PROYECTO SABER HACER

Matemáticas

SERIE **RESUELVE**

BACHILLERATO 2

El libro Matemáticas II, para 2.º curso de Bachillerato,
es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento
de Zubia Editoriala, S. L. y Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L.,
dirigido por **Joseba Santxo Uriarte** y **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
José Carlos Gámez Pérez
Silvia Marín García
Alfredo Martín Palomo
Carlos Pérez Saavedra
Domingo Sánchez Figueroa

EDICIÓN
Ainhoa Basterretxea Llona
José Antonio Almodóvar Herráiz
Ana de la Cruz Fayos
Silvia Marín García
Virgilio Nieto Barrera
Laura Sánchez Fernández

EDITOR EJECUTIVO
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Joseba Santxo Uriarte
Domingo Sánchez Figueroa

Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso
en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen
son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

SANTILLANA
ZUBIA

Índice

SABER HACER

- Resolver ecuaciones matriciales del tipo $XA = B$
- Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX + B = C$
- Determinar matrices que cumplan una cierta condición
- Calcular las constantes que hacen que se cumpla una igualdad entre matrices
- Calcular la potencia de una matriz
- Comprobar propiedades de algunas matrices
- Resolver problemas utilizando matrices
- Determinar elementos para que una matriz sea ortogonal
- Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro
- Calcular la inversa de una matriz que depende de un parámetro
- Resolver un sistema de ecuaciones matriciales

- Reducir un determinante a otro determinante cuyo valor se conoce
- Calcular un determinante en función del rango de una matriz
- Estudiar el rango de una matriz cuadrada que depende de un parámetro utilizando determinantes
- Calcular el rango de una matriz no cuadrada que depende de un parámetro con determinantes
- Comprobar si una matriz que depende de un parámetro tiene inversa
- Resolver una ecuación matricial del tipo $AX = C$
- Resolver una ecuación matricial del tipo $AX + B = C$
- Resolver una ecuación matricial en la que hay que sacar factor común

- Discutir y resolver un sistema de ecuaciones homogéneo
- Discutir un sistema de ecuaciones con parámetros usando el teorema de Rouché-Fröbenius
- Resolver un sistema de ecuaciones con parámetros utilizando la regla de Cramer
- Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = XA$
- Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$
- Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales
- Estudiar un sistema y resolverlo utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius
- Discutir un sistema que depende de un parámetro con dos ecuaciones y dos incógnitas
- Discutir un sistema que depende de un parámetro con tres ecuaciones y tres incógnitas
- Discutir un sistema que depende de un parámetro con más ecuaciones que incógnitas
- Discutir un sistema que depende de un parámetro con tres ecuaciones y tres incógnitas

- Operar con vectores utilizando sus coordenadas
- Hallar las coordenadas del origen o el extremo de un vector que cumple ciertas condiciones
- Determinar los vértices de un paralelogramo
- Hallar las coordenadas de un vector respecto de una base
- Calcular un parámetro para que tres vectores sean linealmente independientes
- Determinar el módulo de un vector utilizando la definición del producto escalar
- Calcular el valor de un parámetro para que dos vectores sean perpendiculares
- Determinar vectores perpendiculares a otros dos que cumplan ciertas condiciones
- Determinar un vértice de un triángulo
- Determinar vectores conociendo condiciones sobre su producto vectorial
- Calcular el producto mixto aplicando las propiedades

- Hallar la posición de dos rectas mediante sus ecuaciones implícitas
- Calcular una recta perpendicular a un plano
- Calcular un plano perpendicular a una recta
- Comprobar que un punto pertenece a una recta en función de un parámetro
- Calcular la ecuación de una recta que pasa por un punto y es paralela a otra recta
- Calcular la ecuación de un plano que contiene a una recta y a un punto exterior a ella
- Calcular la ecuación de un plano que contiene a dos rectas secantes
- Calcular la ecuación de un plano que contiene a dos rectas paralelas
- Calcular la ecuación de un plano que pasa por un punto y es paralelo a otro plano
- Calcular la ecuación de un plano que contiene a una recta y que es perpendicular a otro plano
- Calcular la ecuación de la recta perpendicular a dos rectas
- Determinar las posiciones relativas de dos rectas en función de un parámetro
- Determinar las posiciones relativas de una recta y un plano en función de un parámetro

- Calcular la distancia de un punto a un plano
- Calcular la distancia entre dos planos
- Calcular la distancia entre una recta y un plano
- Calcular la distancia de un punto a una recta
- Calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan
- Determinar un plano que forma un cierto ángulo con otro plano
- Calcular una recta perpendicular a otra recta que pasa por un cierto punto
- Calcular un plano paralelo a una recta que pasa por un cierto punto
- Calcular una recta simétrica respecto de un plano
- Calcular el simétrico de un punto respecto a un plano cuando depende de parámetros
- Resolver problemas de simetrías
- Calcular el plano de simetría de dos puntos
- Buscar puntos que están a una cierta distancia
- Determinar una recta que está a una cierta distancia de otra recta
- Calcular puntos de una recta que equidistan de otros dos puntos

- Aplicar el teorema de Bolzano a una función
- Aplicar el teorema de los valores intermedios a una función
- Determinar el límite de una operación entre valores distintos de una función
- Calcular el parámetro de una función si está en un límite con indeterminación $\infty - \infty$
- Calcular el parámetro de una función cuando aparece en un límite con indeterminación de tipo 1^∞
- Calcular el límite del cociente de dos funciones exponenciales
- Determinar si existe o no el límite de una función en un punto
- Resolver una indeterminación cuando aparece una expresión del tipo $\sqrt{f(x)} \pm a$
- Calcular el parámetro para que exista el límite de una función en un punto
- Calcular los parámetros para que una función sea continua
- Determinar si una ecuación tiene raíces reales
- Determinar si dos curvas se cortan
- Decidir si una función toma un valor determinado

SABER HACER

- Determinar el parámetro de una función cuando no conocemos su recta tangente
- Determinar los parámetros de una función conocida la ecuación de su recta tangente
- Estudiar la derivabilidad y continuidad de una función
- Discutir la derivabilidad y continuidad de una función a partir de sus parámetros

- Aplicar la regla de la cadena
- Determinar la derivada de una función que depende de otra función desconocida
- Calcular derivadas mediante derivación logarítmica
- Resolver problemas utilizando la derivada de funciones implícitas y las propiedades geométricas que pueden cumplir

- Resolver un problema de optimización cuando hay que despejar una variable
- Aplicar el teorema de Rolle
- Aplicar el teorema del valor medio
- Aplicar el teorema del valor medio generalizado
- Aplicar la regla de L'Hôpital en el cálculo de límites
- Resolver indeterminaciones de los tipos 1^{∞}, ∞^0 y 0^0
- Determinar una función conocidos sus extremos relativos y un punto por el que pasa
- Obtener el valor de un parámetro para que una función siempre sea cóncava

- Representar la función derivada de una función a partir de su gráfica
- Resolver un problema de optimización cuando hay que despejar una variable
- Resolver un problema de optimización estudiando los extremos de los intervalos
- Aplicar el teorema de Rolle a una función definida a trozos
- Realizar demostraciones mediante el teorema de Rolle
- Determinar los parámetros de una función para poder aplicar el teorema del valor medio
- Determinar un parámetro para obtener un valor dado como resultado de un límite

- Representar una función polinómica
- Representar una función racional
- Representar una función con radicales
- Representar una función exponencial
- Representar una función logarítmica
- Representar una función definida a trozos
- Calcular el dominio de una función compuesta
- Estudiar la simetría de una función compuesta
- Calcular parámetros desconocidos a partir de sus asíntotas

