura	31
6. Bidaiak espazioan barrena	36
EGITEN JAKIN	38
AMAIERAKO JARDUERAK	40
IkERTU. Zeruko gorputzen higiduraren simulazioa	44

2. Eremu elektrikoa	45
1. Eremu elektrostatikoa	48
2. Energia eta eremu elektrikoa	52
3. Potentzial elektrikoa.....	55
4. Eremu elektrostatiakoaren irudikapena.....	60
5. Grabitazio-eremua eta eremu elektrostatikoa: konparaziozko azterketa	62
6. Karga-banaketa jarraitu batek sortutako eremua	63
7. Kargatutako partikulen higidura eremu elektriko uniforme batean	71
EGITEN JAKIN	73
AMAIERAKO JARDUERAK	76
IKERTU. Eremu elektrikoei behatzea.....	80

3. Eremu magnetikoa	81
1. Eremu magnetikoa	83
2. Eremu magnetiko baten eragina higitzen den karga batean. Lorentzen legea	84
3. Kargadun partikulen higidura eremu magnetikoen barruan.....	86
4. Eremu magnetiko batek korronte-hari batean duen eragina ...	94
5. Kargak eta korronteeak sortutako eremu magnetikoa.....	96
6. Korronte multzoak sortutako eremu magnetikoa.....	103
7. Eremu magnetikoaren eta eremu elektrostatiokoaren arteko konparazioa	106
EGITEN JAKIN	107
AMAIERAKO JARDUERAK	109
IKERTU. Zenbait korrontek sortutako eremu magnetikoa. Lorentzen legea	112

4. Indukzio elektromagnetikoa	113
1. Indukzio elektromagnetikoa	115
2. Indukzio elektromagnetikoaren legeak	117
3. Indukzio elektromagnetikoaren erabilerak	126
4. Maxwellsen sintesia elektromagnetismorako	132
EGITEN JAKIN	133
AMAIERAKO JARDUERAK	135
IKERTU. Korrante indusituak sortzeko zenbait modu	138



5. Higidura harmoniko sinplea	139
1. Higidura harmoniko sinplea (HHS)	141
2. HHSaren zinetika	142
3. HHSaren dinamika	148
4. Indar elastikoa eta energia	151
5. Oszilazio behartuak. Erresonantzia	155
EGITEN JAKIN	156
AMAIERAKO JARDUERAK	158
IKERTU. Maltzuri baten konstante elastikoa eta oszilazio-periodoa ...	162
 6. Uhinak. Soinua	163
1. Uhin-higidura	166
2. Uhin harmonikoaren ekuazio matematikoa	167
3. Energiaren hedapena uhin-higiduran	173
4. Uhinak nola hedatzen diren. Huygens-en printzipioa	178
5. Uhinaren propietateak	179
6. Soinua, uhin-higidura bat.....	187
EGITEN JAKIN	199
AMAIERAKO JARDUERAK	201
IKERTU. Uhinaren ontzia	204
 7. Uhin elektromagnetikoak	205
1. Argiaren izaera: auzi historikoa	207
2. Argia uhin elektromagnetiko bat da.....	210
3. Espektrorik elektromagnetikoa	214
4. Argiaren fenomeno ondulatorioak	216
5. Kolorea.....	230
EGITEN JAKIN	232
AMAIERAKO JARDUERAK	235
IKERTU. Argiaren errefrakzioa	238
 8. Optika geometrikoa.....	239
1. Optika geometrikoa	241
2. Islapen bidezko irudiak	242
3. Errefrakzio bidezko irudiak	248
4. Tresna optikoak.....	258
5. Giza begia	261
EGITEN JAKIN	264
AMAIERAKO JARDUERAK	267
IKERTU. Leiar baten potentzia neurtzea	270
 9. Erlatibitatea	271
1. Fisika berri baten beharra	274
2. Erlatibitate bereziaren teoria.....	276
3. Energia erlatibista.....	284
EGITEN JAKIN	288
AMAIERAKO JARDUERAK	290
IKERTU. Muoiaren desintegrazioaren simulazioa.....	292



10. Fisika kuantikoa	293
1. Fisika klasikoak azaltzen ez duena	296
2. Bohrren eredu atomikoa	306
3. Mekanika kuantikoa	310
4. Fisika kuantikoaren erabilera	317
EGITEN JAKIN	321
AMAIERAKO JARDUERAK	323
Ikertu. Efektu fotoelektrikoaren simulazioa	326

11. Fisika nuklearra	327
1. Nukleo atomikoa	330
2. Erradioaktibitatea. Desintegrazio erradioaktiboak	332
3. Desintegrazio erradioaktiboaren zinetika	336
4. Erradioaktibitate artifiziala	338
5. Fisio eta fusio erreazio nuklearrak	339
6. Erradiazio ionizatzaileak	343
7. Prozesu nuklearren aplikazioak	344
EGITEN JAKIN	349
AMAIERAKO JARDUERAK	351
Ikertu. Desintegrazio erradioaktibo baten simulazioa	354

12. Partikulen fisika	355
1. Atomoak baino txikiagoak diren partikulak. Quarkak	358
2. Oinarritzko interakzioak	363
3. Eredu estandarra	365
4. Partikulen arteko interakzioak	340
5. Partikulen sorrera eta horien detekzioa	374
EGITEN JAKIN	379
AMAIERAKO JARDUERAK	381
Ikertu. Laino-ganbera baten simulazioa	384

13. Unibertsoaren historia	385
1. Unibertsoaren hedapena eta Big Bang-a	387
2. Big Bang-aren teoria indartzen duten froga esperimentalak	390
3. Unibertso goiztiarra eta partikulak	392
4. Materia iluna eta energia iluna	395
5. Eredu estandarra: indarguneak eta ahuldadeak	397
EGITEN JAKIN	399
AMAIERAKO JARDUERAK	401
Ikertu. Galaxien arteko interakzioa simulatzea	404

Eranskinak

I. Konstante fisikoen eta kimikoen taulak	405
II. Elementuen sistema periodikoa	406

1

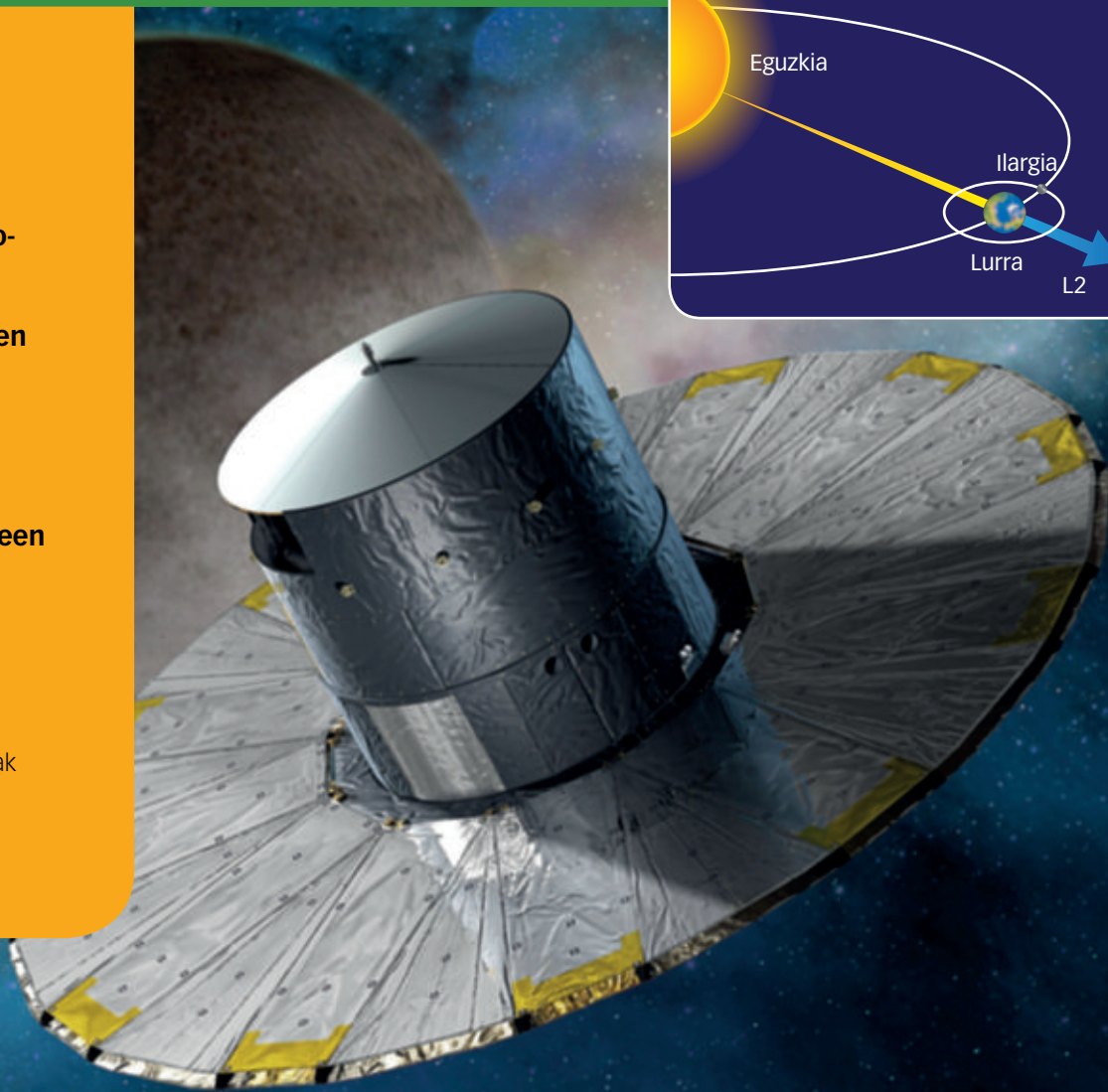
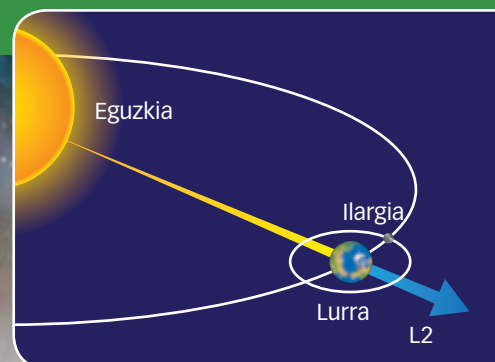
Grabitazio-eremua

EDUKIAK

- 1 Eremu kontzeptua.
- 2 Masa puntualek sortutako grabitazio-eremua.
- 3 Grabitazio-eremuaren adierazpena.
- 4 Zeruko gorputzen grabitazio-eremua.
- 5 Planeten eta sateliteen higidura.
- 6 Bidaiak espazioan barrena.

EGITEN JAKIN. Grabitazio-eremuekin lotutako problemak ebaztea.

IKERTU. Zeruko gorputzen higiduraren simulazioa.



Gaia zunda 2013. urtean jaurti zen espaziora, gure galaxiako, hots, Esne Bideko, milaka izar aztertzeko helburuarekin. Lagrange L2 izeneko espazioko puntu batean kokatu zen zunda, Lurra eta Eguzkia lotzen dituen lerroan, Lurraren kokalekutik harago, gure planetatik 1,5 milioi kilometrora. Puntu horretan egonda, zunda Lurrarekin modu sinkronizatuan biratzen da, eta horrenbestez, zeruko puntu berean dago beti.

Horrek abantaila bat du: errazagoa da tresna kalibratzea, eta hori gutxi balitz bezala, espazio-zunda Eguzkiaren erradiazioetik babestuta gelditzen da, tresnak uneoro Eguzkiaren kontrako aldera begira jar baitaitezke.



HASTEKO

- Eguzkiak eta Lurra egiten duten grabitazio-indarra baliogabetu egiten al da L2 puntuan?
- Eta Eguzkia eta Lurra lotzen dituen lerroko beste punturen batean?
- Orduan, zergatik gelditzen da Gaia zunda L2 puntuan?

Matematika

1. Magnitude bektorialak

Definituta egoteko modulua (kantitatea), norabidea eta noranzkoa zehaztea eskatzen dutenak dira, hala nola $\vec{v}$ eta $\vec{F}$.

Osagaien mende adierazten dira: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$

Modulua kalkulatzeko:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

2. Bektoreen biderkadura

Bi modutan biderka daitezke:

Bektoreen biderkadura eskalarra

$\vec{A}$ eta $\vec{B}$ bektoreak emanda, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ biderkadura eskalarra zenbakizko balio bat da, eta honela kalkulatzeko da:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

α bektoreek osatzen duten angelua da.

Bi bektore elkarzuten biderkadura eskalarra zero da; izan ere, $\cos 90^\circ = 0$ da.

Bektoreen biderkadura bektoriala

$\vec{A}$ eta $\vec{B}$ bektoreak emanda, $\vec{A} \times \vec{B}$ biderkadura bektoriala $\vec{C}$ bektorea da eta ezaugarri hauek ditu:

- Modulua:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \alpha$$

α bektoreek osatzen duten angelua da.

- Norabidea: $\vec{A}$ eta $\vec{B}$ bektoreekiko zuta da.
- Noranzkoa: eskuineko eskuaren arauak edo torlojuaren arauak zehazten du. Bat dator lehen bektorea bigarren bektorerantz bide motzenetik joatean bezala biratzean den torloju baten noranzkoarekin.

Bi bektore paraleloren biderkadura bektoriala zero da, $\sin 0^\circ = 0$ delako.

3. Funtzio baten deribatua

$y = f(x)$ funtzioa izanda, honela adierazten da $\left(\frac{dy}{dx}\right)$,

hots, y -ren deribatua x -rekiko: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Funtzio konstantearen deribatua:

$$y = K \text{ (konstantea) izanda } \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

- Zenbaki erreal batez biderkatzearen deribatua:

$$y = K \cdot x \text{ izanda } \rightarrow \frac{dy}{dx} = K$$

- Berreketaaren deribatua:

$$y = x^n \text{ izanda } \rightarrow \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

4. Funtzio bektorialen biderketaren deribatua

$$d(\vec{A} \cdot \vec{B}) = d\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot d\vec{B}$$

$$d(\vec{A} \times \vec{B}) = d\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times d\vec{B}$$

Erabilera. Hau frogatuko dugu $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r \cdot r \cdot \cos 0^\circ = r \cdot r$$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot d\vec{r} = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} \quad [1]$$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d(r \cdot r) = dr \cdot r + r \cdot dr = 2r \cdot dr \quad [2]$$

[1] eta [2] berdinduta:

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2r \cdot dr \rightarrow \vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$$

5. Funtzio baten integrala

f funtzioaren integrala beste funtzio bat da, deribatuta f funtzioa ematen diguna. Hortaz, x funtzio baten kasuan:

$$\int dx = x + \text{kte.}$$

Behin funtzio integrala lortuta, bi limiteren artean definitutako integralaren balioa kalkula daiteke. Funtzioak goiko limitean duen balioa ken beheko limitean duen balioa da:

$$\int_h^a dx = [x]^a - [x]^h$$

- Konstante baten integral mugagabea:

$$\int k \cdot dx = k \cdot x + \text{kte.}$$

- Berreketa baten integral mugagabea:

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{kte.}, n \neq -1 \text{ denean}$$

- Alderantzizko funtzioaren integral mugagabea:

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + \text{kte.}$$

PRAKTIKATU

1. Kalkulatu: $\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) =$

Emitza: $-\frac{1}{r^2}$

2. Kalkulatu: $\int_r^\infty \frac{1}{r^2} \cdot dr =$

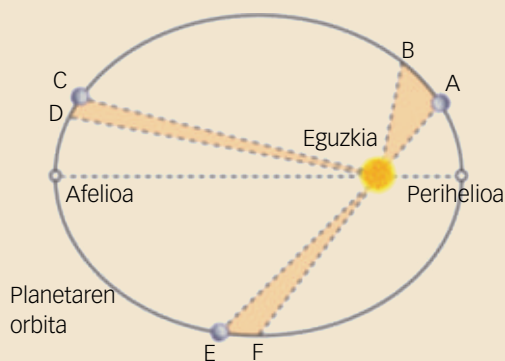
Emitza: $\frac{1}{r}$

Fisika

1. Planeten zinematika. Keplerren legeak

Keplerrek zeruko gorputzen kokapena aztertu zuen eta haien higidura zehazten duten legeak enuntziatu zituen:

- **1. legea:** planeta guztiak Eguzkiaren inguruan higitzen dira, orbita eliptikoak eginez. Eguzkia elipsearen fokuetako batean dago.
- **2. legea:** planetak abiadura areolar konstantez higitzen dira, hau da, planeta eta Eguzkia lotzen dituen lerroak azalera berdina ekortzen du denbora-unitate bakoitzeko. Horren ondorioz, planetak perihelioan abiadura lineal handiagoan higitzen dira afelioan baino.



- **3. legea:** planetek Eguzkiaren inguruan duten higiduran hau betetzen dute: $\frac{T^2}{d^3} = \text{konstantea}$. T : translazio-periodoa; d : batez besteko distantzia Eguzkira.

2. Zeruko gorputzen dinamika. Grabitazio unibertsalaren legea

Newtonek zehaztu zuen grabitazio-erakarpenak eragiten zuela planetak Eguzkiaren inguruan biraka aritzea eta sateliteak planeten inguruan biraka aritzea.

Grabitazio unibertsalaren legea asmatu zuen, eta lege horren arabera, m_1 eta m_2 masak dituzten bi gorputzek elkar erakartzen dute, beren masakiko zuzenki proportzionala eta beren arteko distantziaren berbidurarekiko alderantziz proportzionala den indarrez. Hau da formulazio bektoriala:

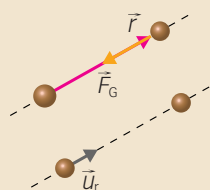
$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

G grabitazio unibertsalaren konstantea da:

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

$\vec{u}_r$ bektore unitarioa da eta $\vec{r}$ posizio-bektorearen norabide eta noranzko berdinak ditu.

Indar-bektorearen noranzkoa posizio-bektorearen kontrakoa da, erakarpen-indar bat delako.



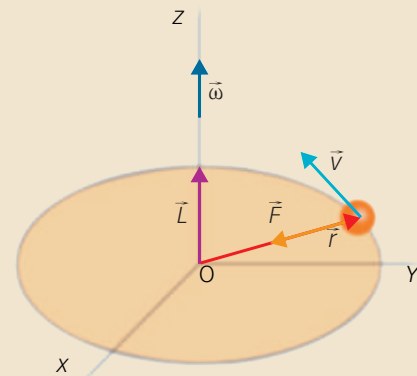
3. Momentu angeluarra

Gorputz batek higidura lerromakurra badu, bere higidura-egoera $\vec{L}$ momentu angeluarra zehazten du:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$$

$\vec{r}$ higitzen ari den gorputzaren posizio-bektorea da.

$\vec{p} = (m \cdot \vec{v})$ higidura kantitate da.



- Modulua: $|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |(m \cdot \vec{v})| \cdot \sin \alpha$, non α letra $\vec{r}$ eta $\vec{p}$ bektoreek osatzen duten angelua den.
- Norabidea: $\vec{r}$ eta $\vec{p}$ bektoreek osatzen duten planoarekiko zuta da.
- Noranzkoa: eskuin eskuaren edo torlojuaren arauaren bitartez jakin dezakegu.

Keplerren bigarren legetik ondorioztatzen da planetek orbita lauak egiten dituztela. Beraz, $\vec{L}$ konstantea da.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{L} = \text{konstantea} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}_G$ indarrak, hortaz, $\vec{r}$ bektorearen norabidea du.

Grabitazio-indarra indar zentrala da.

PRAKTIKATU

3. 20.000 kg-ko masa bat 60.000 kg-ko beste masa batetik 16 m-ra dago. Kalkulatu masa horien erakarpen-indarra.

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Emaitza: $3,13 \cdot 10^{-4} \text{ N}$

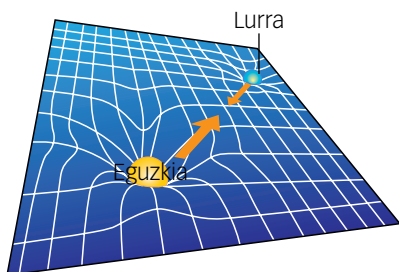
4. Zer puntutan da handiagoa Lurraren abiadura, Eguzkitik hurbil ala urrun dagoenean? Arrazoitu erantzuna.

Emaitza: hurbil dagoenean

5. Jupiterren ilargirik handienei satelite galileotar deritze, Galileo Galileik aurkitu baitzituen 1610. urtean. Jupiterretik gertuen dagoen satelite galileotarrak, hots, Io sateliteak, 1,8 eguneko orbita-periodoa du eta bere orbitaren erradioa, gutxi gorabehera, Jupiterren diametroaren hirukoitza da. Era berean, Kalistoren (Jupiterretik laugarren gertuen dagoen satelite galileotarra) orbita-periodoa 16,7 egunekoa da. Datu horiekin, orbita zirkularrak direla jota eta Jupiterren erradioa $7,15 \cdot 10^7 \text{ m}$ -koa dela jakinda, kalkulatuz Kalistoren orbitaren erradioa.

Emaitza: $1,89 \cdot 10^9 \text{ m}$

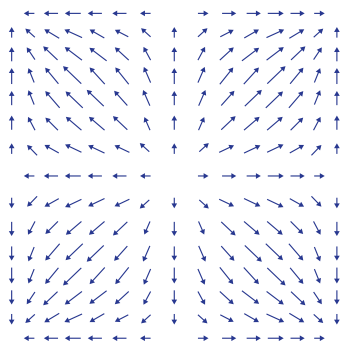
1 Eredu kontzeptua



1.1. irudia. Einsteinen teoriaren arabera, Eguzkiaren eta Lurraren masek inguruan duten espazioa deformatzen dute. Deformazio horren eraginez, bi gorputzek elkar erakartzen dute eta inguruan dituzten beste gorputz batzuk erakartzen dituzte.



1.2. irudia. Eskuaren termografiak puntu bakoitzean zer tenperatura dagoen adierazten du. **Eredu eskalar** baten adierazpena da; izan ere, tenperatura magnitude eskalar bat da.



1.3. irudia. Karga elektrikoaren banaketa batekin sortutako eremu baten adierazpena. Puntu bakoitzeko balioak karga-unitateari puntu horretan eragiten dion indarra adierazten du. **Eredu bektorial** bat da; izan ere, indarra magnitude bektorial bat da.

Gorputz bat Lurraren gainazaletik hurbil aske uzten bada, Lurrerantz erortzen da; izan ere, Lurra gorputzei grabitazio-erakarpena eragiten die. Kargadun gorputzak, distantzia jakin batera daudenak, erakarri edo aldaratu egiten dira, kargen zeinuaren arabera. Imanak ere erakarri edo aldaratu egiten dira, beren poloen orientazioaren arabera.

Grabitazio-interakzioa, interakzio elektriko eta interakzio magnetikoa hedatu egiten dira. Interakzioan parte hartzen duten gorputzek ez dute kontaktuan egon beharrik.