- Estudiar la monotonía y la curvatura de una función a partir de la gráfica de su derivada
- Representar la gráfica de una función que cumpla determinadas condiciones
- Representar gráficamente una función hallando previamente el valor de sus parámetros
- Representar la gráfica de funciones con un factor exponencial o logarítmico
- Representar una función simétrica
- Representar la gráfica de una función en la que aparece un factor con valor absoluto

- Resolver una integral racional en la que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador
- Resolver una integral mediante un cambio de variable
- Calcular una función de la que se conoce su derivada y un punto por el que pasa
- Calcular una primitiva que cumple una condición
- Resolver las integrales de tipo $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}}$
- Calcular una integral utilizando un cambio de variable conocido
- Resolver una integral de tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2}$

- Resolver por partes una integral de tipo $\int e^{ax} \mathit{sen}\, x$ o $\int e^{ax} \cos x$
- Resolver por partes una integral de tipo $\int \ln(P(x))$ donde $P(x)$ es un polinomio de grado 1
- Resolver por partes una integral de tipo $\int e^{ax+b} \cdot P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio
- Resolver una integral utilizando un cambio de variable para transformarla en polinómica
- Resolver una integral utilizando un cambio de variable para transformarla en racional

- Resolver una integral definida por partes
- Resolver una integral definida utilizando un cambio de variable
- Calcular el área limitada por una función definida a trozos
- Calcular el área bajo una curva cuando un límite de integración es infinito

- Calcular el área encerrada bajo una curva cuando no se da un intervalo de integración
- Determinar el área de una figura delimitada por una curva
- Calcular el área encerrada bajo una curva expresada con valor absoluto y una recta

- Calcular el número total de sucesos si el número de sucesos elementales es finito
- Hallar el espacio muestral de un experimento con una tabla de doble entrada
- Calcular probabilidades experimentalmente
- Calcular probabilidades utilizando sus propiedades

- Resolver problemas de probabilidad con sucesos compuestos
- Calcular la probabilidad de la intersección de sucesos utilizando un diagrama de árbol
- Utilizar la regla del producto en experimentos con reemplazamiento
- Calcular probabilidades utilizando el teorema de la probabilidad total
- Calcular probabilidades utilizando el teorema de Bayes

- Calcular la función de distribución de una variable aleatoria continua a partir de la función de densidad
- Calcular probabilidades por medio de tablas en variables aleatorias que siguen una distribución normal
- Calcular probabilidades en una variable aleatoria binomial aproximándola a una normal
- Calcular los parámetros de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial
- Determinar la función de densidad de una variable aleatoria continua y hallar su función de distribución

- Calcular la probabilidad de que $Z \equiv N(0, 1)$ sea mayor que un valor positivo
- Calcular la probabilidad de que $Z \equiv N(0, 1)$ esté entre dos valores
- Calcular la probabilidad de que $Z \equiv N(0, 1)$ sea menor o mayor que un valor negativo
- Calcular un punto, conociendo la probabilidad
- Tipificar una variable aleatoria
- Calcular uno de los parámetros, conociendo el otro y una probabilidad
- Calcular la media y la desviación típica, conociendo dos probabilidades
- Calcular probabilidades en variables aleatorias que siguen una distribución binomial con n grande

Esquema de la unidad

La estructura de las unidades didácticas es muy sencilla, ya que se trata de facilitar la localización de los contenidos fundamentales, de los ejemplos resueltos y de las actividades propuestas.

A lo largo de toda la unidad marcamos con iconos aquellos contenidos o actividades en las que se trabajan de manera particular las competencias básicas.

Competencias básicas

A lo largo del libro, encontraréis junto a muchos ejercicios los iconos de las competencias básicas del proyecto **HEZIBERRI**. Cada uno de esos iconos nos indica la competencia básica que se trabaja en cada caso.

Competencias básicas disciplinares

- Competencia en comunicación lingüística y literaria
- Competencia matemática
- Competencia científica
- Competencia tecnológica
- Competencia social y cívica
- Competencia artística
- Competencia motriz

Competencias básicas transversales

- Competencia para la comunicación verbal, no verbal y digital
- Competencia para aprender y para pensar
- Competencia para convivir
- Competencia para la iniciativa y el espíritu emprendedor
- Competencia para aprender a ser uno mismo

Introducción a la unidad: un texto que motiva el estudio de los contenidos.

Páginas finales de la unidad: un paso más en la aplicación de los contenidos aprendidos.

Se especifican los contenidos (**Saber**) de la unidad.

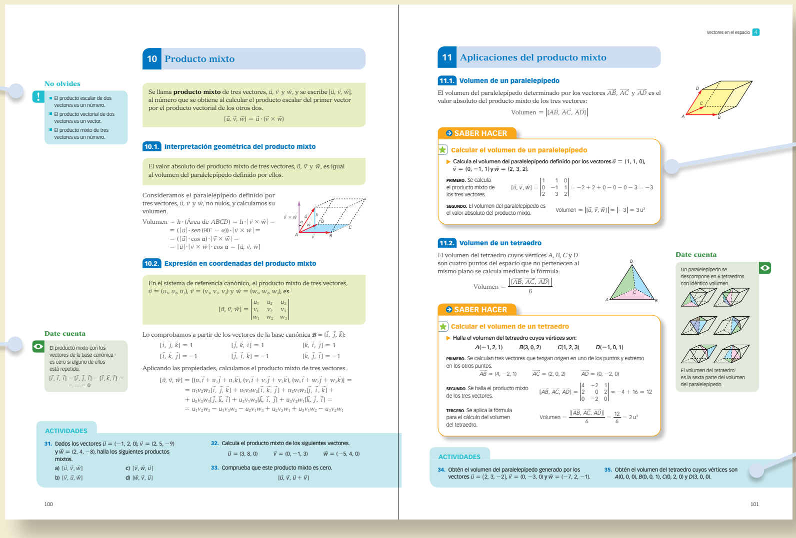
El texto inicial presenta un aspecto de la vida real en el que se utilizan los contenidos que se van a estudiar en la unidad.

Esta página, que te muestra cómo las **matemáticas** intervienen **en tu vida**, responde a la pregunta de la página inicial de la unidad. Además, propone una serie de actividades que te permitirán profundizar en el aspecto de la vida real que se muestra.

Páginas de contenidos: SABER y SABER HACER como un todo integrado.

Nuestra propuesta para **Saber** son unos textos claros y estructurados. Los **Ejemplos** te ayudarán a afianzar esos saberes.

Junto a los textos explicativos encontrarás **informaciones complementarias** que te serán muy útiles para la comprensión de los conceptos y procedimientos.



En la parte **Saber hacer** aprenderás, paso a paso, los procedimientos necesarios para tu desarrollo matemático.

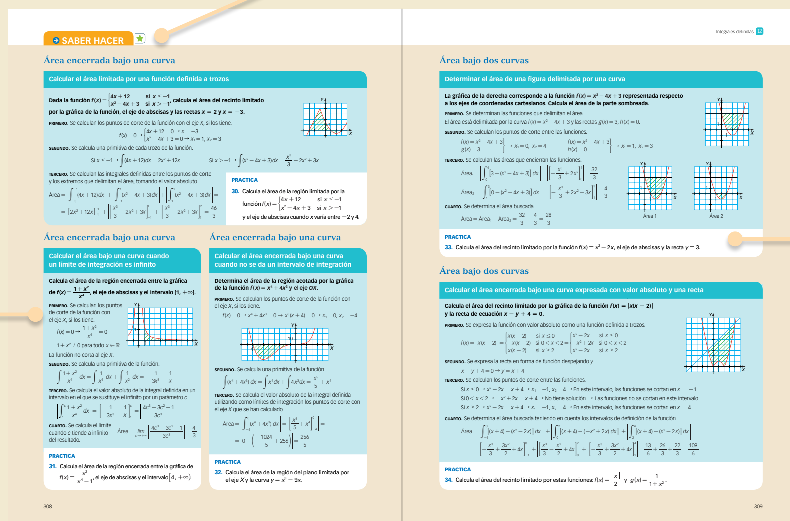
Las **Actividades** de estas páginas te ayudarán a practicar los conocimientos adquiridos.

Además, su secuenciación te permitirá llegar a dominarlos.

Páginas de Saber hacer: para aprender a hacer matemáticas.

En estas páginas se muestran los procedimientos básicos (**Saber hacer**) de la unidad.

Cada procedimiento se introduce mediante la resolución de una actividad en la que se muestra, paso a paso, un método general de resolución.

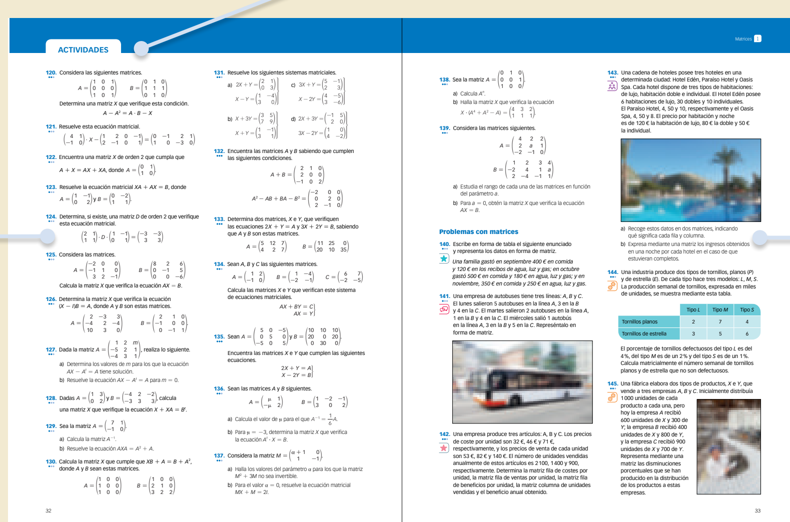


Las actividades que acompañan cada procedimiento te permitirán **practicar** y dominar estos contenidos.

Páginas de actividades: para practicar y afianzar los conocimientos adquiridos.

Nuestras **Actividades finales** están **secuenciadas** para que aproveches de la mejor forma posible la aplicación de los contenidos estudiados.

Cada actividad te ofrece la **dificultad** que tiene.



Muchas de estas actividades son similares a las que te encontrarás en tu prueba de acceso a la universidad.

1 Matrices

CONTENIDOS

- **Matrices. Tipos de matrices**
- **Matriz traspuesta**
- **Operaciones con matrices**
- **Rango de una matriz. Método de Gauss**
- **Matriz inversa. Método de Gauss-Jordan**
- **Ecuaciones matriciales**

Los vehículos modernos vienen equipados con todo tipo de extras que sirven para aumentar la seguridad a la hora de conducir como, por ejemplo, los sistemas antiderrapaje, los sensores que miden la presión de los neumáticos, los asistentes de frenada, las ayudas de visión nocturna... Los fabricantes también se han volcado en el confort y la facilidad de conducir: asistentes de aparcamiento, sensores de luz y lluvia y, en muchos casos, navegador GPS.

Este último accesorio comenzó implantándose en las flotas de camiones para que el tiempo en entregar las mercancías fuera optimizado al no haber confusiones para llegar al destino final y ser informado tanto del tipo de vía como de su estado y del tráfico que soportaba.

En principio, el navegador era un artículo de lujo, pero ahora, con el auge de los *smartphones*, se ha convertido en algo tremendamente cotidiano, que nos informa tanto del lugar donde estamos como de la ruta más corta, más rápida o más ecológica que podemos tomar para ir de un sitio a otro.

Parece fácil y rápido, pero...

¿Cómo elige las rutas apropiadas un navegador GPS?

1 Matrices

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow 1.^{a} \\ \leftarrow 2.^{a} \\ \dots \\ \leftarrow m.^{a} \end{array} \text{Filas} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1.^{a} & 2.^{a} & 3.^{a} & \dots & n.^{a} \end{array} \\ \text{Columnas} \end{array}$$

Una **matriz de *m* filas y *n* columnas** es una tabla de $m \times n$ números reales ordenados en m filas y n columnas.

Los números a_{ij} son los **elementos** de la matriz, y en ellos el subíndice i indica la fila que ocupan, y el subíndice j, la columna.

La **dimensión** de una matriz de m filas y n columnas es $m \times n$.

Se escribe así

Para expresar abreviadamente una matriz, escribimos:

$$A = (a_{ij})$$

Si queremos añadir la dimensión, indicamos:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

EJEMPLOS

1 Determina la dimensión de esta matriz e identifica los elementos a_{23} y a_{32}.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz A está formada por 3 filas y 4 columnas; por tanto, su dimensión es 3×4.

Se observan la fila y la columna que indican los subíndices.

$a_{23} = 1$ — 2.ª fila, 3.ª columna

$a_{32} = 3$ — 3.ª fila, 2.ª columna

2 En esta tabla se muestran los partidos jugados por dos equipos de balonmano durante la liga. Escribe la información en forma de matriz.

	Partidos ganados	Partidos empatados	Partidos perdidos
Equipo A	16	0	8
Equipo B	14	1	10

Se puede escribir la información de la tabla como una matriz de 2×3.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 8 \\ 14 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Equipo A} \\ \leftarrow \text{Equipo B} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Ganados} & \text{Empat.} & \text{Perdidos} \end{array} \end{array}$$

$a_{11} = 16 \rightarrow$ El equipo A ha ganado 16 partidos.

$a_{23} = 10 \rightarrow$ El equipo B ha perdido 10 partidos.

$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 24 \rightarrow$ El equipo A ha jugado en total 24 partidos.

$a_{21} + a_{22} = 15 \rightarrow$ El equipo B no ha perdido en 15 partidos.

$a_{13} + a_{23} = 18 \rightarrow$ Entre los dos equipos han perdido 18 partidos.

ACTIVIDADES

1. Estas son las calificaciones que han obtenido Daniel y Manuel en los cuatro controles de Matemáticas de esta evaluación.

	C1	C2	C3	C4
Daniel	8	7	9	10
Manuel	6	8	10	9

Elabora una matriz con estos datos.

2. Escribe una matriz de dimensión 2×3 donde se cumpla que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i + j = 4 \\ -1 & \text{si} \quad i + j \neq 4 \end{cases}$$

3. Escribe una matriz de dimensión 4×3 cuyos elementos a_{ij} sean nulos si la suma $i + j$ es un número primo, y 1 en caso contrario.

1.1. Matrices iguales

Dos **matrices** son **iguales** si tienen la misma dimensión y, además, los elementos coinciden término a término.

A y B son iguales $\rightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para cualquier valor de i, j.

Se escribe así

$a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j significa que $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \ldots, a_{mn} = b_{mn}$

EJEMPLO

3 Determina si estas matrices son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A y B no tienen la misma dimensión, $3 \times 2 \neq 2 \times 3$; por tanto, no son iguales.

A y C tienen la misma dimensión, 3×2; sin embargo $a_{11} = 1 \neq c_{11} = 2$; por tanto, tampoco son iguales.