Propietate komun bat duten gorputzen artean gertatzen den urruneko interakzio hori modu formalean azaltzeko, Michael Faradayk (1791-1887) **eremu** kontzeptua erabili zuen 1831n. Karga elektrikoaren zuten gorputzen interakzioan aplikatu zuen eta **eremu-lerroak** asmatu zituen, gorputz baten eta espazioko beste puntu batzuetan dauden hainbat gorputzen arteko interakzioa nola transmititzen den deskribatzeko.

Eragina distantziara transmititzen dela azaltzeko, zientzialariek pentsatu zuten espazioa betetzen zuen *eter* bat zegoela eta gorputzen arteko interakzioa transmititzen zuela. *Eter*aren ideia hori indarrean egon zen Albert A. Michelson-ek (1852-1931) eta Edward Morleyk (1838-1923) 1887an eginiko esperimentuetan zalantza jarri zuten arte. Albert Einsteinek (1879-1955) frogatu zuen *eter*a egotea ez zela beharrezkoa, bere 1905eko lanetan oinarrituta. Einsteinek arrazoitu zuen perturbazioa eragiten duen gorputzak espazio-denboraren distortsioak sortzen dituela bere inguruko eremuan eta distortsio horiek direla perturbazioa hedatzen dutenak (► 1.1. irudia).

Ondutik, eremu kontzeptua orokortu egin da, espazioko eskualde batera hedatzen den edozein interakzio aztertzeko.

Espazioko eskualde bati **eremu** deritzogu eskualde horretan perturbazio baten efektuak hauteman badaitezke, gorputz batek beste batzuekin propietate komun bat izateagatik sortutako interakzioaren ondoriozko perturbazioarenak, hain zuzen.

Perturbazioa eragiten duen gorputzak espazio-denboraren distortsioak sortzen ditu, eta horiek kontaktuan ez dauden gorputzen arteko interakzioa eragiten dute.

Masa duten gorputzek masa duten beste gorputz batzuekin interakzioa dute; karga duten gorputzek, karga duten beste gorputz batzuekin...

Eredu bat definitzeko, espazioko puntu bakoitzean eta denboran balio zehatz bat hartzen duten magnitudeak erabiltzen dira. Perturbazioa definitzen duen magnitudea nolakoa den, eremu hauek ditugu:

- **Eredu eskalarrak.** Perturbazioa adierazten duen magnitudea eskalarra denean. Esaterako, tenperatura-eremuak (► 1.2. irudia) eta presio-eremuak. Horietan zenbaki bat aski da eremuko puntu jakin batean eremuaren balioa zehazteko.
- **Eredu bektorialak.** Perturbazioa adierazten duen magnitudea bektoriala denean. Esaterako, grabitazio-indarren eta indar elektrikoaren eremuak (► 1.3. irudia). Kasu horretan, eremuaren balioa bektore batek zehazten du.

2 Masa puntualek sortutako grabitazio-eremua

Grabitazio-eremua gorputz baten masak eragindako perturbazioa nabaritzen den espazioko eskualdea da.

Grabitazio-eremua nabaritzeko, masa duen beste gorputz bat sartu behar da eremuan. Sortzen den interakzioa eremua sortzen duen gorputzaren eta eremuan sartzen den gorputzaren arteko erakarpen-indar grabitatorio bat da.

Azterketa honekin hasteko, masa puntualek sortutako grabitazio-eremua kalkulatu dugu; hau da, eremua sortzen duen edo duten gorputza edo gorputzak puntuak direla joko dugu, dimentsiorik ez dutela eta M masa dutela.

Gorputzen tamaina elkarren arteko distantzia baino askoz txikiagoa denean ere onargarria da hurbilketa hori egitea. Adibidez, planetak masa puntual gisa har daitezke Eguzkiarekin duten interakzioan.

2.1. Grabitazio-eremuaren intentsitatea puntu batean

M masa puntualak sortutako eremua

Imajinatu dezagun espazioko puntu batean M masa duen gorputz bat dagoela. Beste puntu batean, m masa duen gorputz bat dago, eta M -rekiko duen distantzia $\vec{r}$ bektoreak definitzen du. Bi gorputzen artean erakarpen-indar grabitatorio bat agertzen da, eta honela idatz dezakegu:

$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

- G grabitazio unibertsalaren konstantea da, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
- $\vec{u}_r$ bektore unitarioa da, $\vec{r}$ bektorearen norabidea eta noranzkoa dituen.

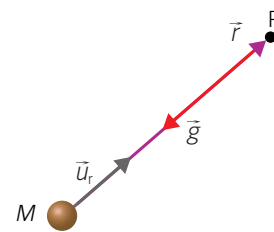
Grabitazio-eremuaren intentsitatea puntu batean, $\vec{g}$, M masak puntu horretan jarritako masa-unitateko gorputz bati eragiten dion indarra da. Magnitude bektorial bat da eta balio hau du:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r}{m} \rightarrow \vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Grabitazio-indarra erakarpenezkoa denez, $\vec{g}$ eta $\vec{u}_r$ bektoreek norabide bera eta kontrako noranzkoak dituzte (► 1.4. irudia). Hortik dator formulako zeinu negatiboa. Nazioarteko Sisteman $\vec{g}$ neurtzeko **N/kg** edo **m/s²** unitateak erabiltzen dira.

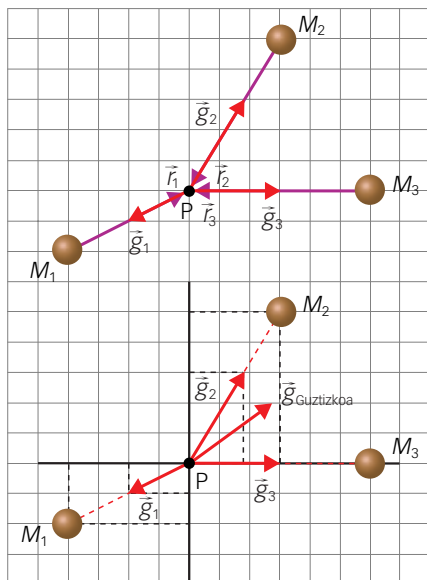
Sarritan, pisu esaten diogu erakarpen-indar grabitatorioari. Pisu-indarraren eraginez erorketa askean higitzen den gorputz batek higidura uniformeki azeleratua du eta bere azelerazioaren balioa $\vec{g}$ da.

Horren arabera, grabitazio-eremuaren intentsitatea puntu batean, $\vec{g}$, grabitazio-indarraren eraginean higitzen diren gorputzen erorketa askearen azelerazioa ere bada.



1.4. irudia. $\vec{g}$ eta $\vec{r}$ ($\vec{u}_r$) bektoreek norabide bera eta aurkako noranzkoak dituzte; $\vec{r}$ (morea) M masatik P puntura doa, eta $\vec{g}$ -k (gorria) P puntuan du jatorria.

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$$



1.5. irudia. Guztizko eremua masa guztiek sortutako eremuen batura da.

Masa puntualen banaketa batek sortutako eremua

Imajinatu dezagun espazioko gune jakin batean M_1 , M_2 eta M_3 masak dituzten puntu materialen eragina nabaritzen dela.

Puntu batean masa puntualen multzo batek sortutako grabitazio-eremuaren intentsitatea bat dator masa bakoitzak espazioko eskualde horretan bakarrik egonda sortutako eremuen batuketa bektorialarekin. Horri **gainezarpenaren printzipio** deritzo.

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i \left(-\frac{G \cdot M_i}{r_i^2} \right) \cdot \vec{u}_{r_i}$$

1.5. irudian M_1 , M_2 eta M_3 masak P puntuan sortutako eremua adierazten da. Guztizko eremua masa guztiek sortutako eremuen batura da.

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_{r3}$$

ADIBIDE EBATZIA

- 1** Bi masa puntual, $m_1 = 5 \text{ kg}$ eta $m_2 = 10 \text{ kg}$, planoko XY (1, 3) m eta (1, 9) m puntuetan daude, hurrenez hurren. Kalkulatu bi masak eragindako grabitazio-eremuaren intentsitatea (5, 6) puntuan.

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Gainezarpenaren printzipioaren arabera:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Bi puntuen koordinatuak ezagunak direnez, errazena eremu bakoitza kalkulatzeko da, $\vec{g}$ bektorearen definizioa kontuan

izanda eta kasu bakoitzean $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ bektore unitarioa lortuta.

Erabili SI sistemako unitateak magnitude guztientzat.

- Kalkulatu $\vec{g}_1$:
 $\vec{r}_1$ bektore bat da, eta jatorria (1, 3) puntuan eta muturra (5, 6) puntuan ditu.

$$\vec{r}_1 = (5 - 1)\vec{i} + (6 - 3)\vec{j} \rightarrow \vec{r}_1 = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{4\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4\vec{i} + 3\vec{j}}{5}$$

Beraz:

$$\vec{g}_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{5^2} \cdot \frac{4\vec{i} + 3\vec{j}}{5} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_1 = -1,07 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 8,00 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- Kalkulatu $\vec{g}_2$:
 $\vec{r}_2$ bektore bat da, eta jatorria (1, 9) puntuan eta muturra (5, 6) puntuan ditu.

$$\vec{r}_2 = (5 - 1)\vec{i} + (6 - 9)\vec{j} \rightarrow \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{4\vec{i} - 3\vec{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4\vec{i} - 3\vec{j}}{5}$$

Beraz:

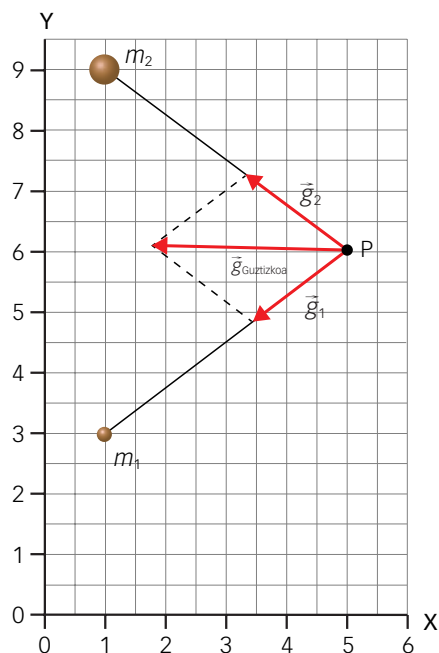
$$\vec{g}_2 = -\frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{5^2} \cdot \frac{4\vec{i} - 3\vec{j}}{5} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -2,14 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 1,60 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Orduan:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-1,07 \cdot 10^{-11} + (-2,14 \cdot 10^{-11}))\vec{i} + (-8,00 \cdot 10^{-12} + 1,60 \cdot 10^{-11})\vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = -3,21 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 8,00 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$



2.2. Grabitazio-indarren eraginezko lana

m masa duen gorputz bat M masa duen gorputz batek sorturiko grabitazio-eremu baten barruan higitzen bada, lan bat egiten da; izan ere, desplazamendua indar batek grabitazio-indarrak eragindakoa da.

Gogoratu

Lanaren kalkulua

Aurreko ikasturtean ikasi genuenez, gorputz batek indar konstante baten eraginez desplazamendu bat izaten duenean lana egiten da. Lanaren balioa indarra bider desplazamendua eginda kalkulatzen da (► 1.6. irudia):

$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

Indarra ez bada konstantea, desplazamendu infinitesimal batean soilik kalkula dezakegu lana, han indarra konstantea dela jota (► 1.7. irudia):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Bi punturen, edozeinen, arteko desplazamendua dagoenean egiten den indarra kalkulatzeko, puntu horien arteko lan infinitesimal guztien batuketa egin behar da. Matematikaren ikuspegitik, batuketa hori integrala da:

$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = \int_h^a \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Balioa aldatu egiten denez puntu bakoitzean, kalkulu integrala erabiliko dugu:

$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = \int_h^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_h^a -\frac{G \cdot M \cdot m \cdot \vec{u}_r}{r^2} \cdot d\vec{r} = \int_h^a -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot dr \quad (1)$$

(1) $\vec{u}_r$ bektore unitario bat da eta $\vec{r}$ -ren norabidea eta noranzkoa ditu. $\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = dr$ dela frogatu daiteke.

$$W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_h^a -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_h^a = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{amaierakoa}}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{hasierakoa}}}$$

Grabitazio-eremua **eremu kontserbakorra** da, grabitazio-eremuko indarrek eginiko lana desplazamenduaren hasierako eta amaierako puntuen araberakoa bakarrik delako eta ez ibilbide osoaren araberakoa (► 1.8. irudia).

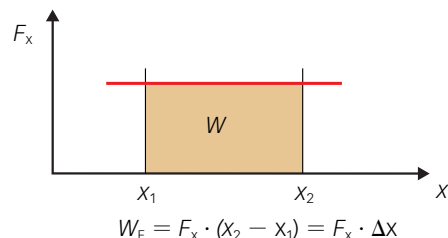
$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{amaierakoa}}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{hasierakoa}}} \quad [1]$$

Grabitazio-indarra **indar zentrala** da, erdigunerantz zuzenduta baitago eta bere modulua erdiguneraino dagoen distantziaren mendekoa baita. Orokor-tuz, esan dezakegu indar zentral baten ondoriozko lana kontserbakorra dela.

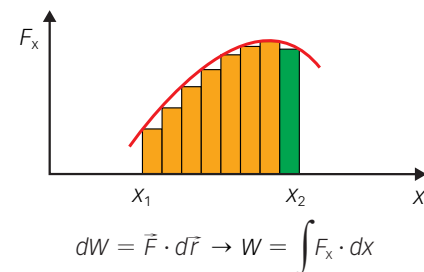
Ondorioz:

- Grabitazio-eremuko indarren lana ibilbide itxi batean zehar zero da.
- $r_{\text{amai}} < r_{\text{has}}$ bada $\rightarrow W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} > 0$ da. Grabitazio-eremuko indarren lana positiboa da gorputza eremua sortzen duen masara hurbiltzen denean.
- $r_{\text{amai}} > r_{\text{has}}$ bada $\rightarrow W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} < 0$ da. Grabitazio-eremuko indarren lana negatiboa da gorputza eremua sortzen duen masatik urruntzen denean.

Hori horrela da, grabitazio-indarrek beti erakartzen dutelako eta aske gelditzen den edozein gorputz eremua sortu duenerantz hurbiltzen delako.



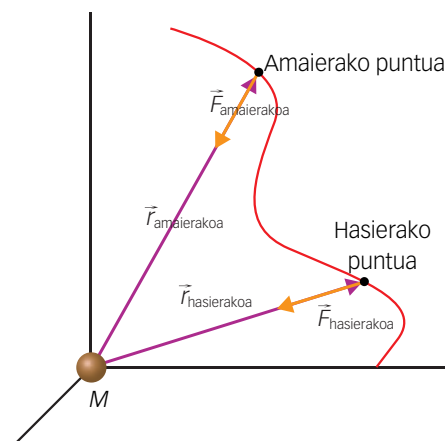
1.6. irudia. Lana irudian koloreztaturako zatia da (laukizuzena).



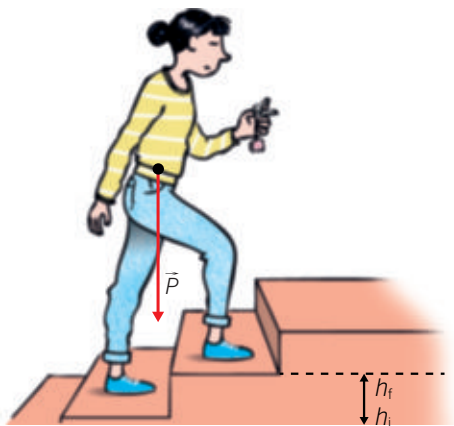
1.7. irudia. Lana kalkulatzeko batu egin behar dira kurbaren barruko azaleraren hurbilketa egiteko marraztutako laukizuzenak.

TRESNA MATEMATIKOAK

$$-\int_A^B r^{-2} \cdot dr = [r^{-1}]_A^B = \left[\frac{1}{r} \right]_A^B = \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}$$



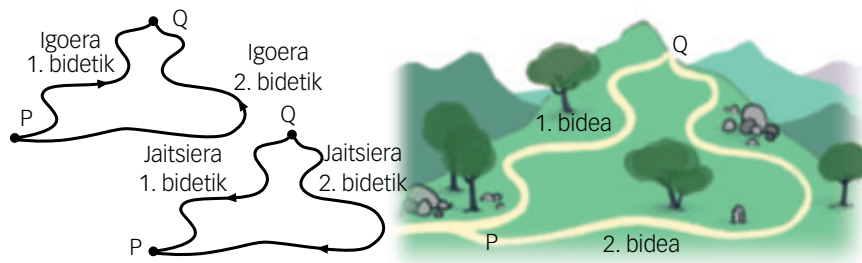
1.8. irudia. Grabitazio-indarren lana hasierako eta amaierako puntuen araberakoa bakarrik da, eta ez ibilbidearen araberakoa.



1.9. irudia. Urrats bakoitzean desplazamendu dago, horizontalean (Δx) eta altueran (Δh). Pisua desplazamendu horizontalarekiko zuta da, eta horregatik, ez dago lanik. Pisuaen lana altueran egiten den desplazamenduaren arabera da soilik.

Indar kontserbakorraren adibidea

Erreparatu irudiari. P puntutik Q puntura iristeko adierazitako bi bideak har ditzakegu. Altuera-aldea bera da bi bideetan, baina ibilbidea aldatu egiten da batetik bestera.



Puntuen arteko altuera-aldea igotzeko, gure pisuaen kontrako lana egin behar dugu, eta ibilbidean aurrera egiteko, lurraren marruskadura gainditu behar dugu.

Pisua indar kontserbakorra da, hura gainditzeko egin behar den indarra hasierako eta amaierako puntuen arabera bakarrik baita. Marruskadura, berriz, indar ez-kontserbakorra da, hura gainditzeko egin beharreko indarra bidearen mendekoa baita.

Ibilbidea osatzen badugu hasierara, P puntura, itzultzeko, pisuaen ondoriozko guztizko lana nulua izango da. Bestalde, marruskadura-indarraren lana ez da nulua izango, gainditu egin behar baitugu P-tik Q-rako bidean zein kontrako bidean.

ADIBIDE EBATZIA

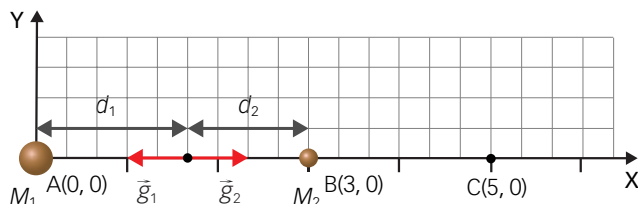
- 2** 50 kg-ko masa bat (0, 0) m puntuan dago, eta 30 kg-ko beste bat (3, 0) m puntuan.

a) XY planoko zer puntutan da nulua grabitazio-eremua?

b) Kalkulatu 30 kg-ko esfera (5, 0) m puntura eramateko egin behar den lana. Interpretatu lortutako emaitza.

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Adierazi problema grafikoki:



- a) $\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = 0$ den puntu bat aurkitu behar da.

Gauezarpenaren printzipioari jarraituz:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \rightarrow \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$$

Aztertu adierazpena eta ikusiko duzu bilatzen ari zaren puntua M_1 eta M_2 lotzen dituen lerroan dagoela.

Marrakiaz $\vec{g}_1$ eta $\vec{g}_2$ bektore bidez adierazten laguntzen digu.

Ez ahaztu magnitude guztiak nazioarteko sistemako unitatetan adierazi behar direla.

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r_1} & \vec{g}_2 &= \frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r_2} \\ \vec{g}_1 &= -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{d_1^2} \vec{i} = -\frac{3,34 \cdot 10^{-9}}{d_1^2} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \\ \vec{g}_2 &= +\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 30}{d_2^2} \vec{i} = +\frac{2,00 \cdot 10^{-9}}{d_2^2} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Ebatzi, hau kontuan izanda:

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \rightarrow -\frac{3,34 \cdot 10^{-9}}{d_1^2} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}} + \frac{2,00 \cdot 10^{-9}}{d_2^2} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0$$

$$1,67 = \frac{d_1^2}{d_2^2} \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{1,67} = 1,29 \rightarrow d_1 = 1,29 \cdot d_2$$

Bi masen arteko distantzia 3 m-koa denez, ordeztu eta kalkulatu:

$$d_1 + d_2 = 3 \rightarrow 1,29 \cdot d_2 + d_2 = 3 \rightarrow d_2 = \mathbf{1,31 \text{ m}}$$

$$d_1 = 3 - 1,31 \rightarrow d_1 = \mathbf{1,69 \text{ m}}$$

- b) Erabili grabitazio-eremu batean lana kalkulatzeko balio duen adierazpena:

$$\begin{aligned} W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} &= \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r_{\text{amaierakoa}}} - \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r_{\text{hasierakoa}}} \\ W_{B \rightarrow C} &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\ W_{B \rightarrow C} &= \mathbf{-1,33 \cdot 10^{-8} \text{ J}} \end{aligned}$$

Interpretazioa: lana negatiboa da; hau da, M_2 gorputza B puntutik C puntura mugitzeko eremuko indarren aurkako lana egin behar da.

C urrunago dago M_1 gorputzetik B baino. Eremuko indarrek M_2 gorputza M_1 gorputzera hurbilduko dute.

2.3. Energia potentzial grabitatorioa

Grabitazio-eremuan, eremu kontserbakor guztietan bezala, energia potentzial bat zehatz daiteke, eta hau betetzen da:

$$W_{\text{kots}} = -\Delta E_P \rightarrow W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{amaierakoa}}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{hasierakoa}}} = -(E_{P \text{ amai}} - E_{P \text{ has}}) \quad [2]$$

[1] adierazpena (13. orrialdean) eta [2] adierazpena erlazionatuta, energia potentzial grabitatorioaren adierazpena lortzen da.

Energia potentzial grabitatorioa, E_P , masa batek duen energia da, beste masa baten edo batzuen grabitazioaren eraginpean egoteagatik.

$$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Energia potentziala magnitude eskalar bat da eta nazioarteko sisteman **jouletan (J)** neurtzen da.

Interpretazio fisikoa: gorputz batek puntu batean duen energia potentziala bat dator eremu horretako indarrek gorputza dagoen puntutik eremuz kanpora abiadura konstantean eramateko egin behar duten lanarekin. Matematikoki, eremutik kanpo dagoen puntu bat eremua sortzen duen masatik distantzia infinitura dago.

$$\begin{aligned} W_{\text{has} \rightarrow \infty} &= \int_h^\infty \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot m \cdot \int_h^\infty -\frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_h^\infty = \\ &= \frac{G \cdot M \cdot m}{r_\infty} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_h} \rightarrow W_{h \rightarrow \infty} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_h} = E_{P h} \end{aligned}$$

Gorputz baten energia potentziala beti da negatiboa eremuaren barruan. Horren arrazoia hau da: grabitazio-indarra erakarpen-indar bat dela, eta kanpo-indar bat behar dela gorputza eremu barruko puntu batetik eremuz kanpo dagoen puntu batera eramateko.