1.2. Clasificación de matrices

- Una **matriz fila** es una matriz que tiene una sola fila y n columnas. Su dimensión es $1 \times n$.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n})$$

- Una **matriz columna** es una matriz con m filas y una sola columna. Su dimensión es $m \times 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Una **matriz nula**, o **matriz cero**, es una matriz en la que todos sus elementos son ceros. Se representa por 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

- Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, está formada por n filas y n columnas. Si su dimensión es $n \times n$, diremos que su **orden** es n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Una **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas, es decir, no es cuadrada.

Date cuenta

Hay una matriz nula para cada dimensión.

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de dimensión 2×1

$B = (0 \quad 0)$ Matriz nula de dimensión 1×2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de orden 2

EJEMPLO

4 Clasifica las siguientes matrices. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = (0 \quad 0 \quad 0)$

A es una matriz cuadrada de orden 2.

B es una matriz columna de dimensión 2×1.

C es una matriz fila nula de dimensión 1×3.

ACTIVIDADES

4. Determina los valores de a, b, c y d para que estas dos matrices sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 & 2 \\ c-2 & 3-a & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & b+1 & d-1 \\ 2c & 1 & b+2 \end{pmatrix}$$

5. Escribe una matriz cuadrada de orden 3 cuyos elementos estén determinados por esta igualdad.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

1.3. Tipos de matrices cuadradas

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada está formada por todos los elementos de la forma a_{ii}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

Según sean los elementos que forman una matriz cuadrada, esta puede ser:

- **Matriz triangular superior**
  Todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior**
  Todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal**
  Todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidad o matriz unidad**
  Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos. Se denota por I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

No olvides

Hay una matriz identidad de cada orden.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 2

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 3

EJEMPLO

5 Decide de qué tipo es cada una de estas matrices cuadradas.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz diagonal

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad

$C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ Triangular inferior

$D = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ Triangular superior

ACTIVIDADES

6. Escribe la matriz de orden 3 que verifica la condición $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si} \quad i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$. ¿Qué tipo de matriz es?

7. Escribe una matriz diagonal de orden 3 tal que la suma de todos sus elementos sea 7.

8. Escribe una matriz cuyos únicos elementos nulos estén en la diagonal principal.

9. Escribe la matriz de orden 3 que verifica la condición $a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{si} \quad i \geq j \\ 0 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$. ¿Qué tipo de matriz es?

2 Matriz traspuesta

La **matriz traspuesta**, A^t, de una matriz A de dimensión $m \times n$ es otra matriz de dimensión $n \times m$ que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas o las columnas por las filas.

Si $A = (a_{ij})$, entonces $A^t = (a_{ji})$.

Date cuenta

Solo si una matriz es cuadrada, su matriz traspuesta tiene la misma dimensión.

EJEMPLO

6 Halla la traspuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y determina su dimensión.

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to$ La dimensión de A^t es 3×2.

Matrices simétricas y antisimétricas

Una matriz cuadrada, A, es **simétrica** si coincide con su traspuesta.

$$A = A^t \to a_{ij} = a_{ji}$$

Y es **antisimétrica** cuando su opuesta, $-A$, coincide con su traspuesta.

$$-A = A^t \to -a_{ij} = a_{ji}$$

Date cuenta

Solo las matrices cuadradas pueden ser simétricas o antisimétricas.

EJEMPLO

7 Decide si estas matrices son simétricas o antisimétricas.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = A \to A$ es una matriz simétrica.

b) La matriz B no es cuadrada; por tanto, no puede ser simétrica ni antisimétrica.

c) $C^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -C \to C$ es una matriz antisimétrica.

Propiedades

- En una matriz simétrica, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales. $A = \begin{pmatrix} a & m & n \\ m & b & v \\ n & v & c \end{pmatrix}$
- En una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son ceros y los elementos simétricos respecto de ella son opuestos. $A = \begin{pmatrix} 0 & m & n \\ -m & 0 & v \\ -n & -v & 0 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES

10. Determina la matriz traspuesta de esta matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Comprueba que una matriz cuadrada en la que se cumple que $a_{ij} = i + j$ es simétrica. Escribe una matriz de orden 3 con estas características.

3 Operaciones con matrices

3.1. Suma de matrices

No olvides

Para que dos matrices se puedan sumar deben tener la misma dimensión.

La **suma de dos matrices**, A y B, de la misma dimensión se denota $A + B$, y es otra matriz de la misma dimensión cuyos elementos son la suma de los elementos de A y B que ocupan la misma posición.

$$A + B = C, \text{ siendo } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

EJEMPLO

8 Suma, si es posible, estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tanto A y B como B y C no tienen la misma dimensión; luego, no se pueden sumar.

Las matrices A y C tienen la misma dimensión.

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+5 \\ 3+(-1) & -3+(-4) \\ 0+2 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

Como la suma de matrices se realiza elemento a elemento, cumple propiedades análogas a las de la suma de números reales.

- **Conmutativa:** $A + B = B + A$
- **Asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Elemento neutro:** el elemento neutro de la suma es la matriz nula.
  $$A + 0 = A$$
- **Elemento opuesto:** para cada matriz A, existe su matriz opuesta, $-A$, formada por los opuestos de los elementos de A.
  $$A + (-A) = 0$$

Date cuenta

Para restar dos matrices sumamos a la primera la opuesta de la segunda.

$$A - B = A + (-B)$$

EJEMPLO

9 Determina la matriz opuesta, $-A$, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y comprueba que la suma de las dos matrices es la matriz nula.

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

12. Realiza la siguiente operación matricial.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

13. Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $A + A^t - I$.

14. Calcula los valores de a, b, c, d y e para que se cumpla que $A = B + C$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 7 & 8+d \\ a & 9 & c+9 & e+2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix}$$

3.2. Producto de una matriz por un número

El **producto de un número** real k **por una matriz** A es otra matriz de la misma dimensión que A cuyos elementos se obtienen al multiplicar cada uno de los elementos de A por k.

$$k \cdot A = C, \text{ siendo } c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

EJEMPLO

10 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

b) $(-1) \cdot A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{1}{2} \cdot B = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Date cuenta

Si una matriz es diagonal y todos los elementos de la diagonal son iguales, podemos sacar factor común.

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot I$$

3.3. Producto de una matriz fila por una matriz columna

El **producto de una matriz fila**, de dimensión $1 \times n$, **por una matriz columna**, de dimensión $n \times 1$, es un número que se obtiene al multiplicar sus elementos, término a término, y sumar los resultados.

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

EJEMPLO

11 Determina si se pueden realizar los productos $A \cdot B$, $C \cdot A$ y $C \cdot B$ siendo las matrices:

$$A = (6 \quad 2 \quad 1) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 4)$$

La matriz A es una matriz fila de dimensión 1×3; B es una matriz columna de dimensión 3×1; por tanto, las podemos multiplicar.

$$A \cdot B = (6 \quad 2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 17$$

La matriz C es una matriz fila de dimensión 1×4; por tanto, solo se puede multiplicar por una matriz de dimensión 4×1. No se puede multiplicar por A ni por B.

No olvides

Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna es necesario que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.

ACTIVIDADES

15. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $3A - B + 2C$ b) $2C + B - 3A$

16. Dadas $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcula si es posible.

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $2A \cdot 3B$ d) $(-2B) \cdot A$

No olvides

- Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.
- La matriz producto resultante tiene el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda.

Date cuenta

Para que exista el producto de tres matrices, $A \cdot B \cdot C$, sus dimensiones deben ser de esta forma:

Dimensión de A: $m \times n$
Dimensión de B: $n \times p$
Dimensión de C: $p \times q$

La dimensión de $A \cdot B \cdot C$ será $m \times q$.

3.4. Producto de dos matrices

El producto de una matriz A, de dimensión $m \times n$, por otra matriz B, de dimensión $n \times p$, es otra matriz, C, de dimensión $m \times p$, cuyo elemento c_{ij} se obtiene al multiplicar la fila i-ésima de la primera matriz por la columna j-ésima de la segunda.

$$A \cdot B = C, \text{ siendo } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mj}.$$

SABER HACER

Calcular el producto de dos matrices

▶ Calcula el producto, $A \cdot B$, de estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

PRIMERO. Se comprueba que se pueden multiplicar: el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Dimensión de A: 2×3

Dimensión de B: 3×2

El número de columnas de A coincide con el número de filas de B, por lo que las matrices se pueden multiplicar.

La matriz $A \cdot B$ tendrá el mismo número de filas que A y el número de columnas de B.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se efectúa el producto de la primera fila de la matriz A por la primera columna de la matriz B para obtener el primer elemento de la matriz producto.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se multiplica la primera fila de la matriz A por el resto de columnas de la matriz B.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

CUARTO. Se repite el proceso con el resto de filas de la primera matriz y de columnas de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

17. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A^t \cdot B$

18. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz $A \cdot B \cdot C$.

EJEMPLO

12 **En un restaurante se sirven tres tipos de menús: el diario, el ejecutivo y el especial. En estas tablas se muestran los kilos que se compran semanalmente de carne, pescado y verduras para elaborar cada menú y los precios en las dos últimas semanas de cada producto.**

	Carne	Pescado	Verduras
M. diario	6	14	12
M. ejecutivo	8	18	13
M. especial	12	26	15

	Semana 1	Semana 2
Carne	12,50	10,60
Pescado	16	11,90
Verduras	6,20	8,40

Calcula el coste semanal que han tenido ambos menús.

Para resolver el problema se considera cada tabla como una matriz y las multiplicamos.

$$\begin{pmatrix} 6 & 14 & 12 \\ 8 & 18 & 13 \\ 12 & 26 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}5 & 10{,}6 \\ 16 & 11{,}9 \\ 6{,}2 & 8{,}4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Semana 1} & \text{Semana 2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 373{,}4 & 331 \\ 468{,}6 & 408{,}2 \\ 659 & 562{,}6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Menú diario} \\ \leftarrow \text{Menú ejecutivo} \\ \leftarrow \text{Menú especial} \end{array}$$

La elaboración de los menús ha sido más barata la segunda semana.

Propiedades

Si las dimensiones de las matrices A, B y C son tales que nos permiten realizar sus productos, se cumplen estas propiedades:

- **Asociativa:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- **Elemento neutro:** $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
- **Distributiva:** Por la izquierda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  Por la derecha: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

En general, el producto de matrices no es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$

EJEMPLO

13 **Calcula si es posible el producto de estas matrices y comprueba si es conmutativo.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como la dimensión de A es 2×3 y la de B es 2×2, el producto no puede ser conmutativo ya que no podemos realizar el producto $A \cdot B$; en cambio, sí podemos efectuar $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -19 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Se escribe así

$A \cdot B \rightarrow$ A multiplica a B por la izquierda.

$B \cdot A \rightarrow$ A multiplica a B por la derecha.

Dos matrices, A y B, conmutan o son **conmutables** si $A \cdot B = B \cdot A$.

ACTIVIDADES

19. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba si A y B son matrices que cumplen la propiedad conmutativa.

b) Verifica que se cumple la propiedad distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

20. El latón es una aleación de cobre y cinc. LATONES, S. L., produce latón de tres tipos: A, con un 30 % de cinc; B, con un 40 %; y C, con un 50 %. Dispone de dos proveedores: M, que vende el cobre a 6,50 €/kg y el cinc a 1,50 €/kg; y N, con el cobre a 6,70 €/kg y el cinc a 1,10 €/kg. Para producir 100 toneladas de latón A, 550 de B y 50 de C, ¿a qué proveedor deberá comprar?

4 Rango de una matriz

4.1. Combinaciones lineales de las filas de una matriz

Una fila no nula F_i de una matriz **depende linealmente** de las filas F_{j_1}, F_{j_2}, …, F_{j_m} si se cumple que:

$$F_i = k_1F_{j_1} + k_2F_{j_2} + \ldots + k_mF_{j_m}$$

Una fila de una matriz es **linealmente independiente** cuando no depende linealmente de otras filas de la matriz.

No olvides

Las mismas definiciones que hemos hecho para las filas las podemos hacer para las columnas.

- Una columna no nula C_i de una matriz **depende linealmente** de las columnas C_{j_1}, C_{j_2}, …, C_{j_m} si se cumple que:

$$C_i = k_1C_{j_1} + k_2C_{j_2} + \ldots + k_mC_{j_m}$$

- Una columna de una matriz es **linealmente independiente** cuando no depende linealmente de otras columnas de la matriz.

EJEMPLO

14 Determina las filas linealmente independientes en esta matriz. $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

La primera fila, F_1, depende linealmente de la segunda fila, F_2, si $F_1 = kF_2$, es decir, los elementos de F_1 tienen que ser múltiplos de los de F_2. Como no es así, las filas de A son linealmente independientes.

4.2. Rango de una matriz

El **rango de una matriz** A, Rango (A), es el número de filas o de columnas no nulas linealmente independientes que tiene la matriz.

El rango por filas siempre es igual al rango por columnas.

Date cuenta

Como el rango por filas es siempre igual al rango por columnas, una matriz A y su traspuesta A^t tienen siempre el mismo rango.

EJEMPLO

15 Determina el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & -10 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

F_1 no depende linealmente de F_2 ni de F_3, y lo mismo ocurre con F_2 y F_3.

Analizamos si F_1 depende linealmente de F_2 y F_3, es decir, si $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3$. Tomando los dos primeros elementos de las filas se tendría:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = k_1a_{21} + k_2a_{31} \\ a_{12} = k_1a_{22} + k_2a_{32} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = 3k_1 + 8k_2 \\ 0 = -5k_1 + (-10)k_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_1 = -2 \quad k_2 = 1$$

Comprobamos si se cumple el resto de igualdades para estos valores de k_1 y k_2.

$$a_{13} = k_1a_{23} + k_2a_{33} \rightarrow 3 = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 7$$

$$a_{14} = k_1a_{24} + k_2a_{34} \rightarrow -4 = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$$

Por tanto, $F_1 = -2F_2 + F_3$, es decir, F_1 depende linealmente de F_2 y F_3.

Así, F_2 y F_3 son linealmente independientes y F_1 depende de F_2 y F_3 $\rightarrow$ Rango $(A) = 2$.

ACTIVIDADES

21. Determina el rango de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

22. Halla el rango de las matrices A, B y $A \cdot B^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

4.3. Método de Gauss

El **método de Gauss** para hallar el rango de una matriz consiste en convertir la matriz inicial en una matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal sean ceros, utilizando las transformaciones elementales adecuadas. El rango de la matriz será el número de filas no nulas que tiene la matriz triangular que hemos obtenido.

Las transformaciones elementales que se pueden realizar en la matriz son:

- Intercambiar entre sí la fila i por la fila j. Este cambio lo escribimos como $F_i \leftrightarrow F_j$.
- Sustituir la fila i por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$. Lo escribimos como $F_i = aF_i$.
- Sustituir la fila i o la fila j por la suma de ambas, multiplicadas por números a y b no nulos. Lo escribimos como $F_i = aF_i + bF_j$.