Potentzial-diferentzia

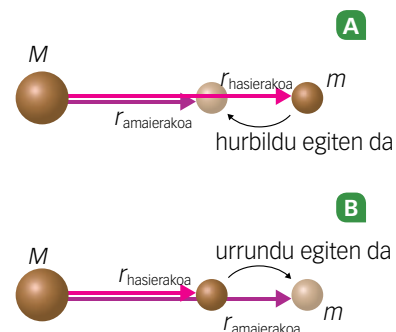
m masa duen gorputz bat M masa duen gorputz batek sortutako grabitazio-eremuan dagoenean, m masaren energia potentziala dagoen puntuaren arabera izango da. Beste puntu batera higitzean, bere energia potentziala adierazpen honen arabera aldatuko da:

$$E_{P \text{ amaierakoa}} - E_{P \text{ hasierakoa}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{amaierakoa}}} - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{hasierakoa}}} \right)$$

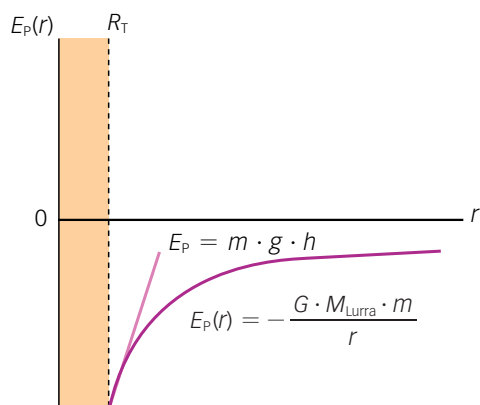
m masa duen gorputzak duen energia potentzial grabitatorioaren diferentzia eta eremuko indarrek gorputza puntu horien artean mugitzeko egiten duten indarra berdinak baina kontrako zeinukoak dira:

$$\begin{aligned} W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} &= G \cdot M \cdot m \cdot \int_h^a -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r} \right)_h^a = \\ &= \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{amaierakoa}}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{hasierakoa}}} = -(E_{P \text{ amaierakoa}} - E_{P \text{ hasierakoa}}) \end{aligned}$$

- m masa duen gorputza eremua sortu duen gorputza dagoen lekura hurbiltzen bada ($r_{\text{hasierakoa}} > r_{\text{amaierakoa}}$): eremuko indarrek egiten duten lana positiboa da eta gorputzak energia potentziala galtzen du (► 1.10A irudia).
- m masa duen gorputza eremua sortu duen gorputza dagoen lekutik urruntzen bada ($r_{\text{hasierakoa}} < r_{\text{amaierakoa}}$): eremuko indarrek egiten duten lana negatiboa da. Kanpo-indar bat behar da desplazamendua gertatzeko eta gorputzak energia potentziala irabazten du (► 1.10B irudia).

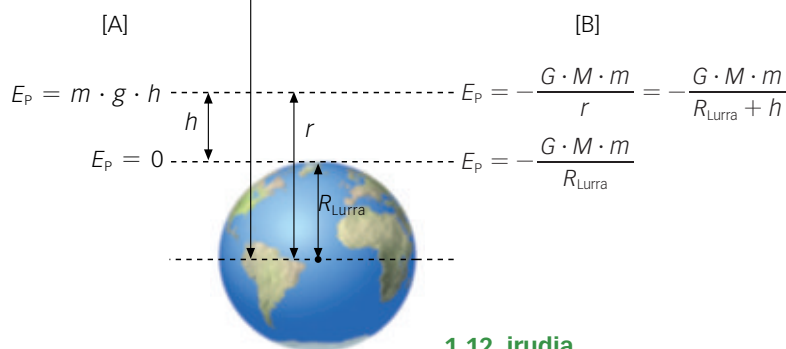


1.10. irudia. m masa duen gorputza eremua sortzen duen gorputzera, M -ra, hurbiltzen bada: $r_{\text{has}} > r_{\text{ama}}$. Aldiz, m masa M masatik urruntzen bada: $r_{\text{has}} < r_{\text{ama}}$.



1.11. irudia. Lurraren gainazaletik distantzia txikitara, E_p altuerarekin modu linealean aldatzen dela esan daiteke ($E_p = m \cdot g \cdot h$). Distantziak handiagoak direnean, energia potentziala, E_p , r distantziaren alderantzizkoaren mende aldatzen da eta nulu hihurtzen da infinituan

$$E_p = m \cdot g \cdot \infty = \infty \quad E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{\infty} = 0$$



1.12. irudia.

Nondik dator $E_p = m \cdot g \cdot h$ adierazpena?

Orain arte, gorputz bat Lurraren gainazaletik h altuerara zegoenean, bere energia potentziala $E_p = m \cdot g \cdot h$ dela jo dugu. Zer erlazio du adierazpen horrek grabitazio-eremuari buruz ondorioztatu berri dugunarekin?

Gorputz bat Lurraren gainazalean badago eta h altuerara igotzen bada, hau izango da bi puntuen arteko energia potentzialaren diferentzia:

$$\Delta E_p = E_{ph} - E_{p_{gainazala}} = \left(-G \cdot M_L \cdot m \cdot \frac{1}{R_L + h} \right) - \left(-G \cdot M_L \cdot m \cdot \frac{1}{R_L} \right) = G \cdot M_L \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L + h} \right) = G \cdot M_L \cdot m \cdot \frac{(R_L + h) - R_L}{R_L \cdot (R_L + h)} = G \cdot M_L \cdot m \cdot \frac{h}{R_L \cdot (R_L + h)}$$

Puntua Lurraren gainazaletik hurbil dagoela iruditzen bazaigu:

$$h \ll R_{Lurra} \text{ eta } R_{Lurra} + h \approx R_{Lurra}; \quad g = G \cdot \frac{M_{Lurra}}{R_{Lurra}^2}$$

Adierazpena honako hau bihurtzen da:

$$\Delta E_p = G \cdot M_{Lurra} \cdot m \cdot \frac{h}{R_{Lurra}^2} \rightarrow \Delta E_p = m \cdot g \cdot h \quad (\text{► 1.11. irudia})$$

1.12 irudian energia potentziala adierazteko bi moduen arteko antzekotasuna ikusten da. Bi moduen arteko aldea da zer puntu hartzen dugun gorputz baten energia potentziala zero dela kontsideratzeko erreferentzia gisa.

- Puntu hori Lurraren gainazalean dagoela jotzen badugu [A], puntutik urruntzen den heinean, gorputzak energia potentzial handiagoa izango du, eta positiboa.
- Puntu hori infinituan dagoela jota [B], gorputzak beti izango du energia potentzial negatiboa, eta balio absolutua txikituko zaio Lurraren gainazaletik urrundu ahala.

Edonola ere, **gorputzak energia potentziala irabazten du Lurraren gainazaletik urrundu ahala.**

ADIBIDE EBATZIA

- 3** MIR espazio-estazioa Lurraren gainazaletik 400 km ingurura ibili zen orbitan. Kalkulatu nola aldatu zen haren E_p lurretik 10 m-ra jaurtitzeko prest zegoenetik espazioan egon arte.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $R_{Lurra} = 6.370 \text{ km}$; $m = 2 \text{ kg}$; $M_{Lurra} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Egin kalkuluak ikasitako bi adierazpenen bitartez. Erabili SI sistemako unitateak magnitude guztientzat.

	$E_p = m \cdot g \cdot h$	$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{(R_{Lurra} + h)}$
10 m-ra	$E_{pA} = 2 \cdot 9,8 \cdot 10 = 196 \text{ J}$	$E_{pA} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2}{(6.370 \cdot 10^3 + 10)} = -125,23 \cdot 10^6 \text{ J}$
400 km-ra	$E_{pB} = 2 \cdot 9,8 \cdot 400 \cdot 10^3 = 7,84 \cdot 10^6 \text{ J}$	$E_{pB} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2}{(6.370 + 400) \cdot 10^3} = -117,83 \cdot 10^6 \text{ J}$
ΔE_p	$E_{pB} - E_{pA} = 7,84 \cdot 10^6 - 196 = \mathbf{7,84 \cdot 10^6 \text{ J}}$	$E_{pB} - E_{pA} = -117,83 \cdot 10^6 - (-125,23 \cdot 10^6) = \mathbf{7,40 \cdot 10^6 \text{ J}}$

Interpretazioa: jabetu ezkerreko kalkuluetan erreore bat dagoela, edozein distantzian $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ dela jo baita, nahiz eta Lurraren gainazalean soilik hartzen duen balio hori g-k.

2.4. Energia mekanikoaren kontserbazioa grabitazio-eremu batean

Aurreko ikasturtean indar bizien teorema ikusi genuen. Haren arabera, gorputz bati eragiten dioten indar guztien lanak gorputzaren energia zinetikoa aldatzea dakar.

$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = \Delta E_Z = E_{Z\text{amaierakoa}} - E_{Z\text{hasierakoa}} \quad [3]$$

Guztizko lanak indar guztien lana adierazten du, izan indar kontserbakorrak, izan ez-kontserbakorrak (adibidez, marruskadura-indarrak).

Gure sistemak indar kontserbakorren eragina bakarrik badu (adibidez, grabitazio-indarren eragina):

$$\begin{aligned} W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} &= W_{\text{kontserbakorrak}} + W_{\text{ez-kontserbakorrak}} \rightarrow \\ \rightarrow W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} &= -\Delta E_P + 0 = E_{P\text{hasierakoa}} - E_{P\text{amaierakoa}} \end{aligned} \quad [4]$$

[3] eta [4] adierazpenak erlazionatuta:

$$E_{Z\text{amaierakoa}} - E_{Z\text{hasierakoa}} = E_{P\text{hasierakoa}} - E_{P\text{amaierakoa}}$$

Adierazpen hori energia mekanikoaren kontserbazioaren teorema da.

Energia mekanikoaren kontserbazioaren teorema: sistema batean diharduten indarrak kontserbakorrak bakarrik badira, energia mekanikoa kontserbatu egiten da (► 1.13. irudia).

$$E_{Z\text{amaierakoa}} + E_{P\text{amaierakoa}} = E_{Z\text{hasierakoa}} + E_{P\text{hasierakoa}} = E_M$$

TRESNA MATEMATIKOAK

Indar bizien teorema

Gorputz bat indar baten edo batzuen eraginpean higitzen denean:

$$\begin{aligned} W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} &= \int_h^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_h^a m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_h^a m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\ W_{h \rightarrow a} &= \int_h^a m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_h^a m \cdot v \cdot dv = \\ &= \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{amai}}^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{has}}^2 \end{aligned}$$

Indar kontserbakorrak

Indar kontserbakorrek izen hori dute, sistema batean eragiten duten indar bakarrek direnean, sistemaren energia mekanikoa kontserbatu egiten delako.



1.13. irudia. Marruskadurarik ez balego, higidura infinitua izango litzateke, eta neskatoa pistaren alde batetik bestera higituko litzateke, etengabe. Izan ere, energia potentziala energia zinetiko bihurtuko litzateke, eta alderantziz. Marruskadura-indarra indar ez-kontserbakorra da.

ADIBIDE EBATZIA

- 4 200 kg-ko meteorito bat erorketa askean doa Lurrarentz, eta 10 m/s-ko abiadura du Lurraren gainazaletik $h = 750$ km-ko altueran. Kalkulatu altuera horretan meteoritoak duen pisua eta zer abiaduratan egingo duen talka Lurraren gainazalarekin, atmosferaren marruskadura aintzat hartu gabe.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;
 $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.

Adierazi magnitude guztiak SI sistemako unitatetan.

Pisua bat dator Lurra eragiten dion grabitazio-indarrarekin:

$$P = F_G = \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{(R_{\text{Lurra}} + h)^2}$$

$$P = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{((6.370 + 750) \cdot 10^3)^2} = 1.573,6 \text{ N}$$

Meteoritoaren energia mekanikoa kontserbatu egiten da, grabitazio-indarrak bakarrik eragiten baitio:

$$\begin{aligned} E_{Z\text{hasierakoa}} + E_{P\text{hasierakoa}} &= E_{Z\text{amaierakoa}} + E_{P\text{amaierakoa}} \\ \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 10^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{(6.370 + 750) \cdot 10^3 \text{ m}} &= \\ = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot v^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{6.370 \cdot 10^3} &\rightarrow \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{10^4 - 1,12 \cdot 10^{10} + 1,25 \cdot 10^{10}}{100}} = 3.632 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2.5. Puntu bateko grabitazio-potentziala

Aurreko orrialdeetan ikusi dugu M masa batek grabitazio-eremu bat sorrazten duela, eta hori dela eta, beste masa batek, m -k, energia potentzial jakin bat eskuratzen duela eremuan duen kokalekuaren arabera. Oso kome-nigarria da masa-unitateko energia potentziala kontuan hartzea; izan ere, modu horretan, eremua sortzen duen M masaren mende bakarrik dagoen magnitude bat lortzen dugu.

Puntu bateko potentziala, V , deritzo puntu horretan masa-unitateko dagoen energia potentzialari:

$$V = \frac{E_P}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Potentziala magnitude eskalar bat da, eta nazioarteko sisteman **J/kg** da horren neurri-unitatea.

Interpretazio fisikoa: puntu bateko potentziala eremuko indarrek masa-unitatea puntu horretatik eremutik kanpora abiadura konstantean eramateko egiten duten lana da.

$$\begin{aligned} \frac{W_{\text{has} \rightarrow \infty}}{m} &= \int_h^\infty \frac{\vec{F}_G}{m} \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot \int_h^\infty -\frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_h^\infty = \frac{G \cdot M}{r_\infty} - \frac{G \cdot M}{r_h} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{W_{h \rightarrow \infty}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r_h} = V_h \end{aligned}$$

Infinituan (eremutik kanpo) potentziala zero da; eremuko beste edozein puntutan, berriz, potentziala negatiboa da, grabitazio-indarra erakarpe-nezkoa baita.

Grabitazio-potentziala **eremu eskalar** bat dela esan dezakegu. Izan ere, grabitazio-interakzioa puntu-funtzio eskalar baten gisan aztertze-ko aukera ematen du; hau da, eremuko puntu bakoitzean potentzialak balio bat du.

Puntu bateko potentziala masa puntualen banaketaren eraginez

Gainezarpenaren printzipioari jarraituz, espazioko gune jakin batean M_1 , M_2 eta M_3 masak dituzten puntu materialen eragina nabaritzen bada, P puntuko grabitazio-potentziala gorputzek banaka sortuko lituzketen potentzialen batura izango da, betiere eremuan P puntua bakarrik egonda (► 1.14. irudia).

Potentziala magnitude eskalar bat denez, guztizko potentziala puntu mate-rial bakoitzak sortutako potentzialen batura eskalarra da.

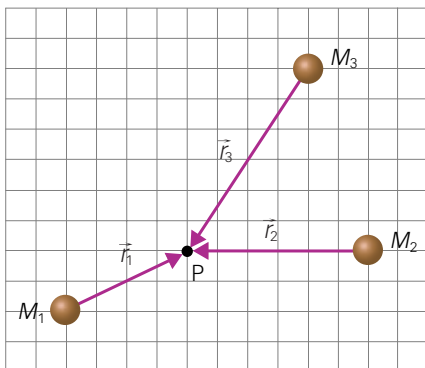
$$\begin{aligned} V_{\text{Guztizkoa}} &= V_1 + V_2 + V_3 \rightarrow \\ \rightarrow V_{\text{Guztizkoa}} &= -\frac{G \cdot M_1}{r_1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3} \end{aligned}$$

Oro har, hau da masa puntualen sistema batek sortutako potentziala:

$$V_{\text{Guztizkoa}} = \sum_i V_i = \sum_i -\frac{G \cdot M_i}{r_i}$$

Masa puntualen multzo batek puntu batean sortzen duen potentziala zenba-tekoa den jakinda, puntu horretan kokatutako m masako gorputz batean energia zenbatekoa den jakin dezakegu, adierazpen honen bidez:

$$E_{PP \text{ puntuan}} = m \cdot V_{\text{Guztizkoa } P \text{ puntuan}}$$



1.14. irudia. P puntuan, $V = V_1 + V_2 + V_3$.

Potentzial-diferentzia

Grabitazio-eremu bateko bi puntu, h eta a , baditugu, elkarren arteko **potentzial-diferentzia** deituko diogu $V_{\text{amaierakoa}} - V_{\text{hasierakoa}}$ erlazioari:

$$\Delta V = V_{\text{amaierakoa}} - V_{\text{hasierakoa}} \rightarrow \Delta V = -\frac{G \cdot M}{r_{\text{amaierakoa}}} - \left(-\frac{G \cdot M}{r_{\text{hasierakoa}}} \right)$$

Bi punturen arteko grabitazioaren potentzial-diferentzia eremuko indarrek masa-unitatea bi puntuen artean mugitzeko egiten duten lanaren berdina eta kontrako zeinukoa da:

$$\begin{aligned} \frac{W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}}}{m} &= \int_h^a \frac{\vec{F}_G}{m} \cdot d\vec{r} = G \cdot M \cdot \int_h^a -\frac{dr}{r^2} = G \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_h^a = \\ &= \frac{G \cdot M}{r_{\text{amai}}} - \frac{G \cdot M}{r_{\text{has}}} = -(V_{\text{amai}} - V_{\text{has}}) = -\Delta V \rightarrow \frac{W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}}}{m} = -\Delta V \end{aligned}$$

- $r_{\text{hasierakoa}} > r_{\text{amaierakoa}}$ bada, $\Delta V < 0$ da. Potentziala txikitu egiten da eremua sortzen duen gorputzera hurbiltzean.
- $r_{\text{hasierakoa}} < r_{\text{amaierakoa}}$ bada, $\Delta V > 0$ da. Potentziala handitu egiten da eremua sortzen duen gorputzetik urruntzean.

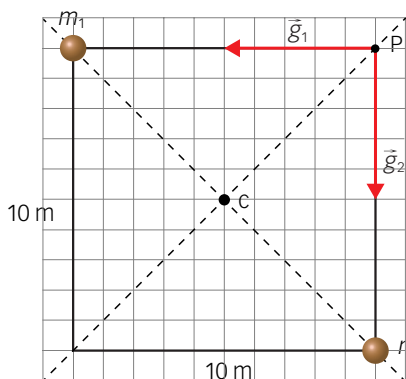
ADIBIDE EBATZIA

- 5 300 kg-ko bi masa puntual 10 m-ko aldea duen lauki baten aurkako bi erpinetan daude:

- Marratu eta kalkulatu bi masa horiek laukiaren beste erpin batean sortzen duten grabitazio-eremua.
- Kalkulatu zer grabitazio-potentzial dagoen laukiaren erdigunean, bi masen eraginez.

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Adierazi problema grafiko bidez:



- Kalkulatu eremua P puntuan. Gainezarpeneren printzipioaren arabera:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Marrazkiak $\vec{g}_1$ eta $\vec{g}_2$ bektore bidez adierazten laguntzen dizu.

$$\vec{g}_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} \quad \vec{g}_2 = -\frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2}$$

$$\vec{g}_1 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 300 \text{ kg}}{10^2 \text{ m}^2} \vec{i} = -2,00 \cdot 10^{-10} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 300 \text{ kg}}{10^2 \text{ m}^2} \vec{j} = -2,00 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = -2,00 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 2,00 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- C puntuko potentziala kalkulatzeko, erabili gainezarpeneren printzipioa:

$$V_{\text{Guztizkoa}} = V_1 + V_2$$

Bi masetatik C puntura dagoen distantzia laukiaren diagonalaren erdiaren berdina da:

$$r = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{(10^2 + 10^2)}}{2} = 7,07 \text{ m}$$

$$V_1 = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 300 \text{ kg}}{7,07 \text{ m}} = -2,83 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_{\text{Guztizkoa}} = V_1 + V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot (-2,83 \cdot 10^{-9})$$

$$V_{\text{Guztizkoa}} = -5,66 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Interpretazioa: puntu bateko grabitazio-potentziala beti da zenbaki negatibo bat.

Laburbilduz

Grabitazio-eremua bi magnituderen bidez deskriba daiteke, eta grabitazio-eremuak partikula batekin duen interakzioa beste bi magnituderen bidez.

Grabitazio-eremua deskribatzen duten magnitudeak		Grabitazio-interakzioa deskribatzen duten magnitudeak	
Eremuaren intentsitatea (puntu-funtzio bektoriala)	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$	Grabitazio-indarra	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$
Potentziala (puntu-funtzio eskalarra)	$V = \frac{E_p}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$	Energia potentziala	$E_p = m \cdot V = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$

Kasu bakoitzean, deskribapen dinamiko bat egin dezakegu, $\vec{g}$ eta $\vec{F}_G$ magnitudeen bidez, edo deskribapen energetiko bat, V eta E_p magnitudeen bidez. Aurkezten zaigun problemaren xehetasunek azterketa magnitude bektorialen edo magnitude eskalarren bidez egitera eramango gaituzte.

Horrez gain, grabitazio-interakzioa deskribatzen duten magnitudeetatik abiatuta, eremua deskribatzen duten bi magnitudeen arteko erlazio bat zehatz daiteke:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} &= \int_h^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_{p \text{ amai}} - E_{p \text{ has}}) \rightarrow \int_h^a \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r} = -\left(\frac{E_{p \text{ amai}}}{m} - \frac{E_{p \text{ has}}}{m}\right) \\
 &\rightarrow \int_h^a \vec{g} \cdot d\vec{r} = -(V_{\text{amai}} - V_{\text{has}})
 \end{aligned}$$

Ondorio horretara berera irits gaitezke berdintzaren lehen zatia garatuta, aurreko ataletan erabili ditugun definizioak eta tresna matematikoak kontuan izanda.

$$\begin{aligned}
 \int \vec{g} \cdot d\vec{r} &= -\int G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -G \cdot M \int \frac{1}{r^2} \cdot dr = \left[-G \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\right]_{r_h}^{r_a} = \\
 &= G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{amai}}} - \frac{1}{r_{\text{has}}}\right) = -(V_{\text{amai}} - V_{\text{has}}) \rightarrow \int \vec{g} \cdot d\vec{r} = -(V_{\text{amai}} - V_{\text{has}})
 \end{aligned}$$

Hainbat masa puntualek sortutako eremua

Espazioko gune batean masa puntual batzuek $-M_1, M_2, M_3$ sortutako eremu bat gainjartzen denean, egokiena eremuaren guztizko intentsitatea eta guztizko potentziala puntu batean kalkulatzeko da, eta balio hori erabiltzea puntu horretan dagoen m partikulari eragiten dion grabitazio-indarra edo energia potentziala kalkulatzeko.

Grabitazio-eremua deskribatzen duten magnitudeak		Grabitazio-interakzioa deskribatzen duten magnitudeak	
$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = -\frac{G \cdot M_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_{r3}$		Grabitazio-indarra	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}_{\text{Guztizkoa}}$
$V_{\text{Guztizkoa}} = -\frac{G \cdot M_1}{r_1} - \frac{G \cdot M_2}{r_2} - \frac{G \cdot M_3}{r_3}$		Energia potentziala	$E_p = m \cdot V_{\text{Guztizkoa}}$
		Desplazamendu bateko lana	$W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} = -(E_{p \text{ a}} - E_{p \text{ h}}) = -m \cdot (V_{\text{Guztizkoa a}} - V_{\text{Guztizkoa h}})$

ADIBIDE EBATZIA

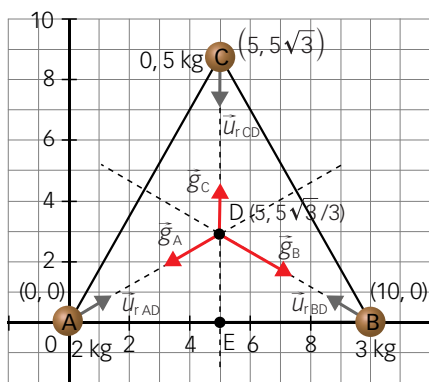
- 6 10 m-ko aldea duen triangelu aldeberdin baten hiru erpinetan 2, 3 eta 0,5 kg-ko masa duten gorputz puntualak daude. Kalkulatu:
- Grabitazio-eremuaren balioa triangeluaren erdigunean.
 - Triangeluaren erdigunean dagoen 5 kg-ko masak gorputz bati eragingo zaion indarra.
 - Eremuak egiten duen lana gorputz hori triangeluaren erditik 2 eta 3 kg-ko masak dauden aldearen erdiko puntura eramateko. Interpretatu emaitzaren zeinua.
 - 5 kg-ko masa duen gorputza triangeluaren erdigunean geldirik utzi dela jota, zer abiaduratan iritsiko da kontrako aldearen erdiko puntura?

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Ezarri koordinatu-sistema bat, gorputz bakoitzaren kokapena eta eremua sortzen den puntua zein diren zehazteko.

Triangeluaren erdia (D) masa-zentroa da; erpin bakoitzetik pasatzen da altueraren bi herenetara dago.

Adierazi problema grafiko bidez:



- a) Kalkulatu eremua triangeluaren erdigunean:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AD}^2} \cdot \vec{u}_{rAD} - \frac{G \cdot M_B}{r_{BD}^2} \cdot \vec{u}_{rBD} - \frac{G \cdot M_C}{r_{CD}^2} \cdot \vec{u}_{rCD}$$

38. orrialdeko *Egiten jakin* atalean, bektoreen problemak simetria aprobetxatuta ebazteko beste modu bat ikusiko duzu.

- $\vec{r}_{AD}$ (0, 0) puntuan jatorria duen eta $\left(5, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ puntuan muturra duen bektore bat da:

$$\vec{r}_{AD} = 5\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{rAD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{5\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\vec{j}}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3}/3)^2}} =$$

$$= \frac{5\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\vec{j}}{10\sqrt{3}/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \rightarrow$$

Oharra

Ohartu problemaren emaitza aldatu egiten dela masak beste kokaleku batzuetara aldatuz gero.

$$\rightarrow \vec{g}_A = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AD}^2} \cdot \vec{u}_{rAD} =$$

$$= -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2 \text{ kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2 \text{ m}^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) =$$

$$= -3,47 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 2,00 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- $\vec{r}_{BD}$ (10, 0) puntuan jatorria eta $\left(5, 5\sqrt{3}/3\right)$ puntuan muturra dituen bektore bat da.

$$\vec{r}_{BD} = -5\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{rBD} = \frac{\vec{r}_{BD}}{|\vec{r}_{BD}|} = \frac{-5\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\vec{j}}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3}/3)^2}} =$$

$$= \frac{-5\vec{i} + 5\sqrt{3}/3\vec{j}}{10\sqrt{3}/3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_B = -\frac{G \cdot M_B}{r_{BD}^2} \cdot \vec{u}_{rBD} =$$

$$= -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 3 \text{ kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2 \text{ m}^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) =$$

$$= 5,20 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 3,00 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- $\vec{r}_{CD}$ $\left(5, 5\sqrt{3}/3\right)$ puntuan jatorria eta $\left(5, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ puntuan muturra dituen bektore bat da.

$$\vec{r}_{CD} = 0\vec{i} - 10\sqrt{3}/3\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}_{rCD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{|\vec{r}_{CD}|} = \frac{-10\sqrt{3}/3\vec{j}}{\sqrt{(10\sqrt{3}/3)^2}} = -\vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_C = -\frac{G \cdot M_C}{r_{CD}^2} \cdot \vec{u}_{rCD} =$$

$$= -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 0,5 \text{ kg}}{(10\sqrt{3}/3)^2 \text{ m}^2} \cdot (-\vec{j}) =$$

$$= 1,00 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Beraz:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = (-3,47 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 2,00 \cdot 10^{-12} \vec{j}) +$$

$$+ (5,20 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 3,00 \cdot 10^{-12} \vec{j}) +$$

$$+ 1,00 \cdot 10^{-12} \vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = 1,73 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 4,00 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- b) Kalkulatu indarra: $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}_{\text{Guztizkoa}}$

$$\vec{F}_G = 5 \text{ kg} \cdot (1,73 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 4,00 \cdot 10^{-12} \vec{j}) \text{ N/kg}$$

$$\vec{F}_G = 0,8710^{-11} \vec{i} - 2,00 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}$$

→ jarraipena

- c) Erabili nazioarteko sistemako unitateak magnitude guztientzat.

$$W_{D \rightarrow E} = -\Delta E_P = -(E_{PE} - E_{PD}) = -m \cdot (V_{\text{GuztizkoaE}} - V_{\text{GuztizkoaD}})$$

Kalkulatu hiru masek puntu hauetako bakoitzean sortzen duten guztizko potentziala:

$$V_{\text{GuztizkoaD}} = V_{AD} + V_{BD} + V_{CD} = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AD}} - \frac{G \cdot M_B}{r_{BD}} - \frac{G \cdot M_C}{r_{CD}}$$

$$V_{\text{GuzD}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{10\sqrt{3}/3} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{10\sqrt{3}/3} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,5}{10\sqrt{3}/3}$$

$$V_{\text{GuztizkoaD}} = -6,354 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_{\text{GuztizkoaE}} = V_{AE} + V_{BE} + V_{CE} = -\frac{G \cdot M_A}{r_{AE}} - \frac{G \cdot M_B}{r_{BE}} - \frac{G \cdot M_C}{r_{CE}}$$

$$V_{\text{GuzE}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{5} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{5} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,5}{5\sqrt{3}}$$

$$V_{\text{GuztizkoaE}} = -7,055 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$W_{D \rightarrow E} = -m \cdot (V_{\text{GuztizkoaE}} - V_{\text{GuztizkoaD}})$$

$$W_{D \rightarrow E} = -5 \cdot (-7,055 \cdot 10^{-11} - (-6,354 \cdot 10^{-11})) = +3,51 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Interpretazioa: $W_{D \rightarrow E} > 0$ da, eta horrek esan nahi du eremuko indarrek 5 kg-ko masa triangeluaren erditik aldearen erdira higituko dutela.

- d) Demagun sisteman eragina duten indar bakarrak grabitazio-indarrak direla:

$$E_{ZD} + E_{PD} = E_{ZE} + E_{PE} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{ZD} + m \cdot V_{\text{GuztizkoaD}} = E_{ZE} + m \cdot V_{\text{GuztizkoaE}}$$

$$0 + 5 \cdot (-6,354 \cdot 10^{-11}) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot v_E^2 + 5 \cdot (-7,055 \cdot 10^{-11})$$

$$\rightarrow v_E = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

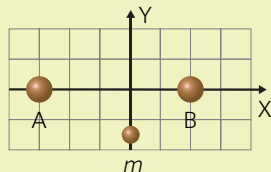
★ JARDUERAK

6. Arrazoiu baieztapen hau zuzena ala okerra den: «Grabitazio-potentziala nulua da bi masa berdín lotzen dituen zuzenkiaren erdiko puntuan».

7. Oso altu dagoen puntu batean bagaude eta Lurraren gainazalerantz higitzen bagara, energia potentzial grabitatorioa handitu ala txikitu egingo da? Arrazoiu.

8. Mendi baten oinean dagoen alpinista batek bi ibilbide ditu aukeran mendia eskalatzeko. Batean, malda txikia da, eta bestean, askoz handiagoa. Zure ustez, grabitazio-indarraren eraginez mendizalearen gorputzak egingo duen lanaren balioa aukeratutako bidearen arabera al da? Arrazoiu erantzuna.

9. A (-30, 0) eta B (+20, 0) puntuetan 10^5 kg -ko masa bana dago finko. (0, -15) puntuan 400 g-ko masa duen esfera txiki bat dago eta arazorik gabe higitu daiteke. Distantziak metrotan adierazita daudela kontuan izanda, kalkulatu:



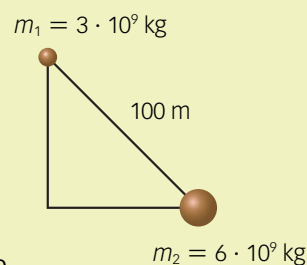
- Esferari egiten zaion indarra (modulua, norabidea eta noranzkoa) hasierako posizioan.
- Esferak jasango duen azelerazioa (0, 0) puntuan dagoenean, justu A eta B gorputzen artean.
- Adierazi eremuen gainezarpenaren printzipioa.

$$\text{Datua: } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Eraitza: a) $1,29 \cdot 10^{-9} \vec{i} + 3,62 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ N}$; $3,84 \cdot 10^{-9} \text{ N}$
b) $9,29 \cdot 10^{-9} \vec{i} \text{ m/s}^2$

10. Azaldu zer erlazio dagoen *indar kontserbakorraren* eta *energia potentzialaren* artean.

11. Triangelu angeluzuzen isoszele baten hipotenusaren muturretan $3 \cdot 10^9 \text{ kg}$ -ko eta $6 \cdot 10^9 \text{ kg}$ -ko bi masa daude, hurrenez hurren.



- Egin masa bakoitzaren grabitazio-eremuaren eta libre dagoen erpineko guztizko eremuaren eskema bat.
- Triangeluaren hipotenusak 100 m neurtzen baditu, kalkulatu grabitazio-eremuaren modulua erpin horretan.
- Triangeluko zer puntutan izango da nulua grabitazio-eremua?

$$\text{Datua: } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Eraitza: b) $8,95 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$; c) masa txikienetik $41,42 \text{ m}$ -ra

12. 4.000 eta 10.000 kg-ko bi masa ditugu. 1 masa koordinatu-jatorrian dago, (0, 0) puntuan. 200 m eskuinerago 2 masa dago, (200, 0) puntuan.

- Marratzu eta kalkulatu bi masen arteko erdiko puntuan, C-n, grabitazio-eremuaren balioa.
- Kalkulatu C puntuko grabitazio-potentziala.
- Kalkulatu C puntuan dagoen 1 kg-eko masa bat 1 masaren ezkerrean 40 m-ko distantziara dagoen (-40, 0) puntura eramateko egin behar den lana.

$$\text{Datua: } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Eraitza: a) $4 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ N/kg}$; b) $-9,34 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$;
c) $-1,11 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

3 Grabitazio-eremuaren adierazpena

Grabitazio-eremua bi modutan adieraz daiteke grafiko bidez. Modu horiek eremua deskribatzen duten magnitudeekin lotuta daude:

- **Eremu-lerroak.**
- **Gainazal ekipotenzialak.**

3.1. Eremu-lerroak

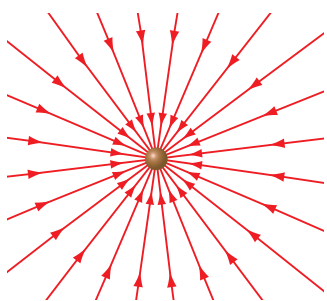
Eremu-lerroak eremuaren intentsitate bektorearen lerro ukitzaileak dira puntu bakoitzean.

Marrazten diren moduan, lerroekiko zuta den azalera-unitate bat zeharkatzen duten eremu-lerroen kopurua eremuaren intentsitatearekiko proportzionala da puntu horretan.

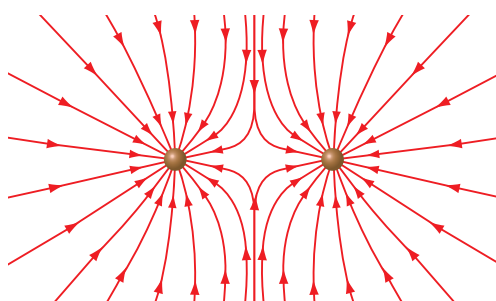
- Masa puntual bakar batek sortutako eremu bat badugu, eremu-lerroek norabide erradiala eta eremua sortu duen gorputzeranzko noranzkoa izango dute (► 1.15. irudia).
- Bi masek sortutako eremu bat badugu, eremu-lerroak deformatu egiten dira erdigunean, eta horrek adierazten du bi masen artean eremu nuluko puntu bat dagoela.

Masak berdinak badira, eremua nulu egiten den puntua bi masen erdian dago (► 1.16. irudia).

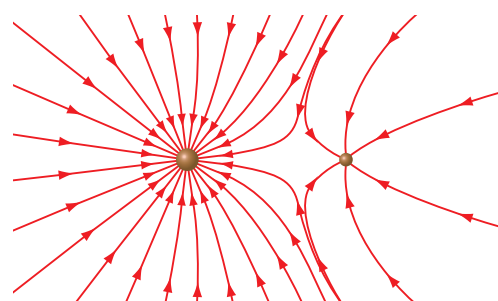
- Masetako bat bestea baino handiagoa bada, eremua nulu egiten den puntua masa txikieneko gorputzetik hurbilago dago (► 1.17. irudia).



1.15. irudia. Masa puntual batek sortutako eremu-lerroak.



1.16. irudia. Bi masa berdinek sortutako eremu-lerroak.



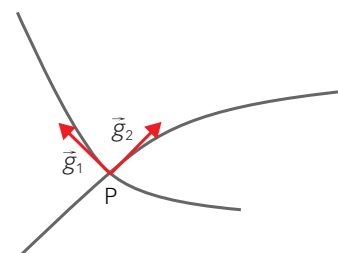
1.17. irudia. Bi masa desberdinek sortutako eremu-lerroak.

Eremu-lerroen propietateak

Eremu-lerroak ezin dira gurutzatu.

Bi eremu-lerro gurutzatuko balira, grabitazio-eremuaren intentsitateak bi balio izango lituzke ebakidura-puntuan, eta hori ezinezkoa da; izan ere, gainezarpeneraren printzipioaren arabera, eremuaren intentsitateak balio bakar bat du puntu bakoitzean.

Ikusi zer gertatzen den 1.18 irudiko P puntuan.



1.18. irudia. Eremu-lerroak ezin dira gurutzatu.

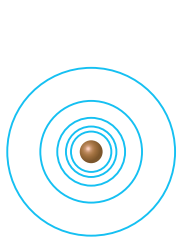
3.2. Gainazal ekipotentzialak

Gainazal ekipotentzialak grabitazio-potentzialaren balio bereko espazioko gunek dira.

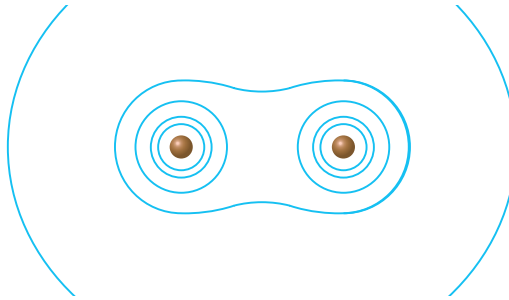
Horren ondorioz, **masa bat gainazal ekipotentzial bateko puntu bate-tik beste batera higitzeko egin behar den lana nulua da:**

$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = -(E_{\text{P amai}} - E_{\text{P has}}) = -(m \cdot V_{\text{amai}} - m \cdot V_{\text{has}}) = 0$$

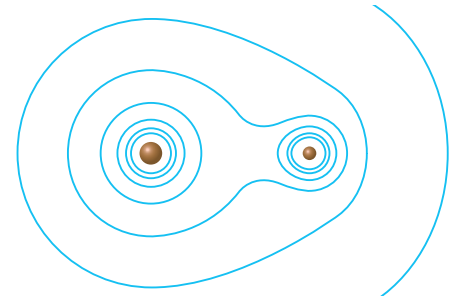
- Eremua masa puntual bakar batek sortua bada, gainazal ekipotentzialak esferak dira, eta erdian masa puntuala dute (► 1.19. irudia).
- Bi masek sortua bada, gainazal ekipotentzialak deformatu egiten dira bi masen eragina nabaritzen den eremuan; deformazioa simetrikoa da, bi masak berdinak badira (► 1.20. irudia).
- Bi masa baldin badaude eta bat bestea baino handiagoa bada, deformazioa asimetrikoa da (► 1.21. irudia).



1.19. irudia. Masa bakar batek sortutako eremuko gainazal ekipotentzialak.



1.20. irudia. Bi masa berdinek sortutako eremuko gainazal ekipotentzialak.



1.21. irudia. Bi masek bat bestearen bikoitza sortutako eremuko gainazal ekipotentzialak.

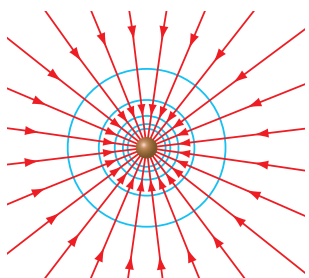
Gainazal ekipotentzialen propietateak

Gainazal ekipotentzialak ezin dira ebaki.

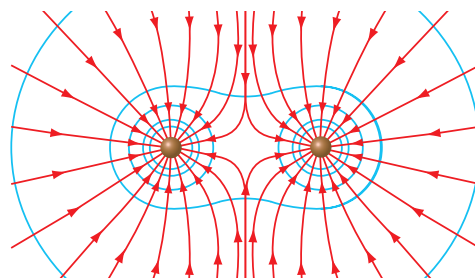
Ebakiko balira, ebakidura-puntuan potentzialak bi balio izango lituzke, eta hori ezinezkoa da, potentzialak balio bakarra baitu puntu bakoitzean.

Gainazal ekipotentzialak eremu-lerroekiko zutak dira.

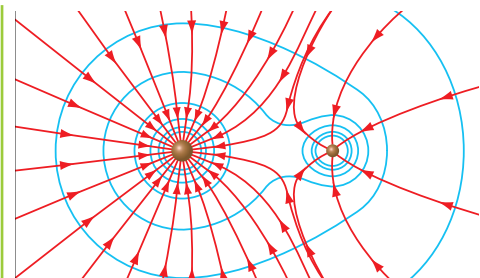
Ikusi 1.22., 1.23. eta 1.24. irudietan eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak adierazita zer emaitza lortu den:



1.22. irudia. Masa bakar batek sortutako eremuko eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.



1.23. irudia. Bi masa berdinek sortutako eremuko eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.



1.24. irudia. Bi masek bat bestearen bikoitza sortutako eremuko eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.

4 Zeruko gorputzen grabitazio-eremua

Unibertsoan masa handiko gorputzak eta sistemak daude, hala nola galaxiak, planetak eta sateliteak, eta horietako bakoitzak grabitazio-eremu bat sortzen du. Sateliteek planeten inguruan duten higidura eta azken horiek izar baten inguruan duten higidura edo galaxien errotazioa elkarrekiko duten erakarpen-indar grabitatorioaren ondorioa dira.

Unibertsoa grabitazio-interakzioaren ikuspegitik aztertuko dugu, haren eboluzioa ulertzen saiatzeko. Zeruko gorputzek egiten duten orbita eta duten energia erlazioatuko ditugu. Batzuetan, azterketa horren ondorioz materia ikusezina dagoela ondorioztatuko dugu, **materia iluna**, hain zuzen, galaxien higidura azaltzeko ezinbestekoa dena.

4.1. Lurraren eta planeten grabitazio-eremua

Lurra eta beste planetak inguruan dituzten gorputzei grabitazio-erakarpina eragiten dieten gorputzak dira. Indar horri normalean **pisu** esaten diogu eta gorputzak aske erortzearen kausa da.

m masa duen gorputz bat hartuko dugu, M_p masa duen planeta batetik r distantziara dagoena. Grabitazio-indarraren eta pisu-indarraren adierazpenak alderatuko ditugu:

$$F_G = \frac{G \cdot M_p \cdot m}{r^2}; \quad P = m \cdot g$$

Grabitatearen azelerazioaren, g -ren, balioa planetaren masaren eta gorputzera arteko distantziaren arabera dela ondorioztatzen dugu; gorputzaren erdigunera dagoen distantzia zenbat eta handiagoa izan, orduan eta txikiagoa izango da g .

$$F_G = P \rightarrow \frac{G \cdot M_p \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot g \rightarrow g = \frac{G \cdot M_p}{r^2}$$

Sarritan, g_0 esaten zaio g -k planetaren gainazalean hartzen duen balioari. Kasu horretan, r bat dator planetaren erradioarekin (► 1.1. taula).

Astroa	Masa (kg)	Erradioa (m)	g (m/s ²)
 Lurra	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$	9,81
 Ilargia	$7,2 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	1,59
 Marte	$6,5 \cdot 10^{23}$	$3,38 \cdot 10^6$	3,80

1.1. taula. Grabitazio-eremuaren balio batzuk planeta eta sateliteen gainazalean.

JARDUERAK

13. 75 kg-ko masa duen pertsona bat Lurraren masaren eta erradioaren laurdena dituen planeta batean badago, zer pisu izango du planeta horretan?

Datua: $g_0 \text{ Lurra} = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Eraitza: 2.940 N

ADIBIDE EBATZIA

7 Erantzun.

- a) Kalkulatu zer pisu duen itsas mailatik Lurraren erradioa halako bi den altuerara igotzen den objektu batek.
- b) Jupiterren batez besteko dentsitatea $1,34 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ -koa da. Kalkulatu zer balio duen grabitatearen azelerazioak haren gainazalean.
- Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $R_J = 7,18 \cdot 10^7 \text{ m}$.

- a) Altuera horretan g -k balio hau du:

$$g = \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{(3 \cdot R_{\text{Lurra}})^2} = \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{9 \cdot R_{\text{Lurra}}^2} = \frac{g_0}{9} \rightarrow P = m \cdot g = \frac{1}{9} \cdot m \cdot g$$

Pisua, g -ren balio gisa, **herenera murrizten da**.

- b) Jupiterren gainazalean, g -k balio hau du:

$$g = \frac{G \cdot M_J}{R_J^2} \quad [1]$$

Erlazioatu dentsitatea masarekin eta bolumenarekin:

$$d = \frac{M_J}{\frac{4}{3} \pi \cdot R_J^3}$$

Bakandu M_J eta ordeztu [1] adierazpenean:

$$g = \frac{G \cdot d \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_J^3}{R_J^2} = G \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot d \cdot R_J \rightarrow$$

Idatzi magnitude guztiak SI sistemako unitatetan:

$$\rightarrow g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,34 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 7,18 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$g = \mathbf{26,88 \text{ N/kg}}$$

4.2. Eguzkiaren grabitazio-eremua eta eguzki-sistema

Eguzkia esfera forma duen eta inguruan planetak orbita eliptikoak eginez biraka dituen masa handi bat dela esan daiteke. Kasu gehienetan, elipsearen eszentrikotasuna txikia da, eta beraz, orbitak esferikoak direla suposa dezakegu.