SABER HACER

Calcular el rango de una matriz mediante el método de Gauss

▶ Determina el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

PRIMERO. Si $a_{11} = 0$, se intercambia la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de cero, si existe. Se realizan operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El primer elemento de la segunda fila ya es cero. Se hace cero el primer elemento de la tercera fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se comprueba que $a_{22} \neq 0$. Si no lo fuera, habría que intercambiar esta fila con alguna cuyo segundo elemento no sea cero, si existe. Como en el paso anterior, se hace cero el segundo elemento de cada fila, excepto el de la primera y segunda fila.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 2F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se repite el mismo proceso para el resto de filas de la matriz inicial hasta obtener una matriz en la que todos los elementos por debajo de su diagonal sean ceros. El número de filas no nulas que tiene la matriz es el rango de la matriz.

En este caso se obtienen dos filas no nulas → Rango $(A) = 2$.

Date cuenta

Como el rango de una matriz y el de su traspuesta es el mismo, en el caso de que la matriz tenga más filas que columnas podemos abreviar el proceso calculando el rango de su traspuesta.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Rango}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

23. Usa el método de Gauss para hallar el rango de A y B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

24. Calcula el rango de la matriz $A^t \cdot B - C^t$ en función del parámetro m.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & m \end{pmatrix}$$

5 Matriz inversa

Date cuenta

Si una matriz no es cuadrada, no tiene inversa.

La **matriz inversa** de una matriz cuadrada A de orden n es otra matriz A^{-1} del mismo orden que cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad A^{-1} \cdot A = I_n$$

siendo I_n la matriz identidad de orden n.

Las matrices que tienen matriz inversa se llaman **matrices regulares** o **invertibles**, y las que no la tienen, **matrices singulares**.

EJEMPLO

16 Determina si alguna de estas matrices es la inversa de $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ **b)** $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 13 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ **c)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) La matriz B no puede ser una matriz inversa porque no es cuadrada.

b) La matriz C no puede ser la inversa de A porque tienen órdenes distintos.

c) La matriz D es cuadrada y tiene el mismo orden que A. Se comprueba si es la matriz inversa de A.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz D es la matriz inversa de A ya que $A \cdot D = I$.

Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa, sin embargo, no todas las matrices cuadradas tienen inversa.

Se escribe así

Una matriz es **invertible** cuando existe su matriz inversa.

Una matriz A cuadrada de orden n solo tiene inversa si Rango $(A) = n$.

Propiedades

- La inversa de la matriz inversa es la matriz original.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando su orden.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- La inversa de la traspuesta de una matriz es igual a la traspuesta de la matriz inversa.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

ACTIVIDADES

25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^{-1} mediante la definición.

b) Comprobar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

26. Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible.

27. Comprueba que la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es ella misma.

Método de Gauss-Jordan

El **método de Gauss-Jordan** para hallar la matriz inversa consiste en convertir la matriz inicial en la matriz identidad utilizando transformaciones elementales. Aplicando las mismas transformaciones a la matriz identidad obtenemos la matriz inversa.

SABER HACER

Calcular la matriz inversa con el método de Gauss-Jordan

▶ Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

PRIMERO. Se escriben la matriz A y la matriz identidad del mismo orden que A separadas por una línea. Si $a_{11} = 0$, se intercambia la primera fila con alguna fila cuyo primer elemento sea distinto de cero.

Como $a_{11} = 2 \neq 0$, no se intercambian filas.

SEGUNDO. Se realizan operaciones en todas las filas, menos en la primera, para que el primer elemento de cada una de ellas sea cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + 3F_1]{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

TERCERO. Se comprueba que $a_{22} \neq 0$; si no habría que intercambiar la fila con alguna fila posterior cuyo segundo elemento sea distinto de cero. Se opera para hacer cero el segundo elemento de cada fila, excepto el de la segunda fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_2]{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

CUARTO. Se repite el mismo proceso para el resto de filas de la matriz inicial.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 5F_3]{F_1 = F_1 + 7F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

QUINTO. Se divide cada fila entre el elemento que figura en su diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = -F_2 \\ F_3 = -F_3}]{F_1 = \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

SEXTO. Los elementos que figuran a la derecha de la línea forman la inversa de la matriz inicial.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \frac{7}{2} \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Recuerda

Las operaciones elementales que se pueden realizar para hallar la matriz inversa son las mismas que para el cálculo del rango de una matriz.

- Intercambiar entre sí la fila i por la fila j.

  $F_i \leftrightarrow F_j$

- Sustituir la fila i por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$.

  $F_i = aF_i$

- Sustituir la fila i o la fila j por la suma de ambas, multiplicadas por números a y b no nulos.

  $F_i = aF_i + bF_j$

Se escribe así

Para expresar la matriz inicial y la matriz identidad en el método de Gauss-Jordan se escribe:

$(A \mid I_n)$

Al utilizar ese método realizamos esta transformación:

$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$

ACTIVIDADES

28. Determina por el método de Gauss-Jordan la inversa de estas matrices y comprueba que las matrices resultantes son efectivamente sus inversas.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

29. Calcula, mediante el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6 Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación en la que todos sus términos son matrices. Para resolver una ecuación matricial hay que despejar la matriz incógnita mediante las operaciones con matrices.

SABER HACER

Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$

▶ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $AX = B$.

PRIMERO. Se despeja X multiplicando por A^{-1} por la izquierda.

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \xrightarrow{A^{-1}\cdot A = I} IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

SEGUNDO. Se calcula A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = -F_2]{F_1 = \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación.

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recuerda

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa; por tanto, no es lo mismo multiplicar por A^{-1} por la derecha que por la izquierda.

$$A^{-1}B \neq BA^{-1}$$

SABER HACER

Resolver ecuaciones matriciales del tipo $XA = B$

▶ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $XA = B$.

PRIMERO. Se despeja X multiplicando por A^{-1} por la derecha.

$$XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \xrightarrow{A\cdot A^{-1} = I} XI = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

SEGUNDO. Se calcula A^{-1} y se resuelve la ecuación.
La matriz A^{-1} es la misma que la del apartado anterior.

$$X = BA^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

30. Dadas A y B, calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

31. Dadas las matrices A y B, resuelve la ecuación $X \cdot A = B$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SABER HACER

Resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX + B = C$

▶ Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$ con las matrices A, B y C, que son las que aparecen a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

PRIMERO. Se despeja la matriz X.

$$AX + 3B = C \rightarrow AX = C - 3B$$

$$\rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - 3B) \xrightarrow{A^{-1}\cdot A = I} X = A^{-1}(C - 3B)$$

SEGUNDO. Se calcula la matriz A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2F_1]{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + 2F_3]{F_1 = F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

32. Resuelve matricialmente la ecuación $A^t \cdot X - B = 0$, si A y B son estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

33. Determina una matriz X que cumple la ecuación $X \cdot A + A = 2A^2$, sabiendo que A es la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Determinar matrices que cumplan una cierta condición

Determina todas las matrices diagonales que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

PRIMERO. Se determina el tipo de matrices que cumplen la condición.

Las matrices, B, que buscamos tienen que cumplir lo siguiente.

- Son matrices diagonales.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

- Conmutan con la matriz A.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

SEGUNDO. Se impone la condición del problema.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{22} \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11} \\ -a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se igualan las matrices, elemento a elemento, y se resuelve el sistema de ecuaciones resultante.

$$\left.\begin{aligned} \cancel{2a_{11} = 2a_{11}} \\ a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \\ \cancel{0 = 0} \end{aligned}\right\}$$

La primera y la cuarta ecuaciones se pueden eliminar porque son igualdades.