Horrez gain, planetak Eguzkitik distantzia handira daude, eta ondorioz, guztiak masa puntualtzat har daitezke.

Masa puntual baterako ondorioztatutako adierazpenak erabil ditzakegu Eguzkiak r distantziara sortzen duen grabitazio-eremua eta puntu horretan dagoen planeta bati eragiten dion erakarpen-indar grabitatorioa kalkulatzeko:

$$\vec{g} = -\frac{G \cdot M_{\text{Eguzkia}}}{r^2} \cdot \vec{u}_r ; \quad \vec{F}_G = m_{\text{planeta}} \cdot \vec{g} = -\frac{G \cdot M_{\text{Eguzkia}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad [1]$$

Planeten higidura

Newtonek adierazi zuen moduan, Eguzkiak planetei eragiten dien grabitazio-indarra da haien higidura zirkularra eragiten duen indar zentripetua (► 1.25 irudia).

$$\vec{F}_Z = m_{\text{planeta}} \cdot \vec{a}_Z = -m_{\text{planeta}} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_r \quad [2]$$

[1] eta [2] adierazpenak erlazionatuz:

$$\frac{G \cdot M_{\text{Eguzkia}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} = m_{\text{planeta}} \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Eguzkia}}}{r}} \quad [3]$$

Ondorioa: planetak Eguzkitik zenbat eta urrunago egon, orduan eta abiadura txikiagoan biratzen dira. Planeta baten biraketa-abiadura ez da bere masaren arabera; Eguzkiaren masaren eta Eguzkitik dagoen distantziaren arabera da.

Planetaren abiadura lineala eta bere orbita-periodoa erlazionatzen baditugu:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r. \text{ Eta [3] adierazpenean ordeztzen badugu, hau lortzen dugu:}$$

$$\frac{2\pi}{T} \cdot r = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Eguzkia}}}{r}}$$

Ber bi eginda eta biribilduta, hau lortzen dugu:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{G \cdot M_{\text{Eguzkia}}}$$

Ondorioa: Eguzkiaren inguruan biratzen den edozein planetaren kasuan, $\frac{T^2}{r^3} = \text{kte da}$. Ondorio hori Keplerren hirugarren legea da.

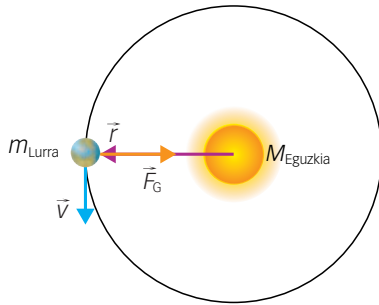
Beste planeta-sistema batzuk

Unibertsoan, deskribatu dugunaren antzeko beste sistema batzuk aurki daitezke; erdigunean masa handiko gorputz bat dute eta inguruan dituen masa txikiagoko beste gorputz batzuei grabitazio-erakarpena eragiten die.

Eguzki-sisteman, planeta batzuek, hala nola Lurrak, Martek, Jupiterrek eta Saturnok, hainbat satellite dituzte inguruan biraka. Eguzki-sistematik kanpo, planeta-sistema propioak dituzten beste izar batzuk daude. Kasu guztietan, hau betetzen da:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_Z; v_{\text{biratzen den gorputza}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{erdiko gorputza}}}{r}}$$

$\left(\frac{T^2}{r^3}\right)_{\text{biratzen den gorputza}} = \text{kte da, eta balio konstante hori } M_{\text{erdiko gorputza}} \text{ masaren arabera da.}$



1.25 irudia. Eguzkiak grabitazio-indarra dela eta erakartzen du Lurra, eta indar hori da, hain zuzen, Lurra Eguzkiaren inguruan zirkuluan higitzea eragiten duen indar zentripetua.

4.3. Biratzen den gorputzaren energia

Eguzkiaren inguruan biratzen diren planetek eta planeten inguruan biratzen diren sateliteek energia zinetikoa dute higiduraren eraginez, eta energia potentziala dute eremua sortzen duen gorputzarekiko duten posizioa dela eta.

Erdiko gorputzaren masa M bada eta biratzen den gorputzaren masa m bada:

$$E_M = E_Z + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Orbitatzen duen gorputzaren kasuan, $F_G = F_Z$ da, eta hortik hau ondorioztatzen da:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Horren bidez, bere energia mekanikoa, E_M , kalkulatzeko modu sinpleago bat lor daiteke E_M :

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Ondorioa: erakarri egiten duen masa handiagoko gorputz baten inguruan orbitatzen duten gorputzek energia mekaniko negatiboa dute; energia mekaniko horren balioa gorputzen arteko distantziarekiko alderantziz proportzionala da.

Biratzen den gorputzaren energia mekanikoa zero egiten da eremua sortzen duen gorputzetik distantzia infinitura dagoenean; hau da, haren grabitazio-eremutik ateratzen denean.

4.4. Ihes-abiadura

Ihes-abiadura deritzogu gorputz batek beste gorputz baten grabitazio-erakarpenetik kanpo geratzeko izan behar duen abiadurari.

Ondorioztatu berri dugunaren arabera, abiadura horrek gorputzak $E_M \geq 0$ lortzea eragin behar du.

$$E_M = E_Z + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \geq 0$$

Adierazpena berrantolatuta, hau izango da ihes-abiadura:

$$v_{\text{ihes}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}}$$

Ohartu ihes-abiadura ez dela biratzen den gorputzaren masaren arabera, hauen arabera baizik:

- Grabitazio-eremua sortzen duen gorputzaren masa: M .
- Gorputz horren erdigunera arteko distantzia: r .

Sarritan, ihes-abiadura aipatzen da gorputz bat planeta baten gainazaletik jaurti eta hark sortutako grabitazio-eremutik ateratzeko behar duen abiadurari erreferentzia egiteko. Kasu horretan, M planetaren masa da, eta r , haren erradioa.

Zeruko hainbat gorputzen ihes-abiadura

	Eguzkia	Merkurio	Artizarra	Lurra	Marte	Jupiter	Saturno	Urano	Neptuno
Erradioa (km)	695.000	2.440	6.052	6.370	3.397	71.492	60.268	25.560	24.746
Masa (kg)	$1,99 \cdot 10^{30}$	$3,30 \cdot 10^{23}$	$4,87 \cdot 10^{24}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,42 \cdot 10^{23}$	$1,90 \cdot 10^{27}$	$5,69 \cdot 10^{26}$	$8,69 \cdot 10^{25}$	$1,02 \cdot 10^{26}$
v_{ihes} (km/s)	618,02	4,25	10,36	11,21	5,02	59,56	35,49	21,29	23,50

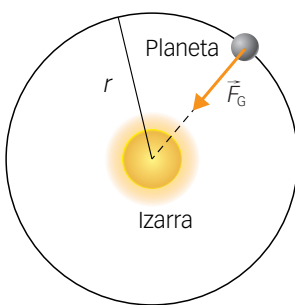
ADIBIDE EBATZIA

- 8** CoRoT-7b planeta, ezagutzen den exoplaneta txikienetakoa, CoRoT-7 izarren inguruan biratzen da $2,58 \cdot 10^9$ m-ko erradioko eta 20,5 h-ko periodoko orbita ia zirkularrean. Planetaren masa $2,90 \cdot 10^{25}$ kg-koa da eta $1,07 \cdot 10^7$ m-ko erradioa du. Kalkulatu:

- CoRoT-7 izarren masa.
- Grabitatearen azelerazioa CoRoT-7b planetaren gainazalean.
- Ihes-abiadura.

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Problema ebazteko, erabili magnitude guztiak SI sistemako unitatetan.



- a) Bere izarren inguruan biratzen den planetaren kasuan:

$$F_z = F_g \rightarrow G \cdot \frac{M_i \cdot m_p}{r^2} = \frac{m_p \cdot v^2}{r}$$

$$\rightarrow G \cdot \frac{M_i}{r} = v^2 \quad [1]$$

Erlazionatu v eta T :

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$$

Ordeztu [1] adierazpenean eta bakandu izarren masa:

$$M_i = \frac{(2\pi)^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

$$M_i = \frac{(2\pi)^2 \cdot (2,58 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (20,5 \cdot 3.600)^2} = 1,87 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

- b) Kalkulatu g planetaren gainazalean:

$$g = \frac{G \cdot m_p}{R_p^2}$$

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,90 \cdot 10^{25}}{(1,07 \cdot 10^7)^2} = 16,89 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- c) Planetaren gainazaleko ihes-abiadura gorputz batek puntu horretan $E_M \geq 0$ izatea eragiten duena da.

$$E_M = E_z + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot m_p \cdot m}{r} \geq 0$$

$$v_{\text{ihes}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot m_p}{R_p}}$$

$$v_{\text{ihes}} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,90 \cdot 10^{25}}{1,07 \cdot 10^7}} = 1,90 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

JARDUERAK

- 14.** Eguzki-argiak 8 min eta 20 s behar ditu Lurrera iristeko, eta 43 min eta 20 s Jupiterrera iristeko. Orbitak zirkularrak direla jota, kalkulatu:

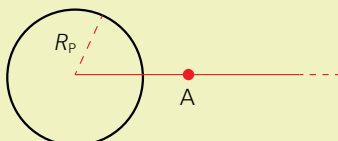
- Jupiterren Eguzkiaren inguruko orbita-periodoa.
- Jupiterren orbita-abiadura.
- Eguzkiaren masa.

Datuak: T_{Lurra} Eguzkiaren inguruan = $3,15 \cdot 10^7$ s;
 $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Eraitza: a) $3,735 \cdot 10^8$ s; b) $1,312 \cdot 10^4$ m/s;
c) $2,013 \cdot 10^{30}$ kg

- 15.** R_p erradioa duen planeta batetik distantzia infinitura dagoen puntu batetik objektu bat aske erortzen uzten da. Kalkulatu:

- Planetaren masa, bere gainazalean grabitatearen intentsitatea g_0 bada.
- Planetaren gainazalera iristean izango duen abiadura.
- Objektuaren abiadura $g_0/2$ -ko grabitatea dagoen A puntutik pasatzean.



Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$;
 $R_p = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Eraitza: a) $5,96 \cdot 10^{24}$ kg; b) $1,117 \cdot 10^4$ m/s; c) $9,396 \cdot 10^3$ m/s

- 16.** 10^{25} kg-ko masa duen planeta bat izar baten inguruan biratzen da, $r = 10^8$ km-ko erradioa eta $T = 2$ urte lurtarreko periodoa duen orbita bat eginez. Kalkulatu:

- Izarren M masa.
- Planetaren energia mekanikoa.
- Planetaren momentu angeluarraren modulua izarren erdigunearekiko.
- Izarretik urrunago dagoen beste planeta baten abiadura angeluarra, haren orbita zirkularrak lehen planetaren orbitaren erradioaren bikoitza, $2r$, badu.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Urte lurtar bat = 365 egun.

Eraitza: a) $1,488 \cdot 10^{29}$ kg; b) $-4,962 \cdot 10^{32}$ J;
c) $9,96 \cdot 10^{39} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$; d) $3,52 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}$

- 17.** Hauek dira, hurrenez hurren, Marteren masa, erradioa eta Eguzkiaren inguruan egiten duen orbitaren erradioa, Lurreko magnitudeekin lotuta: $M_{\text{Marte}} = 0,107 \cdot M_{\text{Lurra}}$; $R_{\text{Marte}} = 0,532 \cdot R_{\text{Lurra}}$; eta $r_{\text{Marte}} = 1,524 \cdot r_{\text{Lurra}}$.

Kalkulatu, Lurrarekin erlazionatuta:

- Orbita-periodoa Eguzkiaren inguruan.
- Grabitatearen balioa eta ihes-abiadura Marteren gainazalean, Lurreko datuekin erlazionatuta.

Eraitza: a) $T_{\text{Marte}} = 1,88 \cdot T_{\text{Lurra}}$; b) $g_M = 0,378 \cdot g_L$;
 $v_{\text{ihes M}} = 0,448 \cdot v_{\text{ihes L}}$

4.5. Energia eta orbita mota

Zeruko gorputz baten energiak bere higidura mota, eta kasu batzuetan, ha-ren orbitaren forma, zehazten ditu.

Demagun m masako gorputz bat M masak sorturiko eremu batean dagoela, M masatik r distantziara. Gorputzaren kasuan, hau betetzen da:

$$E_M = E_Z + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Kasu hauek egon daitezke:

Lehen kasua. $E_M < 0$. $E_M = E_P$ bada, $E_Z = 0$ da. Gorputzak altuera maximoa lortu du eta erori egiten da grabitazio-erakarpenaren eraginez.		
Bigarren kasua. $E_M < 0$. $E_Z > 0$ bada, gorputzak orbita itxia egiten du. Bi orbita itxi mota daude: zirkularra eta eliptikoa.		
Orbita zirkularra	Diagrama: Energia vs. Planetara arteko distantzia. Energia negatiboa da. Guztizko energia konstante da. Potentziala (E_P) negatiboa da eta zinetikoa (E_Z) positiboa da. Orbita zirkularra erakusten da.	Planeta baten inguruan biratzen diren sateliteetan ohikoa da. Beti distantzia berera daude, eta horregatik, beren E_Z eta E_P konstanteak dira beti. $E_M = E_Z + E_P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$
Orbita eliptikoa	Diagrama: Energia vs. Eguzkira arteko distantzia. Energia negatiboa da. Guztizko energia konstante da. Potentziala (E_P) negatiboa da eta zinetikoa (E_Z) positiboa da. Orbita eliptikoa erakusten da.	Orbitan zehar, energia zinetikoa eta potentziala aldatu egiten dira, baina guztizko energiak egonkor dirau. Perihelioan, abiadura handiagoa da. Hori dela eta, E_Z handiagoa da eta E_P txikiagoa da. Mota honetako orbitak egiten dituzte Eguzkiaren inguruan biratzen diren planetek eta komunikazio-satelite batzuek.
Hirugarren kasua. $E_M \geq 0$. Gorputzak orbita irekia egiten du. Bi orbita ireki mota daude: parabolikoa eta hiperbolikoa.		
Orbita parabolikoa $E_M = 0$	Diagrama: Energia vs. Eguzkira arteko distantzia. Energia zero da. Guztizko energia konstante da. Potentziala (E_P) negatiboa da eta zinetikoa (E_Z) positiboa da. Orbita parabolikoa erakusten da.	Gorputzak abiadura nahikoa du grabitazio-eremutik ihes egiteko. Uneoro, $E_Z = -E_P$. Grabitazio-eremutik ateratzen denean, $E_P = 0$ da, eta horrek adierazten du $E_Z = 0$ dela eta abiadura $v = 0$ dela. Mota horretako orbitak egiten dituzte eguzki-sistemara iristen diren baina Eguzkiaren grabitazio-eremutik ihes egiteko moduko abiadura duten kometa batzuek.
Orbita hiperbolikoa $E_M > 0$	Diagrama: Energia vs. Eguzkira arteko distantzia. Energia positiboa da. Guztizko energia konstante da. Potentziala (E_P) negatiboa da eta zinetikoa (E_Z) positiboa da. Orbita hiperbolikoa erakusten da.	Gorputzak grabitazio-eremutik ihes egingo du, eta ateratzean, bere abiadura zero baino handiagoa izango da. Uneoro, $E_Z > -E_P$. Mota horretako orbitak egiten dituzte une batez eguzki-sistemara sartu baina segituan alde egiten duten asteroide batzuek.

4.6. Galaxien errotazioa eta materia iluna

Zeruko gorputz gehienak galaxietan multzokatzen dira, hau da, izar, hauts eta gasezko aglomerazioetan. Galaxia bakoitzean milioika izar biratzen dira grabitazio-erakarpenak berak definitutako erdigune baten inguruan orbitak eginez.

Osagaiak nola antolatzen diren, galaxiek askotariko formak izan ditzakete: eliptikoa, espirala edo amorfoa. **Galaxia espiralen** erdian disko bat egon ohi da, **erraboil** deritzona; erraboiletik besoak ateratzen dira, eta beso horietan diskoaren inguruan modu zirkularrean biraka ari diren izarrak daude. Eguzkia Esne Bidearen –gure galaxia, espirala– Sagittarius besoan dagoen izar bat da.

Era berean, eta grabitazio-erakarpenaren ondorioz, galaxiek **kumulu** deritzen multzoak osatzen dituzte, eta horiek **superkumulu**etan multzokatzen dira. Gu Superkumulu Lokalean gaude, eta bertan daude Talde Lokala eta Virgo Kumulua, besteak beste. Talde Lokala galaxia multzo txiki bat da, eta haren barruan daude, esaterako, Esne Bidea eta Andromeda.

Galaxia batek duen masa bere argitasunagatik ebaluatuta, zenbat eta handiagoa izan erraboilaren erdira arteko distantzia, orduan eta txikiagoa izan behar luke galaxiaren besoetako izarren abiadurak. Baina Vera Rubin-ek hasitako ikerketek adierazten dute abiadurak konstante irauten duela edo handitu egiten dela. Hori azaltzeko, espazioan ikusten duguna baino materia gehiago dagoela ondorioztatu zen. Hautemangarria ez den materia da, eta horregatik **materia iluna** esaten zaio; gainera, dirudienez, galaxiak materia ilunezko halo handietan murgilduta daude.

Materia ilun deritzogu gaur egungo baliabideekin ikusteko adina erradiazio elektromagnetiko igortzen ez duen materiari, baina hor dagoela ondorioztatze bide ematen duenari, materia ikusgaiarengan dituen eragin grabitazionalengatik (► 1.26. irudia).

Fritz Zwicky astronomo suitzarrak proposatu zuen 1933an. Galaxietako materia argiduna materia guztiaren % 10 bakarrik dela pentsatzen da.

Materia iluna eta zulo beltzak

Bestalde, zulo beltzetan materia ilunak eragiten duen grabitazio-erakarpina hain da handia, ihes-abiadura argiaren abiadura baino handiagoa baita. Horrek esan nahi du fotoiek ez dutela zulo beltzen erakarpenetik ihes egiten.

Uste denaren arabera, zulo beltzak grabitazio-kolapso baten emaitza dira, izar-gorputz baten grabitatearen eraginez gorputz horren barrurantz gertatzen den suntsitze baten emaitza, alegia. Zulo beltz desberdinak daude: batzuk supermasiboak dira, milioika eguzkiren pareko masa dutenak, eta beste batzuk mikrozuloak.

JARDUERAK

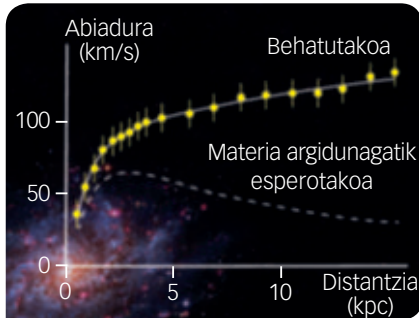
- 18.** Zulo beltza hain objektu masiboa izanik, bere ihes-abiadura argiak hutsean duen abiaduraren berdina da. Zehaztu zulo beltzaren erradioa, Schwarzschild-en erradioa deritzona, Newtonen grabitazio unibertsalaren bidez.

a) Eguzkiak baino 10 aldiz masa handiagoa badu. b) 1 kg-eko masa badu.

Datuak: $v_{\text{argia hutsean}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$;

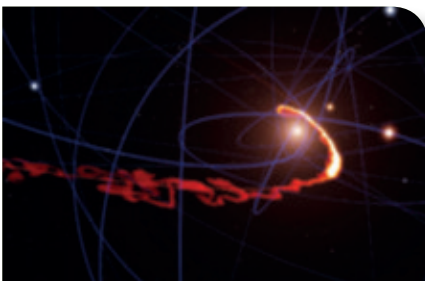
$M_{\text{Eguzkia}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Emaitza: a) $2,95 \cdot 10^4 \text{ m}$; b) $1,48 \cdot 10^{-27} \text{ m}$



1 kpc = 1.000 parsec = 3.262 argi-urte.

1.26. irudia. M 33 galaxian behatutako errotazio-kurba. Behatutako abiaduren eta materia argidunetik abiatuz espero ziren abiaduren aldea materia iluna egoteari egozten zaio.



Esne Bidearen erdian **zulo beltz** supermasibo bat hauteman da. Bere masa Eguzkiarena baino 4,5 milioi aldiz handiagoa da eta 25 milioi kilometroko diametroa du. **Sagittario A*** du izena.

Izar batzuk galaxiaren erdigunearen inguruan oso bizkor higitzen zirela ikusi zenean ondorioztatu zen zulo beltz hori hor zegoela.

5 Planeten eta sateliteen higidura

Espazioan, modu naturalean dauden gorputzez gain, badira gizakiak jarritako satelite artifizialak ere, teknologia berriei esker kanpo-espazioko beste alderdi batzuk ezagutzeko jarritakoak, hala nola komunikazioa errazteko eta aurreikuspen meteorologikoak egiteko. Horietako asko Lurraren gainazale-tik altuera jakin batera edo bestera orbitatzen duten sateliteak dira.

5.1. Lurraren inguruan orbitatzen duten sateliteak

Jarraian, Lurraren inguruan orbita geldikorrek egiten dituzten sateliteen higidura aztertuko dugu (► 1.27. irudia). Horietan guztietan:

- Orbita zirkularra da.
- Grabitazio-indarra sateliteak higitzen jarraitzea eragiten duen indar zentripetua da.

Orbita-abiaduraren kalkulua

Lurraren gainazale-tik h altuerara biratzen den satelite baten kasuan:

$$F_G = F_Z \rightarrow G \cdot \frac{M_{\text{Lurra}} \cdot m_{\text{satelitea}}}{r^2} = \frac{m_{\text{satelitea}} \cdot v^2}{r}$$

Hori horrela, h altueran orbitatzen duen satelite baten abiadura hau da:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{R_{\text{Lurra}} + h}}$$

- v biratzen den gorputzaren orbita-abiadura da.
- M_{Lurra} Lurraren masa da ($5,98 \cdot 10^{24}$ kg). R_{Lurra} Lurraren erradioa da (6.370 km).
- r sateliteak egiten duen orbitaren erradioa da.

$$r = R_{\text{Lurra}} + h$$

h satelitetik Lurraren gainazalera arteko distantzia da.

Orbita-periodoaren kalkulua

Sateliteak bere orbita osatzeko behar duen denbora kalkulatzeko, orbita-abiaduraren eta abiadura angeluarraren arteko erlazioa erabiliko dugu. Aurreko arrazoibidea erabilita:

$$F_G = F_Z \rightarrow G \cdot \frac{M_{\text{Lurra}} \cdot m_{\text{satelitea}}}{r^2} = \frac{m_{\text{satelitea}} \cdot v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M_{\text{Lurra}}}{r} = v^2 \quad [1]$$

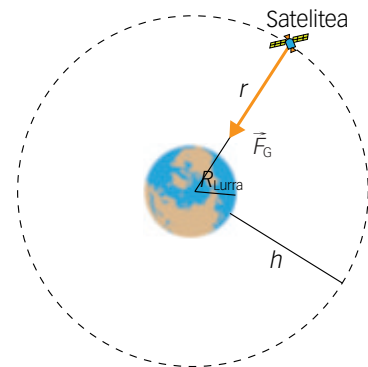
$$v = \omega \cdot r \rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2 \quad [2]$$

[1] eta [2] erlazionatuta eta berrantolatuta, periodoa atera dezakegu:

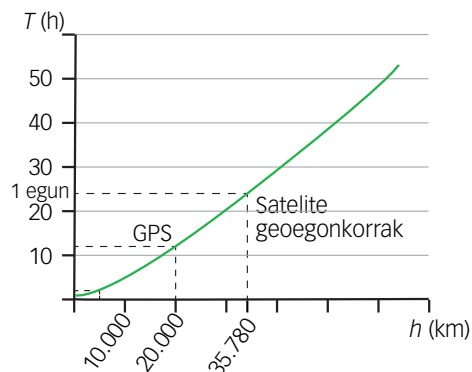
$$\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

Hau da h altueran orbitatzen duen satelite baten periodoa (► 1.28. irudia):

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_{\text{Lurra}}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_{\text{Lurra}} + h)^3}{G \cdot M_{\text{Lurra}}}}$$



1.27. irudia. Sateliteen higidura Eguzkiaren inguruan biratzen diren planeten higiduraren antzekoa da. Orbita zirkularrak edo eliptikoak egiten dituzte; guk orbita zirkularretan jarriko dugu arreta.



1.28. irudia. Sateliteek zenbat eta altuera handiagoan orbitatu, orduan eta periodo handiagoa dute. Horrez gain, T denbora h altueraren arabera da.

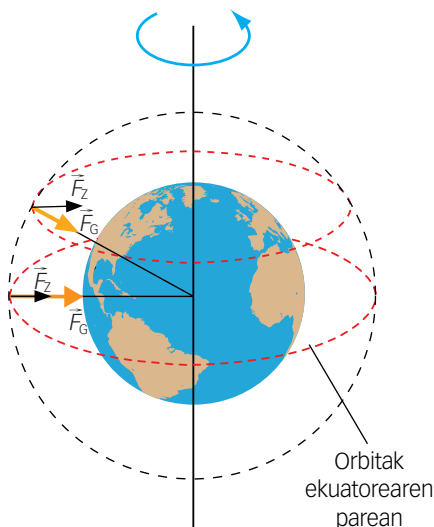
JARDUERAK

- 19.** 2013ko otsailean, Europako Espazio Agentziak satelite berri bat, Amazonas 3, jarri zuen Lurraren inguruan orbitan.

Kalkulatu Lurraren gainazale-tik zer altueratara dagoen (kilometrotan) eta zer periodo duen (ordutan), satelitearen abiadura 3.074 m/s bada.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.

Emitza: a) 35.830 km; b) 23,96 h

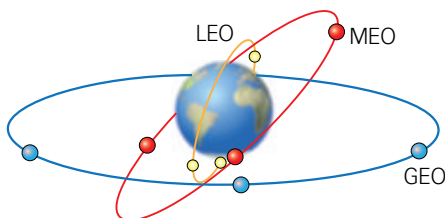


1.29. irudia. Satelite geogonkorrek lur-ekuatorearen parean orbitatzen dute.

Gogoratu

1 egun sideral:

23 h 56 min 3,5 s $\approx$ 23,98 h = 86.328 s



1.31. irudia. Posizioaren arabera, Lurraren inguruan orbitatzen duten sateliteen izen hauek dituzte:

- LEO: *Low Earth Orbit*. Adibidez: sistema Iridioa, 66 komunikazio-satelitez osatua.
- GEO: *Geosynchronous Orbit*. Adibidez: Meteosat satelite meteorologikoak.
- MEO: *Mid Earth Orbit*. Adibidez: GPS zerbitzua eskaintzen duten 24 sateliteak.

Satelite geogonkorrak

Satelite geogonkor edo **geosinkrono** deritze Lurraren inguruan orbitatzen beti puntu beraren gainean dirauten sateliteei.

Lurreko behatzaile batentzat, satelite horiek ez dira posizioz aldatzen denbora pasatu ahala; hau da, ez direla mugitzen *dirudi*.

Horretarako, haien orbita-periodoak Lurrarenaren berdina izan behar du (egun siderala: 23 ordu, 56 minutu eta 3,5 segundo) eta **lur-ekuatorearen planoan** orbitatu behar dute (► 1.29. irudia). Horren arrazoia da modu horretan bakarrik bermatzen dela grabitazio-indarra bera izatea satelitearen ibilbide osoan.

Arrazoi horiek direla medio, satelite geogonkor batek Lurraren gainazaletik altuera jakin batera orbitatzen du, eta hori honela kalkula daiteke:

Orbitaren erradioa periodoaren adierazpenetik aterako dugu:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_{\text{Lurra}}}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_{\text{Lurra}}}{4\pi^2}}$$

Gure planetaren datuekin egingo ditugu kalkuluak:

- $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
- $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- $T = 23 \text{ ordu, } 56 \text{ minutu eta } 3,5 \text{ segundo} = 8.616 \text{ s}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(8.616 \text{ s})^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Lurraren gainazaletik altuera honetara orbitatzen du:

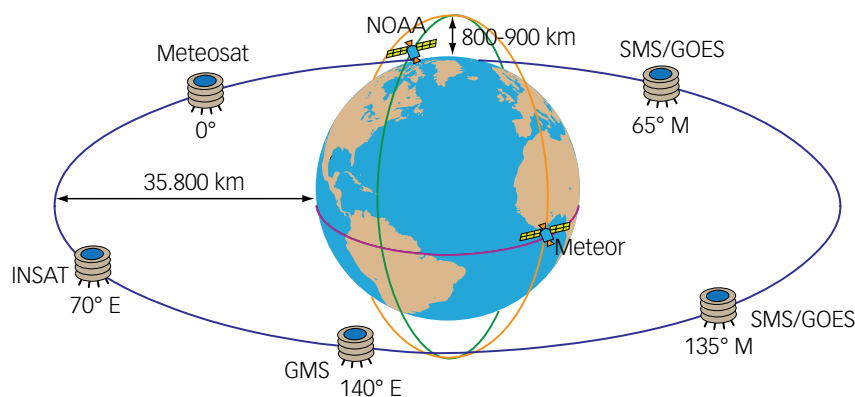
$$h = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m} - 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} = 3,58 \cdot 10^7 \text{ m} \approx 3.800 \text{ km}$$

Satelite geogonkorren abiadura ere kalkula daiteke:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4,22 \cdot 10^7}} = 3.074 \text{ m/s}$$

Laburbilduz: satelite geogonkorrek Lurraren gaineko puntu jakin batean daude (► 1.30. irudia). Hori lortzeko:

- Lurraren periodo bera dute: 23 ordu, 56 minutu eta 3,5 segundo (8.616 s).
- Beren orbita lur-ekuatorearen parean dago.
- Lurraren gainazaletik $3,58 \cdot 10^7 \text{ m}$ -ra (35.800 km-ra) daude, gutxi gora-behera.



1.30. irudia. Satelite meteorologikoen adibideak. Horietako asko geogonkorrek dira.

5.2. Sateliteen energia

Aztertzen ditugun sateliteak grabitazio-eremuaren eragina soilik jasaten dute, eta horri esker, duten energia mekanikoa erraz kalkulatzeko da:

$$E_M = E_Z + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Orbitatzen duen satelitearen kasuan $F_G = F_Z$ da, eta hortik hau ondorioztatzen da:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Horrela, satelite baten **energia mekanikoari** buruzko informazio sinpletuagoa lor daiteke:

$$E_M = \frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Baldintza horietan, sateliteek energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa betetzen dute, eta horri esker, orbita jakin bat izatera iristeko jaurtiketa-puntuan zer abiadura aplikatu behar zaien kalkulatzeko aukera dago.

Hedaduraz, orbita batetik bestera pasatzeko eman behar zaien energia ere kalkula dezakegu, bai eta dauden grabitazio-eremutik ateratzeko behar duten energia ere.

Satelite bat orbitan jartzeko jaurtiketa-abiadura

Imajinatu dezagun satelite bat (► 1.32. irudia) Lurraren gainazaletik (1 posizioa) (► 1.33. irudia) jaurtitzen dela, orbita jakin bat lortzeko (2 posizioa). Energiaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuko dugu:

$$\begin{aligned} E_{M1} = E_{M2} &\rightarrow E_{Z1} + E_{P1} = E_{Z2} + E_{P2} \\ \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R_{Lurra}} &= \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r} \\ \frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M}{R_{Lurra}} &= \frac{1}{2} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M}{r} \end{aligned} \quad [1]$$

2 posizioan, $F_G = F_Z$:

$$\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \frac{\cancel{m} \cdot v_2^2}{r} \rightarrow \frac{G \cdot M}{r} = v_2^2 \quad [2]$$

[1] eta [2] adierazpenak sinplifikatuta erlazionatzen baditugu:

$$v_1^2 - \frac{G \cdot M}{R_{Lurra}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M}{r} \rightarrow v_1^2 = 2 \cdot \left(\frac{G \cdot M}{R_{Lurra}} - \frac{1}{2} \frac{G \cdot M}{r} \right)$$

Hau da satelite bat orbitan jartzeko behar den **jaurtiketa-abiadura**:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R_{Lurra}} - \frac{1}{2 \cdot r} \right)}$$

Gogoratu r satelitearen orbitaren erradioa dela: $r = R_{Lurra} + h$ eta h -k Lurraren gainazaletik zer altueratara dagoen adierazten duela.

Hau da, zer abiadurarekin jaurtitzen dugun, orbita altuagoa edo baxuagoa izango da.

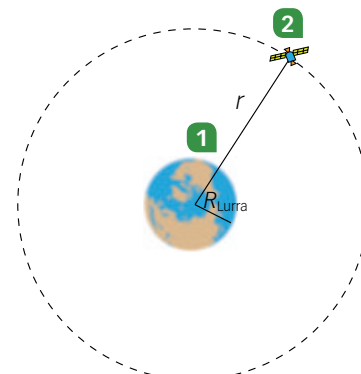
Gogoratu

Planeta baten inguruan orbitatzen duen satelite baten E_M , E_Z eta E_P elkarrekin erlazioa daitezke:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot E_P; \quad E_Z = -\frac{1}{2} \cdot E_P$$



1.32. irudia. Satelite baten jaurtiketa. Orbitan jartzeko beharrezkoa da sateliteari energia ematea.



1.33. irudia. 1. posiziotik 2. posiziara joatean, energia kontserbatu egiten da.

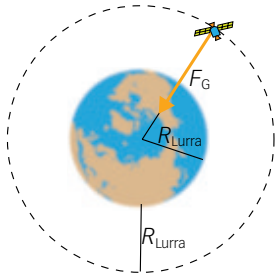
ADIBIDE EBATZIA

- 9 10^4 kg-ko masa duen satellite bat Lurraren inguruan orbitan jarri da Lurraren erradioaren bikoitza den altueran. Kalkulatu:

- Lurraren gainazaletik igorri zaion energia.
- Orbita hori deskribatzeko behar duen indar zentripetua.
- Satelitearen periodoa orbita horretan.

Datuak: $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.

Problema eabazteko, erabili magnitude guztiak SI sistemako unitatetan.



- Satelitea Lurraren grabitazio-eremuaren mende egongo da uneoro. Beraz, energia mekanikoa kontserbatuko du.

Jaurtiketa-puntuaren eman behar zaion energia zinetikoaren eta duen energia potentzialaren baturak bat etorri behar du orbitan duen energia mekanikoarekin:

- Jaurtiketa-puntuaren: $E_P = -\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}}}$
 - Orbitan: $E_M = E_Z + E_P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}}}$
- $$E_Z \text{ Jaurtiketa} + E_P \text{ Jaurtiketa} = E_M$$

$$\begin{aligned} E_Z \text{ Jaurtiketa} &= E_M - E_P \text{ Jaurtiketa} \\ E_Z \text{ Jaurtiketa} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}}} - \left(-\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}}} \right) = \\ &= \frac{3 \cdot G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{4 \cdot R_{\text{Lurra}}} \end{aligned} \quad [1]$$

M_{Lurra} ezezaguna denez, g_0 erabiliko dugu:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{R_{\text{Lurra}}^2} \rightarrow G \cdot M_{\text{Lurra}} = g_0 \cdot R_{\text{Lurra}}^2 \quad [2]$$

Ordeztu [1] adierazpenean eta kalkulu jaurtiketako E_Z :

$$E_Z \text{ Jaurtiketa} = \frac{3 \cdot g_0 \cdot R_{\text{Lurra}}^2 \cdot m}{4 \cdot R_{\text{Lurra}}} = \frac{3 \cdot g_0 \cdot R_{\text{Lurra}} \cdot m}{4}$$

Erabili balio guztiak SI sistemako unitatetan:

$$E_Z \text{ Jaurtiketa} = \frac{3 \cdot 9,8 \cdot 6.370 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{4} = 4,68 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

- Orbitan dagoen satellitearen kasuan, $F_Z = F_G$.

$$F_Z = G \cdot \frac{M_{\text{Lurra}} \cdot m_{\text{Sat}}}{r^2}$$

[2] adierazpena erabilia eta $r = 2 \cdot R_{\text{Lurra}}$ dela jakinda:

$$F_Z = \frac{g_0 \cdot R_{\text{Lurra}}^2 \cdot m_{\text{Sat}}}{(2 \cdot R_{\text{Lurra}})^2} = \frac{9,8 \cdot 10^4}{4} = 24.500 \text{ N}$$

- F_Z jakinda, satelliteak orbitan duen abiadura kalkulatu daiteke. Eta hori jakinda, periodoa kalkulatu da:

$$F_Z = \frac{m_{\text{Sat}} \cdot v^2}{r} = \frac{m_{\text{Sat}} \cdot (\omega \cdot r)^2}{r} = m_{\text{Sat}} \cdot r \cdot \frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

Berrantolatu eta ordeztu balioak:

$$T = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 2 \cdot 6.370 \cdot 10^3 \cdot (2\pi)^2}{24.500}} = 1,433 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 4 \text{ h}$$



JARDUERAK

20. Satellite artifizial batek orbita zirkular bat egiten du Lurraren gainazaletik 300 km-ko altueran.

- Kalkulatu satellitearen abiadura.
- Kalkulatu orbita-periodoa.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;
 $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.

Eraitza: a) $7,733 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; b) $5,419 \cdot 10^3 \text{ s}$

21. Planeta gorriari buruzko informazioa lortzeko asmoz, hiru espazio-ontzi bidali nahi dira Martera, satellite marte-egonkor gisa jartzeko. Zehaztu:

- Zer orbita mota izango luketen satelliteak.
- Marteren gainazaletik zer distantziatara egongo liratekeen.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$;
 $M_{\text{Marte}} = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$; $R_{\text{Marte}} = 3.397 \text{ km}$;
 $T_{\text{Marte}} = 5,93 \cdot 10^7 \text{ s}$

Eraitza: b) $1,559 \cdot 10^6 \text{ km}$

22. NASAREN Terra satellitea Lurraren gainazalari, ozeanoari eta atmosferari buruzko informazioa biltzeko diseinatuta dago. Datu horiekin, zenbait ingurueren eta sistema biologikoen interrelazioa aztertzea lortzen da.

Satelliteak orbita zirkular bat egiten du poloetatik pasatzen den planoan, Lurraren gainazaletik 760 km-ko altueran (zirkunpolarra). Satelliteak $4,86 \cdot 10^3 \text{ kg}$ -ko masa duela jakinda, kalkulu:

- Satelitearen higiduraren periodoa, Lurraren inguruan duen orbitan.
- Satelitea Lurraren gainazaletik bere orbitara jaurtitzeko eman behar zaion energia.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;
 $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.

Eraitza: a) $5,99 \cdot 10^3 \text{ s}$; b) $168 \cdot 10^{11} \text{ J}$

Orbita batetik bestera pasatzeko behar den energiaren kalkulua

Imajinatu dezagun gure satelitea 2. orbitatik 3. orbitara igarotzea nahi dugula (► 1.34. irudia). Eman behar diogun energiak bat etorri behar du sateliteak orbita batean duen energiaren eta bestean duen energiaren arteko aldearekin.

$$\Delta E = E_3 - E_2 = \left(-\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r_3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r_2} \right)$$

Hau da:

Hau da r_2 erradioko orbita batetik r_3 erradioko beste batera pasatzeko behar den energia, $r_2 < r_3$ bada:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)$$

$r_3 > r_2$ bada, $\Delta E > 0$ izango da.

Ihes-abiadura

Satelite batek grabitazio-eremu batetik ihes egin ahal izateko, $E_M \geq 0$ bete behar da.

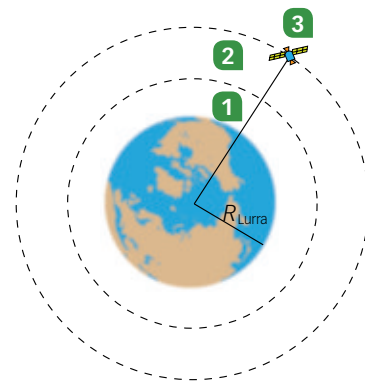
Planeta baten gainazaletik h distantziara orbitatzen duen satelite batek haren grabitazio-eremutik ihes egingo du, baldin eta:

$$E_M = E_Z + E_P \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ihes}^2 - G \cdot \frac{M_P \cdot m}{R_P + h} \geq 0$$

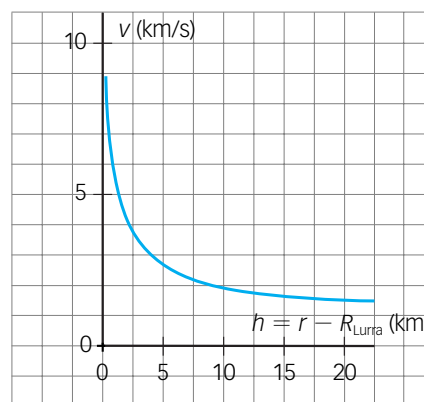
Hau da M_P masa eta R_P erradioa dituen planeta baten grabitazio-eremuan dagoen satelite baten **ihes-abiadura**:

$$v_{ihes} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P + h}}$$

h letrak satelitea planetaren gainazaletik zer distantziatar dagoen adierazten du.



1.34. irudia. 2tik 3ra pasatzeko, sateliteari energia eman behar diogu.



Grafikoa ikusten dugu, satelitea eta eremua sortzen duen gorputzaren arteko distantzia zenbat eta handiago izan, orduan eta txikiago dela satelitearen ihes-abiadura.

JARDUERAK

- 23.** Espazio-anezka bat orbita zirkular batean zegoen Lurraren gainazaletik 200 km-ra, eta 520 km-ra dagoen beste batera pasatu da. Anezkaren masa 55.000 kg-koa bada:

- Kalkulatu anezkak hasierako orbitan zer periodo eta zer abiadura zituen.
- Zenbat energia behar du anezkak orbita berrira pasatzeko?

Datuak: $M_{Lurra} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{Lurra} = 6.370$ km.

Eraitza: a) 5.298 s; 7.792 m/s; b) $7,75 \cdot 10^{10}$ J

- 24.** 2.200 km-ko erradioa duen planeta esferiko batean, gainazaleko grabitatearen azelerazioa $g_0 = 5,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ da.

- Kalkulatu planetak zer masa duen eta bere gainazaleko ihes-abiadura zenbatekoa den.
- Zer altueratan, h , orbitatu behar du egun batean orbita zirkular bat egiten duen 400 kg-ko satelite batek?

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Eraitza: a) $3,77 \cdot 10^{23}$ kg; 4.781,2 m/s; b) $1,46 \cdot 10^7$ m

- 25.** Jaurtigai bat itsas mailatik jaurti da Lurraren gainazaletik $1,2 \cdot 10^6$ m-ko altuerara. Jaurtigaiaren masa 600 kg bada, kalkulatu:

- Zenbat handitu den jaurtigaiaren energia potentzial grabitatorioa.
- Zenbat energia eman behar zaion jaurtigaiari, altuera horretan Lurraren grabitazio-eremuaren eraginetik ihes egiteko.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;

$M_{Lurra} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{Lurra} = 6.370$ km.

Eraitza: a) $5,976 \cdot 10^9$ J; b) $1,586 \cdot 10^{10}$ J

- 26.** Erantzun galderei eta arrazoitu erantzunak.

- Zer abiadura du Lurraren inguruan orbita zirkularrean dabilen satelite batek? Ondorioztatu adierazpena.
- Nola aldatzen da gorputz baten ihes-abiadura, Lurraren gainazaletik duen altuera $2 R_{Lurra}$ izatetik $3 R_{Lurra}$ izatera pasatzen bada?

6 Bidaia espazioan barrena

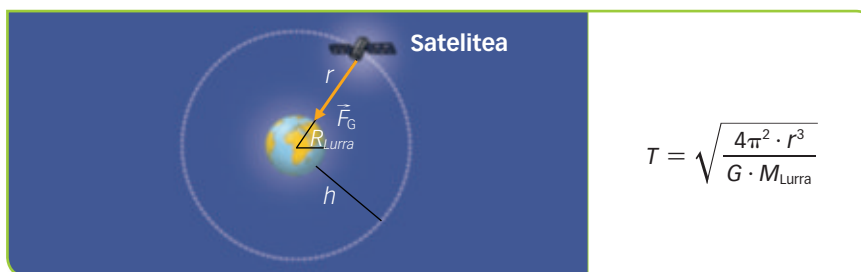
xx. mendearen erdialdetik, hainbat herrialdek eta nazioarteko erakundek espazio-ontziak bidaltzen dituzte espaziora, gidaridunak zein gabeak, kanpo-espazioari buruz ditugun ezagutzetan sakontzeko helburuarekin.

Bidaetan, espazio-ontziak Lurraren grabitazio-eremutik ateratzen dira eta Ilargiarenean edo beste planeta batzuenean sartzen dira. Ontzi horien higidura ezagutzeko, higitzen ari diren gorputzek sortutako grabitazio-eremu desberdinen eraginpean dauden gorputzen portaera aztertu behar da.

6.1. Hiru gorputzen problema. Lagrangeren puntuak eta kaos determinista

Newtonen grabitazio unibertsalaren legeak ongi azaltzen du elkarri grabitazio-erakarpina eragiten dioten bi gorputzen higidura; adibidez, Eguzkiarena eta Lurrarena, Lurrarena eta Ilargiarena, eta Lurrarena eta satelite batena.

Gorputz txikia handiaren inguruan biratzen da orbita geldikor bat eginez (sinpletzeko, demagun orbita zirkularra dela), eta bere errotazio-periodoa bi gorputzen erdiguneen artean dagoen distantziarekin erlazionatuta dago:



Problemari heltzea askoz zailagoa da, higitzen ari diren hiru gorputz edo gehiagok elkarri eragiten dioten grabitazioa kontuan hartzen badugu.