De la segunda y tercera ecuaciones se obtiene que:

$$\left.\begin{aligned} a_{22} = a_{11} \\ -a_{11} = -a_{22} \end{aligned}\right\} \rightarrow a_{11} = a_{22}$$

La única condición sería que los elementos de la diagonal sean iguales ($a_{11} = a_{22}$).

Por tanto, las matrices que cumplen la condición pedida son del tipo:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad \text{donde } k \in \mathbb{R}$$

PRACTICA

34. Encuentra las matrices A y B cuadradas de orden 2 que cumplan que:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Operaciones con matrices

Calcular las constantes que hacen que se cumpla una igualdad entre matrices

Calcula m y n para que se cumpla la igualdad $mA^2 + nA^t = 2I$, teniendo en cuenta que I es la matriz identidad y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

PRIMERO. Se efectúan las operaciones del primer y segundo miembros de la igualdad.

$$mA^2 = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix}$$

$$nA^t = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix}$$

$$2I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se impone la condición que se indica en el problema.

$$mA^2 + nA^t = 2I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & n \\ -n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & -2m + n \\ 2m - n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se igualan las matrices, elemento a elemento, y se resuelve el sistema de ecuaciones resultante.

$$\left.\begin{aligned} n = 2 \\ -2m + n = 0 \\ 2m - n = 0 \\ \cancel{n = 2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{n = 2} -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$$

Se elimina la cuarta ecuación porque es igual a la primera.

De las dos primeras ecuaciones se obtiene la solución $m = 1$ y $n = 2$.

Se comprueba si esta solución es válida para el resto de ecuaciones. Si no lo fuera, el sistema no tendría solución y, en consecuencia, el problema tampoco.

$$2m - n = 0 \xrightarrow{m = 1,\, n = 2} 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

La solución es válida; por tanto, $m = 1$ y $n = 2$.

PRACTICA

35. Calcula los valores de α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$.

La matriz A es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

La matriz I es $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Operaciones con matrices

Calcular la potencia de una matriz

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, calcula** A^{101}**.**

PRIMERO. Se calculan $A^2, A^3, A^4 \ldots$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$
$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2$
$A^6 = A^5 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = I$
$A^7 = A^6 \cdot A = I \cdot A = A$
$A^8 = A^7 \cdot A = A \cdot A = A^2$
$A^9 = A^8 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = I$
…

SEGUNDO. Se deduce una regla general en la que se pueda relacionar el exponente con los elementos de la matriz.

- Si el exponente es múltiplo de 3 $\rightarrow A^{3n} = I$
- Si el exponente es de la forma $3n + 1 \rightarrow A^{3n+1} = A$
- Si el exponente es de la forma $3n + 2 \rightarrow A^{3n+2} = A^2$

TERCERO. Se aplica la regla general para calcular la potencia pedida.
Como $101 = 3 \cdot 33 + 2$, es decir, es de la forma $3n + 2$:

$$A^{101} = A^{3 \cdot 33} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PRACTICA

36. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{101}.

Operaciones con matrices

Comprobar propiedades de algunas matrices

Sea una matriz M de dos filas y dos columnas tal que verifica que $M^2 = M$.
Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple la relación $P^2 = P$.

PRIMERO. Se desarrollan las operaciones que se indican en la igualdad.

$$P^2 = (I - M)^2 = (I - M) \cdot (I - M) = I^2 - I\,M - M\,I + M^2 = I - 2M + M^2$$

SEGUNDO. Se imponen las condiciones del enunciado al resultado.

$$M^2 = M \rightarrow P^2 = I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$$

PRACTICA

37. Sea una matriz M de dos filas y dos columnas tal que verifica que $M^2 = M$. Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple la relación $PM = MP = 0$, siendo 0 la matriz nula de orden 2.

SABER HACER

Operaciones con matrices

Resolver problemas utilizando matrices

La siguiente matriz expresa el precio unitario, en euros, al que le sirven a un restaurante tres productos, P_1, P_2 y P_3, desde dos empresas distintas, E_1 y E_2

$$A=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 8\\ 9 & 7\end{pmatrix}$$

Utilizando las operaciones matriciales, determina a qué empresa encargarías cada uno de los siguientes pedidos.

a) Pedido de 8 unidades del producto P_1, 5 unidades del producto P_2 y 12 unidades del producto P_3.

b) Pedido de 10 unidades del producto P_1, 15 unidades del producto P_2 y 7 unidades del producto P_3.

PRIMERO. Se interpreta la información que proporcionan las matrices.

$$\begin{array}{rl} & \text{Empresas} \rightarrow \ \ E_1 \quad E_2 \\ & \qquad\qquad\quad\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \\ A= & \begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 8\\ 9 & 7\end{pmatrix} \begin{array}{l}\rightarrow \text{Precios del producto } P_1 \text{ en cada empresa}\\ \rightarrow \text{Precios del producto } P_2 \text{ en cada empresa}\\ \rightarrow \text{Precios del producto } P_3 \text{ en cada empresa}\end{array}\end{array}$$

a) $B=(8 \quad 5 \quad 12) \rightarrow$ Unidades pedidas de cada producto

b) $C=(10 \quad 15 \quad 7) \rightarrow$ Unidades pedidas de cada producto

SEGUNDO. Se realizan las operaciones que resuelven el problema y se interpreta la solución.

a) $$B\cdot A=(8 \quad 5 \quad 12)\cdot\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 8\\ 9 & 7\end{pmatrix}=(\overset{\text{Precio total del pedido en } E_1}{\overset{\downarrow}{181}} \quad \underset{\text{Precio total del pedido en } E_2}{\underset{\uparrow}{164}})$$

El pedido será más barato en la empresa E_2.

b) $$C\cdot A=(10 \quad 15 \quad 7)\cdot\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 8\\ 9 & 7\end{pmatrix}=(\overset{\text{Precio total del pedido en } E_1}{\overset{\downarrow}{198}} \quad \underset{\text{Precio total del pedido en } E_2}{\underset{\uparrow}{219}})$$

El pedido será más barato en la empresa E_1.

PRACTICA

38. La siguiente matriz expresa los precios unitarios, en euros, de cuatro artículos A, B, C y D procedentes de las fábricas F_1, F_2 y F_3.

$$P=\begin{pmatrix}34 & 40 & 46\\ 11 & 8 & 12\\ 23 & 27 & 32\\ 25 & 21 & 30\end{pmatrix}$$

Si un pedido es representado por una matriz fila $C=(x \quad y \quad z \quad t)$, ¿qué representa cada uno de los elementos del resultado del producto CP? Si queremos comprar 25 unidades de A, 30 de B, 60 de C y 75 de D, ¿cuál de las fábricas nos ofrece mejor precio?

Matriz traspuesta

Determinar elementos para que una matriz sea ortogonal

Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si cumple que $A^t\cdot A=I$, donde I denota la matriz identidad y A^t es la traspuesta de la matriz A. Determina los valores de a y b para los que la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a & -a & b\\ a & a & 0\\ 0 & b & -1\end{pmatrix} \text{ sea ortogonal.}$$

PRIMERO. Se impone a la matriz la condición de que sea ortogonal.

$$A^t\cdot A=I \rightarrow \begin{pmatrix}a & a & 0\\ -a & a & b\\ b & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & -a & b\\ a & a & 0\\ 0 & b & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}2a^2 & 0 & ab\\ 0 & 2a^2+b^2 & -ab-b\\ ab & -ab-b & b^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se igualan las matrices, elemento a elemento, y se suprimen las identidades y las ecuaciones repetidas.

$$\begin{array}{ccc} 2a^2=1 & \cancel{0=0} & \cancel{0=0}\\ \cancel{0=0} & 2a^2+b^2=1 & \cancel{-ab-b=0}\\ ab=0 & -ab-b=0 & b^2+1=1\end{array}$$

TERCERO. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante. Se obtienen de las primeras ecuaciones los valores de a y b.

$$2a^2=1 \rightarrow a^2=\frac{1}{2} \rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ab=0 \xrightarrow{a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}} b=0$$

De la primera y la tercera ecuaciones se obtienen las soluciones $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=0$ y $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=0$.