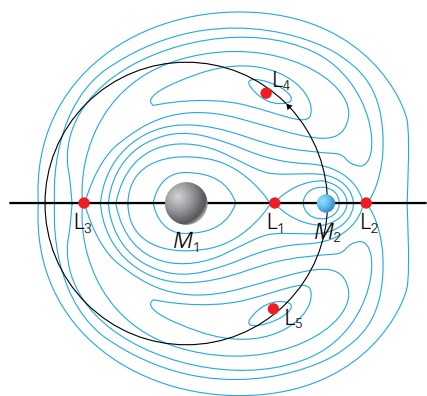
1772an, Joseph-Louis Lagrangek eta Leonhard Eulerrek hiru gorputzen problema aztertu zuten, murrizketa batzuekin. Masa baztergarria zuen hirugarren gorputz bat beste biren, M_1 eta M_2 , grabitazio-eremuan higitzen zela jo zuten. M_2 gorputza M_1 baino txikiagoa zen eta haren inguruan biratzen zen, orbita zirkular bat eginez (edo gutxi gorabehera). Egoera horren adibide gisa, Lurraren eta Ilargiaren edo Eguzkiaren eta Lurraren grabitazioaren eraginpean higitzen zen hauts izpi bat imajinatu zuten.

Sistema horietarako, Eulerrek eta Lagrangek bost puntu aurkitu zituzten, eta puntu horietan, hauts izpiak M_1 gorputzaren inguruan egiten duen orbitaren periodoa eta M_2 gorputzaren errotazioaren periodoa berdinak dira (► 1.36. irudia). Puntu horiei **Lagrangeren puntuak** edo **L puntuak** deritze.

Sistemako gainazal ekitentzialak marraztuta, hau aurkitu zuten:

- L_4 eta L_5 puntuak **oreka egonkorrean** daude. Hirugarren gorputza oreka-posiziotik zertxobait bat aldentzen bada, orekara itzuliko da berriz.
- L_1 , L_2 eta L_3 puntuak **oreka ezegonkorrean** daude. Oreka-desplazamenduek posizio horretatik aldentzea eragiten duten indarrak sortzen dituzte.

Gaur egungo terminologia erabilita, **kaos deterministaren** baitako fenomeno da. Sistema ongi determinatuta dago, baina L_1 , L_2 eta L_3 puntuetako jatorrizko baldintzetan aldaketa txiki bat egoteak efektu handi bat du, gainazal ekitentzial batean zeharreko desplazamendu handi bat izan daitekeena.



1.35. irudia. L izendatutako puntuak M_1 gorputzaren inguruan biratzen dira, eta haien periodoa M_2 -ren orbitarenaren berdina da.

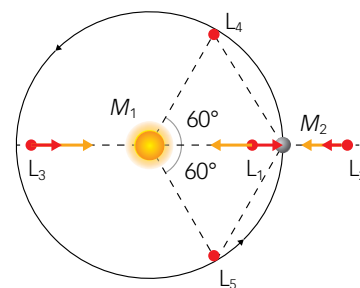
Lagrangeren puntuen kokapena

L_1 , L_2 eta L_3 puntuak M_1 eta M_2 masak lotzen dituen lerroan daude.

M_1 eta M_2 masen artean dagoen gorputz batek jasango duen grabitazio-indar garbia M_1 masak soilik eragindakoa baino txikiagoa izango da. Masa baztergarria duen hirugarren gorputzak –lehen aipatutako lerroko puntu batean dagoenak– periodo handiagoko orbita izango du M_1 masaren eraginpean soilik dagoen gorputz batek baino. L_1 puntuan, hirugarren gorputzaren periodoa bat etorriko da M_2 masak M_1 masaren inguruko biraketan duen periodoarekin.

Horren antzeko arrazoietek L_2 eta L_3 non dauden zehazteko aukera ematen dute. Azken hori M_2 masaren orbitatik gertuago dago, gorputz txikiak eragin gutxi baitu hirugarren gorputzak L_3 puntuan jasaten duen indar garbian.

L_4 eta L_5 puntuak M_2 gorputzaren orbitan daude ia. M_1 masarekin lotzen dituen lerroak 60° -ko angelua osatzen du M_1 eta M_2 lotzen dituen lerroarekiko. Kalkulua ez da hain intuitiboa.



1.36. irudia. Lagrangeren puntuen kokapena.

6.2. Lagrangeren puntuen erabilera

XX. mendeko azken laurdenean ordenagailuek kalkulu-potentzia izan duten garapen handiari esker, Lagrangeren puntuak espazio-misioetan erabiltzeko aukera erraztu da.

Eguzkia-Lurra eta Lurra-Ilargia sistemetan, espazio-ontzi bat izango da masa baztergarriko hirugarren gorputza. Bost L puntuetako batean kokatzen bada, behaketak egin ahalko ditu oreka-egoeran.

Beheko taulan biltzen dira Eguzkia-Lurra sistemako L_1 eta L_2 puntuetan egon diren edo misioan dauden espazio-ontziak; bi puntuak Lurretik 1,5 milioi kilometrora daude. L_3 puntua oraindik ez da erabili horretarako. Gehienak NASaren eta ESaren (Europako Espazio Agentzia) misioak dira.

Eguzkia-Lurra sistemako L_1 puntua	Eguzkia-Lurra sistemako L_2 puntua
2001eko abendutik 2004ko apirilera bitartean, NASaren Genesis zundak eguzki-haizearen partikulak bildu zituen. Gaur egun han daude: - WIND, eguzki-haizea eta eremu magnetikoa neurtzera bideratutako NASaren satelitea. - SOHO (<i>Solar and Heliospheric Observatory</i>), Eguzkia eta haren atalak behatzeko tresnen multzoa. ESAk eta NASAk elkarlanean duten misioa da. - ACE (<i>Advanced Composition Explorer</i>), eguzki-haizearen konposizioa aztertzen duen NASaren misioa.	2001-2010 aldian NASaren WMAP (<i>Wilkinson Microwave Anisotropy Probe</i>) zundak <i>Big Bango</i>ko hondoko mikrouhin-erradioaren geldikinak aztertu zituen. - Herschel espazio-behategiak nahiko ezezagunak ziren urruneko objektuak behatu zituen. 2013ko ekainean kanpora jaurti behar izan zen, tangetan helioa falta zuelako. - Gaur egun, han daude Planck espazio-behategia eta Gaia zunda; azken horren egitekoa mila milioi objektu astronomikoren 3D katalogoa osatzea da. Azken hirurak ESaren misioak dira.

6.3. Espazioko autobideak

Horrela deritze espazio-ontziek espazioko leku batetik bestera ahalik eta erregai gutxien kontsumituz joateko har ditzaketan bideei.

Oreka ezegonkorreko L puntuak aprobetxatzen dira. Oreka-posizioaren desbideratze txiki batekin espazio-ontzia urruneko puntuetara higitu daiteke, ia energiarik gastatu gabe. Uste denaren arabera, horrela higitu dira eguzki-sisteman zehar Lurrera bizitzeko beharrezkoak diren elementuak ekarri dituzten kometak eta asteroideak, Lurra goitik behera aldatu dutenak; adibidez, dinosauroak desagertzea ekarri zuen asteroidea.

NASako **Martin Lo** fisikari eta matematikariak oinarri horren gainean diseinatu zuen Genesis misioko hegaldiaren ibilbidea, 2004an arrakastaz amaitu zena.



Banaketa geometrikoa duten masa puntualek sortutako grabitazio-eremua

- 10 700 kg eta 100 kg dituzten bi masa 20 m-ko aldea duen lauki baten goiko bi erpinetan daude, hurrenez hurren.

a) Kalkulatu eta marraztu grabitazio-eremua laukiaren erdian.

- b) Kalkulatu zer lan egin behar den 200 g-ko masa bat aurreko puntutik masa handieneko gorputzetik urrunen dagoen laukiaren erpin hutsera eramateko.

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

ERANTZUNA

1. Ulertu enuntziatua.

Datu ezagunak	Lortu beharreko emaitzak
Bi masen balioak eta lauki batean duten kokapena.	- Grabitazio-eremua lauki baten erdian. - Hirugarren masa bat bi punturen artean higitzeko egin behar den lana.

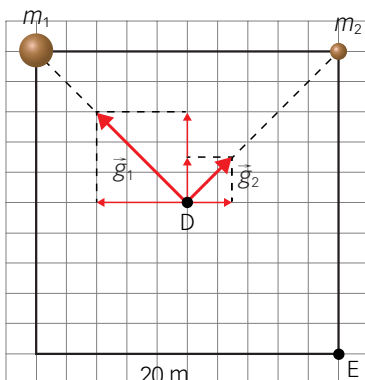
Egin kalkulu guztiak SI sistemako unitatetan.

2. Adierazi gorputzak enuntziatuko posizioan.

- a) Marraztu bakoitzak laukiaren erdian sortzen duen eremuaren bektorea:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Bektore bakoitzak 45° -ko angelua du horizontalarekiko. Modulua kalkula daiteke, eta osagaiak lortu sinu eta kosinu erlazioak erabilita. Marrazkiari esker, osagai bakoitzaren zeinua zein den jakin daiteke:



$$g = \frac{G \cdot M}{r^2}; r_1 = r_2 = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{20^2 + 20^2}}{2} = 14,14 \text{ m}$$

$$\bullet g_1 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{14,14^2} = 2,33 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$$

$$\vec{g}_1 = -g_1 \cdot \cos 45^\circ \vec{i} + g_1 \cdot \sin 45^\circ \vec{j}$$

$$\vec{g}_1 = -1,65 \cdot 10^{-10} \vec{i} + 1,65 \cdot 10^{-10} \vec{j} \text{ N/kg}$$

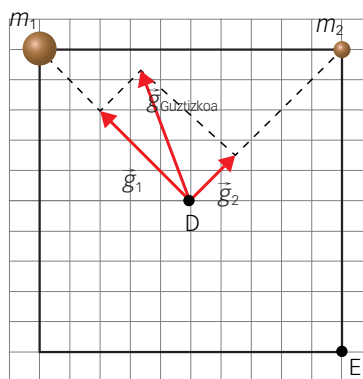
$$\bullet g_2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{14,14^2} = 3,34 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg}$$

$$g_2 = +g_2 \cdot \cos 45^\circ \vec{i} + g_2 \cdot \sin 45^\circ \vec{j}$$

$$g_2 = +2,36 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 2,36 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N/kg}$$

$$\rightarrow \vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = (-1,65 \cdot 10^{-10} + 2,36 \cdot 10^{-11}) \vec{i} + (1,65 \cdot 10^{-10} + 2,36 \cdot 10^{-11}) \vec{j} \text{ N/kg}$$

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = -1,41 \cdot 10^{-10} \vec{i} + 1,89 \cdot 10^{-10} \vec{j} \text{ N/kg}$$



- b) Kalkulatu masa puntu hauen artean higitzeko egin behar den lana: $D \rightarrow E$.

$$W_{D \rightarrow E} = -\Delta E_P = -(E_{PE} - E_{PD}) = -m \cdot (V_{\text{Guztizkoa E}} - V_{\text{Guztizkoa D}})$$

Kalkulatu puntu bakoitzeko guztizko potentziala:

$$\bullet V_{\text{Guztizkoa D}} = V_{1D} + V_{2D} = -\frac{G \cdot M_1}{r_{1D}} - \frac{G \cdot M_2}{r_{2D}}$$

$$V_{\text{Guztizkoa D}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{14,14} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{14,14}$$

$$V_{\text{Guztizkoa D}} = -3,774 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$\bullet V_{\text{Guztizkoa E}} = V_{1E} + V_{2E} = -\frac{G \cdot M_1}{r_{1E}} - \frac{G \cdot M_2}{r_{2E}}$$

$$V_{\text{Guztizkoa E}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 700}{2 \cdot 14,14} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{2 \cdot 14,14}$$

$$V_{\text{Guztizkoa E}} = -1,984 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Hortaz:

$$W_{D \rightarrow E} = -0,2 \cdot ((-1,984 \cdot 10^{-9}) - (-3,774 \cdot 10^{-9})) = -3,52 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

3. Ebaluatu emaitza.

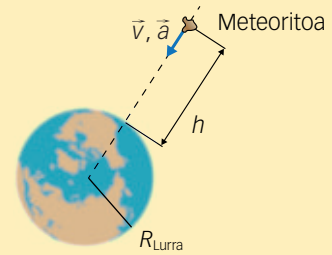
Lana negatiboa da. Gorputza D-tik E-ra higitzeko, eremuaren indarren kontrako lana egin behar da; izan ere, gorputza eremua sortzen duten masetatik urruntzen da.

Simetria dela eta, kalkulu bektorialak sinpletu egiten dira, modulua kalkulatzeko badugu eta arrazoi trigonometrikoak erabiltzen baditugu bektoreen osagaiak kalkulatzeko.

EGITEN JAKIN

Higidura grabitazio-eremuan

- 11 400 kg-ko masako meteorito zati bat Lurrarentz higitzen da zuzen, erorketa askean, Lurraren grabitazio-eremuaren eraginpean. Lurraren gainazaletik 200 km-ra, 2.300 m/s-ko abiadura du. Kalkulatu:
- Zer energia zinetiko eta potentzial dituen Lurraren gainazaletik 200 km-ra.
 - Zer altueratan hasi zen erortzen, altuera horretan abiadura nulua zuela jota.
 - Zer azelerazio izango zuen objektuak hasierako unean?
 - Zer abiadura eta azelerazioekin egingo du talka meteoritoak Lurraren gainazalean?
- Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.



ERANTZUNA

1. Ulertu enuntziatua.

Datu ezagunak	Lortu beharreko emaitzak
Erorketa askean doan gorputz baten masa, abiadura eta posizioa.	- Energia zinetikoa eta potentziala puntu batean. - Altuera hasierako puntuan. - Abiadura eta azelerazioa talka-puntuan.

Egin kalkulu guztiak SI sistemako unitatetan.

 2. Kalkulatu E_z eta E_p .

- a) Hau da energia zinetikoa:

$$E_z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot (2.300)^2 = 1,058 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Hau da energia potentziala:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{r}$$

$$E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 400}{(200 + 6.370) \cdot 10^3} = -2,428 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

3. Aplikatu energiaren kontserbazioa.

- b) Hasierako altueran abiadura nulua bada, hasierako energia potentziala bat dator gainazaletik 200 km-ra duen guztizko energiarekin:

$$E_{\text{M hasierakoa}} = E_{\text{P hasierakoa}} = -\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}} + h} = E_z + E_p \rightarrow$$

$$\rightarrow h = -\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{E_z + E_p} - R_{\text{Lurra}} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 400}{1,058 \cdot 10^9 - 2,428 \cdot 10^{10}} - 6.370 \cdot 10^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 5 \cdot 10^5 \text{ m} = 500 \text{ km}$$

4. Ondorioztatu azelerazioa dinamikaren lehen legea erabilita.

- c) Azelerazioa gorputzari egindako indarretik eta gorputzaren masatik abiatuta kalkula daiteke.

$$F_G = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F_G}{m}$$

Puntu horretan objektutik Lurraren erdigunera dagoen distantzia $R_{\text{Lurra}} + h$ da.

$$a = \frac{G \cdot \frac{M_{\text{Lurra}} \cdot m}{(R_{\text{Lurra}} + h)^2}}{m} = \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{(R_{\text{Lurra}} + h)^2}$$

$$a = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6.370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5)^2} = 8,45 \text{ N/kg} = 8,45 \text{ m/s}^2$$

5. Aplikatu energiaren kontserbazioa.

- d) Gainazalarekin berriz talka egitean, gorputzak energia zinetiko eta potentzial jakin batzuk izango ditu:

$$E_{\text{M hasierakoa}} = E_{\text{P hasierakoa}} = E_z \text{ Gainazala} + E_p \text{ Gainazala} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}} + h} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot \left(\frac{1}{R_{\text{Lurra}}} - \frac{1}{R_{\text{Lurra}} + h} \right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{6.370 \cdot 10^3} - \frac{1}{6.370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5} \right)} = 3.019 \text{ m/s}$$

Talka egitean duen azelerazioa bat dator g -k Lurraren gainazalean duen balioarekin:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{R_{\text{Lurra}}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6.370 \cdot 10^3^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

6. Ebaluatu emaitza.

Meteorito zatia modu askean erortzen da Lurrera eta ez du orbitatzen, a) atalean adierazitako puntuko abiadura orbitatzeko behar dena baino txikiagoa delako.

Orbitatzen duen gorputz baten kasuan:

$$E_{\text{M}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{R_{\text{Lurra}} + h} = \frac{1}{2} \cdot E_p$$

$$E_z + E_p = \frac{1}{2} \cdot E_p \rightarrow E_z = -\frac{1}{2} \cdot E_p$$

$$E_z = \frac{2,428 \cdot 10^{10}}{2} = 1,214 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Masa puntualek sortutako grabitazio-eremua

27. Esan zer dimentsio dituen grabitazio-eremuaren intentsitateak nazioarteko sisteman.
28. Esan honako baieztapen hau zuzena ala okerra den eta arrazoitu erantzuna: «Hainbat masak sortutako eremu batean eremuaren intentsitatea nulua bada, grabitazio-potentziala ere nulua izango da».
29. Imaginatu bi masa puntual, hau betetzen dutenak: $m_1 = m_2$. Horien artean, beste masa puntual bat jarriko dugu: m_3 . Masen arteko zer puntutan izango da indarra nulua? Zer energia potentzial izango du m_3 masak puntu horretan?
30. Partikula bat indar kontserbakor baten eraginpean higitzen da. Bere energia potentziala gehitu ala gutxitu egiten da? Eta bere energia zinetikoa? Arrazoitu erantzuna.
31. 2.500 kg-ko eta 1.500 kg-ko bi gorputz 4 m-ko distantziara daude. Kalkulatu:
- Bien arteko erakarpen-indarraren modulua.
 - Elkartzen dituen zuzenaren erdiko puntuan grabitazio-eremuaren guztizko balioa.
- Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
- Emitza: a) $1,56 \cdot 10^{-5} \text{ N}$; b) $-1,67 \cdot 10^{-8} \text{ } \vec{u}_{rA} \text{ N/kg}$
32. Bildutako datuen arabera, munduan 7.300 milioi biztanle daude (2015). Pertsona baten batez besteko masa 60 kg dela suposatuta, kalkulatu:
- Planetako biztanle guztien pisua.
 - 10 m-ko distantziara dauden bi pertsonen arteko grabitazio-indarra eta grabitazio-energia.
- Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.
- Emitza: a) $4,31 \cdot 10^{12} \text{ N}$; b) $2,40 \cdot 10^{-9} \text{ N}$; $-2,4 \cdot 10^{-8} \text{ J}$
33. 2 kg-ko masa duen gorputz bat, m_1 , koordinatu-jatorrian dago. 3 kg-ko masa duen beste gorputz bat, m_2 , (6, 4) m puntuan dago. Kalkulatu m_1 masak m_2 masa erakartzeko egiten duen indarraren modulua eta bektorea.
- Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
- Emitza: $7,70 \cdot 10^{-12} \text{ N}$; $-6,41 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 4,27 \cdot 10^{12} \vec{j}$
34. 8 kg-ko eta 1 kg-eko masa duten bi partikula hutsean daude, elkarrengandik 40 cm-ra. Kalkulatu:
- Sistemaren hasierako energia potentziala eta grabitazio-indarrak egin beharreko lana partikulen arteko tartea 80 cm-ra handitzeko.
 - Partikulak hasierako posiziotik infinituraino banatzeko egin behar den lana eta hasierako banaketa berriz lortzeko egin behar den lana.
- Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.
- Emitza: a) $-1,334 \cdot 10^{-9} \text{ J}$; $-6,67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$; b) $-1,334 \cdot 10^{-9} \text{ J}$; $1,334 \cdot 10^{-9} \text{ J}$

ADIBIDE EBATZIA

12. m_1 , m_2 eta m_3 masak dituzten hiru planeta $(-a, 0)$, $(0, -a)$ eta $(0, a)$ puntuetan daude, hurrenez hurren. Demagun masa puntualak direla, $m_2 = m_3 = 2m_1 = 4 \cdot 10^{21} \text{ kg}$ -ko masa dutela eta $a = 2 \cdot 10^5 \text{ m}$ dela. Kalkulatu hauek:

- Hiru planetek O(0, 0) m puntuan sortutako grabitazio-eremuaren bektorea.
- Hiru planetek P(a, 0) m puntuan eragindako grabitazio-potentziala (energia potentziala masa unitateko).

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

- a) Gainezarpenaren printzipioari jarraituz:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Irudian ikusten denez,

$$\vec{g}_2 = -\vec{g}_3 \text{ da, beraz,}$$

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \vec{g}_1 \text{ da.}$$

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \frac{G \cdot m_1}{a^2} \vec{i}$$

Ordeztu balioak SI sistemako unitateak erabiliz:

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^{10}} \vec{i} = 3,335 \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

- b) Potentziala magnitude eskalar bat da. Gainezarpenaren printzipioari jarraituz:

$$V_{\text{Guztizkoa}} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_{\text{Guztizkoa}} = -\frac{G \cdot m_1}{d_1} - \frac{G \cdot m_2}{d_2} - \frac{G \cdot m_3}{d_3}$$

Irudiari erreparatuta: $d_2 = d_3 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Horrez gain, $V_2 = V_3$. P-tik m-rako distantzia $2 \cdot a$ da.

$$V_{\text{Guztizkoa}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^5} - 2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{21}}{2 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{2}}$$

$$V_{\text{Guztizkoa}} = -2,22 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

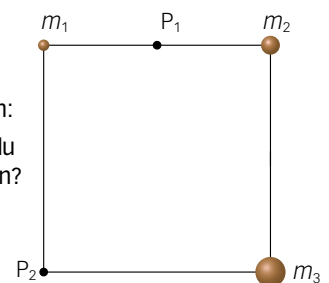
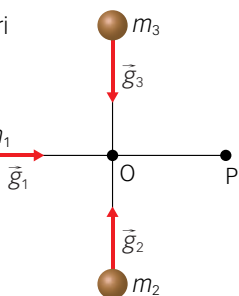
35. Hiru masa puntual ditugu lauki baten hiru erpinetan. m_2 eta m_3 masak m_1 masaren bikoitza eta hirukoitza badira, hurrenez hurren:

- Zer masak sortutako eremuak du intentsitate handiena P_1 puntuan?
- Aldeak 100 m-ko luzera bada eta $m_1 = 2,5 \text{ Mt}$ (milioi tona) bada, zer balio du hiru masek P_1 puntuan sortutako grabitazio-potentzialak?
- Kalkulatu eta adierazi grafiko bidez P_2 puntuko guztizko grabitazio-eremua.

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Emitza: b) $-1,45 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$;

c) $6,181 \cdot 10^{-5} \vec{i} + 2,847 \cdot 10^{-5} \vec{j} \text{ N/kg}$



Grabitazio-eremuaren adierazpena

36. Esan honako baieztapen hau zuzena ala okerra den, eta arrazoitu erantzuna: «Masa bat gainazal ekipotenzial bereko bi punturen artean higitzean egiten den lana inoiz ez da zero».

Zeruko gorputzen grabitazio-eremua

37. Esan honako baieztapen hau zuzena ala okerra den, eta arrazoitu erantzuna: «Lurraren grabitazio-eremuko puntu baten intentsitatea handiagoa da Lurraren gainazaletik zenbat eta altuera handiagoa egon».

38. Zer lan egiten du beste masa baten inguruan R erradioko orbita zirkular erdi egiten duen masa puntual bati eragiten dion indar batek? Eta R distantziatik infinitura higituko balitz? Arrazoitu erantzunak.

39. Erantzun.

- Zer esanahi du grabitazio-eremu batetik ihes-abiadurak energiaren ikuspegitik?
- Zer zeinu du orbita hiperboliko bat egiten duen kometa baten guztizko energiak?

40. Azaldu *energia potentzial grabitatorio* kontzeptua. Zer energia potentzial grabitatorio du m masa duen partikula batek, M masa duen beste partikula batetik r distantziara badago? Zer kasutan erabil daiteke $E_p = m \cdot g \cdot h$ adierazpena energia potentzial grabitatorioa kalkulatzeko?

41. Imajinatu planeta baten erradioa eta masa beste baten erradioaren eta masaren bikoitzak direla. Pertsona batek aipatutako bigarren planetan duen pisua P bada, zer pisu izango du lehen planetan?

Eraitza: $P/2$

42. Bi planetek dentsitate bera eta erradio desberdinak dituzte. Baten erradioa 7.000 km-koa bada eta bestearena 6.000 km-koa, kalkulatu:

- Zer erlazio dagoen bi planeten gainazaleko grabitatearen azelerazioen artean.
- Bi planeta horietatik ihes-abiaduren artean.

Eraitza: a) $g_1 = 1,167 \cdot g_2$; b) $v_{\text{ihes } 1} = 1,167 \cdot v_{\text{ihes } 2}$

43. Demagun urruneko beste galaxia batean Lurraren masaren laukoitza duen M masako planeta bat dagoela ($M = 4M_{\text{Lurra}}$). Horrez gain, planeta hartako gainazalean dagoen grabitazio-eremuaren intentsitatea Lurraren gainazalekoaren berdina da, $g = g_{\text{Lurra}}$.

- Zer erlazio egongo da bi planeten erradioen (R eta R_{Lurra}) artean?
- Bi planeten gainazaleko zeinetan izango da ihes-abiadura handiagoa? Esan zer erlazio dagoen bien artean.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.

Eraitza: a) $R/R_{\text{Lurra}} = 2$; b) $v_{\text{ihes } P}/v_{\text{ihes } \text{Lurra}} = \sqrt{2}$

ADIBIDE EBATZIA

- 13 a) Kalkulatu Marteren orbita-periodoa, jakinda bere orbitaren ardatzerdi handiena Lurraren orbitarena baino 1,524 aldiz handiagoa dela.
- b) Marteren masa $6,5 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ -koa da, eta bere bolumena $1,617 \cdot 10^{11} \text{ km}^3$ -koa. Marte esfera bat dela jota; kalkulatu grabitazioaren azelerazioa bere gainazalean.
- c) 600 kg-ko satelite batek Marteko ekuatorearen parean orbitatzen du, 11,8 h-ko orbita-periodoarekin. Zer abiadura du sateliteak?

Datua: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

- a) Keplerren 3. legea kontuan izanda:

$$\frac{T_{\text{Marte}}^2}{d_{\text{ardatzerdi-Marte}}^3} = \frac{T_{\text{Lurra}}^2}{d_{\text{ardatzerdi-Lurra}}^3} \quad [1]$$

Enuntziatuak hau adierazten du: $d_{\text{ardatzerdi-Marte}} = 1,524 \cdot d_{\text{ardatzerdi-Lurra}}$. Ordeztu [1] adierazpenean:

$$\frac{T_{\text{Marte}}^2}{1,524^3 \cdot d_{\text{ar.-Lurra}}^3} = \frac{T_{\text{Lurra}}^2}{d_{\text{ar.-Lurra}}^3}. \text{ Sinpletu eta berrantolatu:}$$

$$T_{\text{Marte}} = T_{\text{Lurra}} \cdot \sqrt{1,524^3} = 1,88 \cdot T_{\text{Lurra}}$$

- b) Kalkulatu erradioa, bolumenaren bidez: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$

Bakandu, eta ordeztu balioak SI sistemako unitatetan:

$$R_{\text{Marte}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1,617 \cdot 10^{11} \cdot 10^9}{4\pi}} = 3,38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Marteren gainazalean:

$$g_{\text{Marte}} = \frac{G \cdot M_{\text{Marte}}}{R_{\text{Marte}}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,5 \cdot 10^{23}}{(3,38 \cdot 10^6)^2} = 3,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- c) Sateliteak orbita geldikor bat du. Satelitearen kasuan:

$$F_G = F_z \rightarrow \frac{G \cdot M_{\text{Marte}} \cdot m_{\text{Sat}}}{r^2} = m_{\text{Sat}} \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{G \cdot M_{\text{Marte}}}{r} = v^2 [2]$$

Erlazionatu periodoa abiadura linealarekin:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r \rightarrow r = \frac{v \cdot T}{2\pi} \quad [3]$$

Ordeztu [3] adierazpena [2] adierazpenean:

$$\frac{G \cdot M_{\text{Marte}}}{\frac{v \cdot T}{2\pi}} = v^2 \rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_{\text{Marte}} \cdot 2\pi}{r}}$$

Kalkulatu SI sistemako unitatetan:

$$v = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,5 \cdot 10^{23} \cdot 2\pi}{11,8 \cdot 3.600}} = 1,858 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

44. 2015eko irailaren 28an *super ilargi* bat egon zen: Ilargia Lurretik 356.876 km-ra zegoen, haren orbitako distantzia txikienean. Urriaren 11n 406.450 km-ra kokatu zen, distantzia handiagoa. Kalkulatu egun horietan Ilargiak Lurrean sortutako grabitatearen balioen arteko aldea.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Ilargia}} = 7,2 \cdot 10^{22} \text{ kg}$.

Eraitza: $8,65 \cdot 10^{-6} \text{ N/kg}$



Sateliteen higadura

45. 200 kg-ko satelite artifizial batek Lurraren gainazaletik h altuerara orbitatzen du; altuera horretan, grabitatearen balioa Lurraren gainazalean duen balioaren herena da.
- Lana egiten al da satelitea orbitan iraun dezan?
 - Kalkulatu orbitaren erradioa eta periodoa eta satelitearen energia mekanikoa.
- Datuak: $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $R_{\text{Lurra}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.
- Emitza:** b) $1,103 \cdot 10^7 \text{ m}$; $1,15 \cdot 10^4 \text{ s}$; $-3,61 \cdot 10^9 \text{ J}$
46. *Astra 2C* satelitea, telebista-seinaleak igortzeko erabiltzen dena, orbita zirkular geogonkorra duen satelite bat da.
- Kalkulatu Lurraren gainazaletik zer altuerara orbitatzen duen eta zer abiadura duen.
 - Kalkulatu zer energia eman zaion sateliteari Lurraren gainazaletik bere orbitara eramateko.
- Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$; $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; satelitearen masa, $m = 4.500 \text{ kg}$.
- Emitza:** a) $3,58 \cdot 10^7 \text{ m}$; $3.072,6 \text{ m/s}$ b) $2,61 \cdot 10^{11} \text{ J}$
47. Jupiterren io ilargiak $8,94 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ -ko masa du, eta bere gainazaleko grabitatea $1,81 \text{ m/s}^2$ da.
- Kalkulatu loren erradioa, kilometrotan, eta bolumena.
 - Zunda bat erorketa askean doa loren gainazalerantz. Ilargiaren erdigunetik 5.000 km -ra zundaren abiadura 1.250 m/s da. Zer abiadura izango du zundak erdigunetik 2.000 km -ra?
- Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.
- Emitza:** a) 1.815 km ; $2,5 \cdot 10^{19} \text{ m}^3$; b) $2.267,2 \text{ m/s}$
48. 1969an Michael Collinsek Apollo 11 misioko *Columbia* aginte-modulua gidatzen zuen, Neil Armstrong eta Edwin Aldrin Ilargian oinez zebiltzan bitartean. Espazio-ontziak Ilargiaren gainazaletik 100 km -ra orbitatzen zuen, 118 minutuko periodoarekin. Kalkulatu:
- Ilargiaren masa eta grabitazio-eremuaren intentsitatea Ilargiaren gainazalean.
 - Ihes-abiadura Ilargiaren gainazaletik.
- Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $R_{\text{Ilargia}} = 1,74 \cdot 10^3 \text{ km}$.
- Emitza:** a) $7,356 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $1,62 \text{ m/s}^2$; b) $2.375,743 \text{ m/s}$
49. Nazioarteko Espazio Estazioa, 280.000 kg -ko masa duena, Lurraren gainazaletik 360 km -ko altuerara biratzen da orbita zirkularrean. Goi-atmosferaren marruskadura dela eta, bere altuera txikituz doa etengabe. Hori dela eta, estazioaren orbita zirkularra 340 km -ko altuerara jaitsi da. Kalkulatu:
- Orbita-abiadurak 340 km -ko eta 360 km -ko altueretan.
 - Hasierako orbitara bueltatzeko behar duen energia.
 - Orbita-periodoen arteko aldea.
- Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6.370 \text{ km}$.
- Emitza:** a) $7.698,5 \text{ m/s}$; $7.710,0 \text{ m/s}$; b) $2,47 \cdot 10^{10} \text{ J}$; c) $24,47 \text{ s}$

ADIBIDE EBATZIA

- 14 a) *SAC-D Aquarius* behaketa klimatiko eta ozeanografikorako satelitea da. 2011ko ekainean jaurti zen, Lurraren gainazaletik $h = 660 \text{ km}$ -ko altuerako orbita zirkularrean jarri zuen suziri baten bidez. Kalkulatu *Aquariuse*n orbita-abiadura eta orbita-periodoa.

- b) Zehaztu satelitearen motorrek egin beharko luketen lan minimoa, satelitea beste orbita handiago batera pasatu beharko balitz, lehenaren bikoitzera, hain zuzen: $2h$.

Datuak: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Lurra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Lurra}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$; $M_{\text{Aquarius}} = 1.350 \text{ kg}$.

- a) Orbitatzen duen satelitearen kasuan:

$$F_G = F_z \rightarrow \frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m_s}{(R_{\text{Lurra}} + h)^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{R_{\text{Lurra}} + h}$$

Simplifikatu eta kalkulatu Siko unitateak erabiltza:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{(R_{\text{Lurra}} + h)}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3}} = 7.520,8 \text{ m/s}$$

Erlazionatu T satelitearen orbita-abiadurarekin:

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot (R_{\text{Lurra}} + h) \rightarrow T = \frac{2\pi}{v} \cdot (R_{\text{Lurra}} + h)$$

$$T = \frac{2\pi}{7.520,8} \cdot (6,37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3) = 5.881,5 \text{ s}$$

- b) Motorrek egin beharko luketen lana orbiten arteko energia-diferentziaren berdina da:

$$W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} = E_{\text{Ma}} - E_{\text{Mh}} = -\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{(R_{\text{Lurra}} + 2 \cdot h)} - \left(-\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m}{(R_{\text{Lurra}} + h)} \right)$$

$$W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} = G \cdot M_{\text{Lurra}} \cdot m \left(\frac{1}{(R_{\text{Lurra}} + h)} - \frac{1}{(R_{\text{Lurra}} + 2 \cdot h)} \right)$$

$$W_{\text{has} \rightarrow \text{amai}} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 1.350 \cdot \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 660 \cdot 10^3} - \frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 660 \cdot 10^3} \right)$$

$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = 6,55 \cdot 10^9 \text{ J}$$

50. Egin aurkezpen bat eta azaldu zer-nolakoak diren satelite mota hauek: LEO, MEO eta GEO. Bildu haien erabilerari, espazio-ontzien ezaugarriei, orbitari, periodoari eta abarri buruzko informazioa.

51. Lagrangeren puntuak bost dira; puntu horietan, masa baztergarriko gorputz baten orbita eta M_1 eta M_2 masek sorturiko grabitazio-eremuan M_2 masak M_1 masaren inguruan egiten duen orbita sinkronoak dira, $M_1 > M_2$ denean. Puntu horietatik hiru $-L_1$, L_2 eta L_3- M_1 eta M_2 lotzen dituen lerroan daude. Kokatu itzazu diagrama batean, eta arrazoitu zergatik den txikiena L_1 eta M_1 arteko distantzia, eta zergatik den handiena L_2 eta M_1 arteko distantzia.

LABURPENA

1 EREMU KONTZEPTUA

Espazioko eskualde bati **eremu** deritzogu, perturbazio baten efektuak hauteman badaitezke, gorputz batek beste batzuekin propietate komun bat izateagatik sortutako interakzioaren ondoriozko perturbazioarenak, hain zuzen.

Perturbazioa eragiten duen gorputzak espazio-denboraren distorsioak sortzen ditu, eta horiek kontaktuan ez dauden gorputzen arteko interakzioa eragiten dute.

2 MASA PUNTUALEK SORTUTAKO GRABITAZIO-EREMUA

Grabitazio-eremua gorputz baten masak eragindako perturbazioa nabaritzen den espazioko eskualdea da.

Grabitazio-eremuaren intentsitatea puntu batean

M masako masa puntual batek sortutako eremua

$$\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Masa puntualen banaketa batek sortutako eremua (gainezarpenaren printzipioa):

$$\vec{g}_{\text{Guztizkoa}} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i \left(-\frac{G \cdot M_i}{r_i^2} \right) \cdot \vec{u}_{ri}$$

Grabitazio-indarren eraginezko lana

Grabitazio-eremua **eremu kontserbakorra** da, grabitazio-eremuk indarrek eginiko lana desplazamenduaren hasierako eta amaierako puntuen arabera bakarrik delako eta ez ibilbide osoaren arabera.

$$W_{\text{hasierakoa} \rightarrow \text{amaierakoa}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{amaierakoa}}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_{\text{hasierakoa}}}$$

Energia potentzial grabitatorioa

Energia potentzial grabitatorioa, E_p , masa batek duen energia da, beste masa baten edo batzuen grabitazioaren eraginpean egotearen ondorioz

$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Energia potentziala magnitude eskalar bat da eta SI sisteman **jouletan (J)** neurtzen da.

Energia mekanikoaren kontserbazioa grabitazio-eremu batean

Energia mekanikoaren kontserbazioaren teorema: sistema batean diharduten indarrak kontserbakorrak bakarrik badira, energia mekanikoa kontserbatu egiten da.

$$E_{\text{Zamaierakoa}} + E_{\text{Pamaierakoa}} = E_{\text{Zhasierakoa}} + E_{\text{Phasierakoa}} = E_M$$

Puntu bateko grabitazio-potentziala

Puntu bateko potentziala, V , deritzo puntu horretan masa-unitateko dagoen energia potentzialari:

$$V = \frac{E_p}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Potentziala magnitude eskalar bat da, eta nazioarteko sisteman **J/kg** da haren neurri-unitatea.

Puntu bateko potentziala **masa puntualen banaketaren** eraginez:

$$V_{\text{Guztizkoa}} = \sum_i V_i = \sum_i -\frac{G \cdot M_i}{r_i}$$

Grabitazio-eremu bateko bi puntu, h eta a , baditugu, elkarren arteko **potentzial-diferentzia** deituko diogu bien arteko $V_{\text{amaierakoa}} - V_{\text{hasierakoa}}$ erlazioari:

$$\Delta V = V_{\text{amaierakoa}} - V_{\text{hasierakoa}} \rightarrow \Delta V = -\frac{G \cdot M}{r_{\text{amaierakoa}}} - \left(-\frac{G \cdot M}{r_{\text{hasierakoa}}} \right)$$

3 GRABITAZIO-EREMUAREN ADIERAZPENA

Eremu-lerroak eremuaren intentsitate bektorearen lerro ukitaileak dira puntu bakoitzean.

Eremu-lerroak ezin dira gurutzatu.

Gainazal ekipotentzialak grabitazio-potentzialaren balio bereko espazioko gunek dira.

Gainazal ekipotentzialak ezin dira gurutzatu.

4 ZERUKO GORPUTZEN GRABITAZIO-EREMUA

Ihes-abiadura deritzogu gorputz batek beste gorputz baten grabitazio-erakarpenetik kanpo geratzeko izan behar duen abiadurari.

Materia ilun deritzogu gaur egungo baliabideekin ikusteko adina erradiazio elektromagnetiko igortzen ez duen materiari, baina hor dagoela ondorioztatzeko bide ematen duenari, materia ikusgaiarengan dituen eragin grabitazionalengatik.

5 PLANETEN ETA SATELITEEN HIGIDURA

Lurraren inguruan orbitatzen duten sateliteak

Lurraren gainazaletik h altuerara biratzen den satelite baten kasuan:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Lurra}}}{R_{\text{Lurra}} + h}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_{\text{Lurra}}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_{\text{Lurra}} + h)^3}{G \cdot M_{\text{Lurra}}}}$$

Satelite geogonkor edo **geosinkrono** deritze Lurraren inguruan orbitatzean beti puntu beraren gainean dirauten sateliteei.

Sateliteen energia

Hau da satelite baten **energia mekanikoa**:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Hau da satelite bat orbitan jartzeko behar den **jaurtiketa-abiadura**:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R_{\text{Lurra}}} - \frac{1}{2 \cdot r} \right)}$$

Hau da r_2 erradioko orbita batetik r_3 erradioko beste batera pasatzeko behar den energia, $r_2 < r_3$ bada:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)$$

Hau da M_p masa eta R_p erradioa dituen planeta baten grabitazio-eremuan dagoen satelite baten ihes-abiadura:

$$v_{\text{ihes}} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_p}{R_p + h}}$$

h letrak satelitea planetaren gainazaletik zer distantziatara dagoen adierazten du.

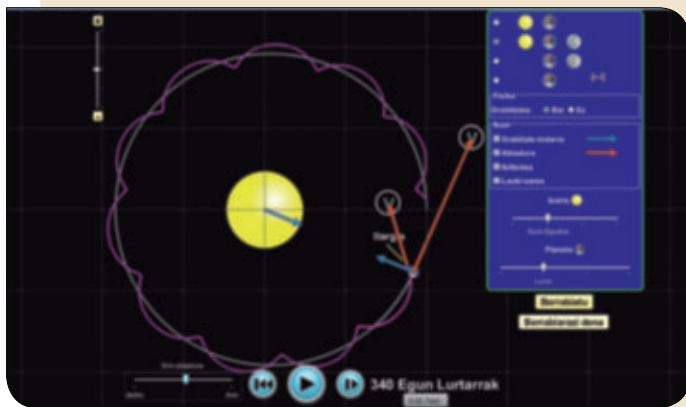


Zeruko gorputzen higiduraren simulazioa

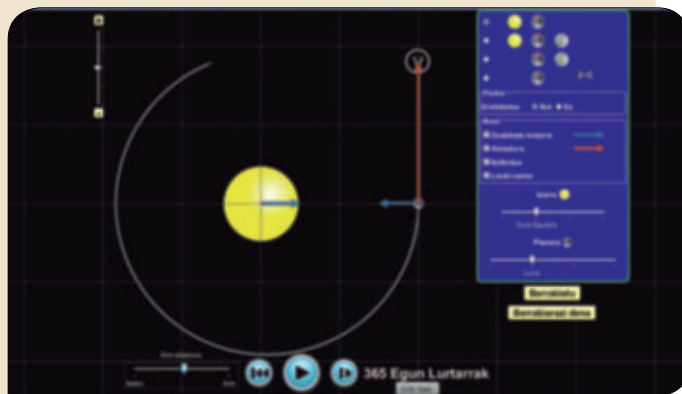
Grabitatea eta orbitak aplikazioaren bidez, zeruko gorputz baten inguruan biratzen den beste zeruko gorputz bati eragiten dioten ibilbidea, abiadura eta grabitazio-indarra azter daitezke. Eguzkiarekin, Lurrarekin, Ilargiarekin eta satellite batekin aritzeko aukera ematen du.

Prozedura eta jarduerak

1. Has zaitez **Animazioa** fitxan lanean, eta hautatu pantailan ikusten direnak bezalakoxe aginduak. Abiarazi aplikazioa Eguzkia-Lurra sistemarekin eta egiaztatu Lurra orbita bat egiteko zenbat denbora behar duen.
2. Eguzkiaren masa utzi dagoen bezala, eta aldatu Lurraren masa, aukeran dauden balioak hautatuz ($0,5M_{\text{Lurra}}$, $1,5M_{\text{Lurra}}$ eta $2M_{\text{Lurra}}$).
Ikusi kasu bakoitzean zer gertatzen zaien orbita-periodoari eta orbita-abiaduraren eta grabitazio-indarraren bektoreei.
3. Oraingoan aldatu Eguzkiaren masa, baina utzi bere horretan Lurrarena. Ikusi kasu bakoitzean zer gertatzen zaien Lurraren ibilbideari, bere periodoari eta orbita-abiaduraren eta grabitazio-indarraren bektoreei.



Aplikazio hori Coloradoko Unibertsitatearen (AEB) webgunean dago: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/translated/eu>.



4. Ondoren, hautatu Eguzkia-Lurra-Ilargia sistema. Aginduetan, hautatu Lurraren eta Ilargiaren ibilbideak eta horietako bakoitzaren abiadura-bektoreak ikusaraztea. Azaldu Ilargiaren ibilbidearen forma eta haren abiadura-bektoreak izaten dituen aldaketak.
5. **Eskalan** fitxa erabilita, abiarazi aplikazioa Lurra-Satelitea sistemarekin. Aginduetan, hautatu horien ibilbideak eta grabitazio-indarraren eta abiaduraren bektoreak ikusaraztea. Jarraian, urrundu satellitea koadrikula baten erdiaren adinako distantziara, abiadura aldatu gabe.

Bat al dator lehengo ibilbidearekin? Abiadura-modulu berari eusten al dio ibilbide osoan? Azaldu zergatik.

Meteorologoaren profila

Zer egiten du?

- Atmosferan gertatzen diren fenomenoak eta fenomeno horiek zehazten dituzten lege fisikoak aztertzen ditu.
- Planetako zenbait lekutan egingo duen eguraldia iragartzen du: izango diren tenperaturak eta fenomeno atmosferikoak, hala nola prezipitazioak euri, elur edo txingor forman, depresioak eta antizikloiak.
- Alerta-abisuak bidaltzen ditu muturreko fenomeno atmosferikoen arriskua dagoenean.

Nola egiten du?

- Lortutako emaitzak interpretatzen ditu meteorologia-estazioetan egindako behaketetatik abiatuta.
- Isobara-mapen, eguraldiaren iragarpenaren mapen, klimogramen eta abarren ekoizpena kudeatzeaz arduratzen da.
- Alerta-abisu meteorologikoak zabaltzen ditu bitarteko egokienak erabiliz.