Se comprueba si esta solución es válida para el resto de ecuaciones. Si no lo fuera, el sistema no tendría solución.

$$2a^2+b^2=1 \rightarrow 2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0^2=1 \rightarrow 2\cdot\frac{2}{4}=1$$

$$-ab-b=0 \rightarrow -\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0-0=0$$

$$b^2+1=1 \rightarrow 0^2+1=1$$

Las soluciones son válidas; por tanto,

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=0$ y $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=0$.

PRACTICA

39. Halla las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & 0\end{pmatrix}$ tales que:

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro

Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

PRIMERO. Se aplica el método de Gauss para calcular el rango de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2F_1]{F_2 = F_2 - mF_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & -1-m^2 \\ 0 & -1 & 1-2m \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1-2m \\ 0 & 0 & -1-m^2 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se estudia el número de filas no nulas que tiene la matriz dependiendo de los valores del parámetro.

- La primera y la segunda fila son siempre no nulas.
- La tercera fila es nula si $-1 - m^2 = 0 \rightarrow m^2 = -1$.

No tiene solución para ningún valor de $m \in \mathbb{R}$. Por tanto, la tercera fila nunca es nula.

Rango $(A) = 3$, para cualquier valor de $m \in \mathbb{R}$.

PRACTICA

40. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \\ 3 & 2-a & 3 & 3+a \end{pmatrix}$, estudia, en función del parámetro a, el rango de la matriz.

Matriz inversa

Calcular la inversa de una matriz que depende de un parámetro

Di cuándo es invertible $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}$.

PRIMERO. Se calcula el rango de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - (a-1)F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & -a^2+2a & -a^2+a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & -a^2+2a & -a^2+a+2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Se estudian los elementos de la diagonal.

- En la tercera fila si $1 - a = 0 \rightarrow a = 1$
- En la segunda fila si $-a^2 + 2a = 0$

  $-a^2 + a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$
- En la primera fila $1 \neq 0$

  Por tanto: Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$
  Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$
  Si $a = 2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

SEGUNDO. Solo existe la inversa si su rango es igual a su orden.
Si $a = 0$, $a = 1$ o $a = 2 \rightarrow$ No existe inversa.

PRACTICA

41. Di cuándo es invertible $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$.

Ecuaciones matriciales

Resolver un sistema de ecuaciones matriciales

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Halla las matrices X e Y que verifican el sistema $\left.\begin{array}{l} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{array}\right\}$.

PRIMERO. Se resuelve el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 6X + 2Y = 2A \\ 4X + 2Y = B \end{array}\right\} \\ \hline 2X \qquad = 2A - B \end{array}$$

$$X = A - \frac{1}{2}B \rightarrow Y = -2A + \frac{3}{2}B$$

SEGUNDO. Se calculan X e Y.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

PRACTICA

42. Halla las matrices X e Y, cuadradas de orden 2, que resuelvan el sistema $\left.\begin{array}{l} 2X + Y = A^2 \\ X - Y = A^{-1} \end{array}\right\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Matrices. Operaciones con matrices

43. Escribe dos ejemplos de distinta dimensión para cada tipo de matriz.

a) Matriz fila.
b) Matriz columna.
c) Matriz diagonal.
d) Matriz identidad.
e) Matriz triangular superior.
f) Matriz triangular inferior.

44. Determina la matriz triangular superior de orden 2 cuyos elementos de la diagonal principal son 1, y la suma de todos sus elementos es 6.

45. Determina los valores de x e y para que estas matrices sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x+3 \\ 3 & x & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 3 & 2y-5 & -4 \end{pmatrix}$$

46. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $A - 2B$ d) $2A + 3B$

47. Sean las matrices $A_{m\times n}$, $B_{m\times p}$ y $C_{p\times n}$. Determina la dimensión de las siguientes matrices.

a) $A^t \cdot B$
b) $A \cdot C^t$
c) $B \cdot C$
d) $C \cdot A^t$
e) $B \cdot C + A$
f) $B^t \cdot A - C$

48. Sean las matrices $A_{2\times 3}$, $B_{6\times 2}$, $C_{3\times 4}$ y $D_{4\times 3}$. Determina la dimensión de estas matrices.

a) $A \cdot C$
b) $A^t \cdot B^t$
c) $C \cdot D$
d) $B \cdot A$
e) $C^t \cdot A^t \cdot B^t$
f) $(C^t + D) \cdot A^t$

49. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $A \cdot B$ b) $B^t \cdot A$ c) A^2

50. Comprueba que cualquier matriz de orden 3 cumple que $(A^t)^t = A$

51. Comprueba que una matriz cuadrada que verifique $a_{ij} = i - j$ es antisimétrica. Escribe una matriz de orden 3.

52. Consideremos estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes productos.

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $B \cdot C$ d) $C \cdot B^t$

53. Se consideran las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, estas matrices.

a) $A \cdot B \cdot C$
b) $A \cdot C^t + B$
c) $B^t \cdot A - C$
d) $B \cdot C \cdot A$
e) $A^t \cdot C^t$
f) $B^t \cdot C^t$

54. Comprueba que estas matrices son conmutables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

55. Encuentra la expresión general de todas las matrices que conmuten con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

56. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra una matriz B que conmute con la matriz A, que sea triangular superior y cuya suma de los elementos de su diagonal principal sea 2.

57. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Comprueba que A y B conmutan.
b) Determina la expresión general de todas las matrices que conmutan con A.

58. Sea C el conjunto de todas las matrices de la forma $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ tales que $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que dos matrices de este tipo son siempre conmutables.

59. Sea M el conjunto de matrices de números reales de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$.

Demuestra que si se multiplican dos matrices cualesquiera de M, se obtiene como resultado otra matriz perteneciente a este mismo conjunto. Es decir, si $A \in M$ y $B \in M$, entonces se verifica que $A \cdot B \in M$.

60. Determina el valor de t para el que se cumpla esta condición.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

61. Determina los valores de x, y y z para que se verifique la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

62. Calcula el valor de x para el que se verifica lo siguiente.

$$\begin{pmatrix} x^2+3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4-4x & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

63. Calcula el valor de x para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

64. Encuentra un número real $\lambda \neq 0$ y todas las matrices B de dimensión 2×2 distintas de la matriz nula que cumplan lo siguiente:

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

65. Determina todas las matrices A de orden 2 antisimétricas que verifiquen la condición $A^4 = 16 \cdot I$.

66. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3 y A es una matriz diagonal, ¿podemos asegurar que A y B cumplen la propiedad conmutativa para el producto? ¿Cómo debería ser A para que lo fuesen?

67. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula las matrices B tales que $A \cdot B = B \cdot A^t$.

68. Halla todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2 - 2M = 3I$, donde I es la matriz identidad.

69. Determina los valores de m para los cuales la matriz $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - 4X + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, donde I es la matriz identidad.

70. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla el valor de x para que se cumpla esta igualdad.

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

71. Comprueba que se verifica la propiedad $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ para estas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

72. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$, calcula los valores de m y n para los que se cumple que $(I + A)^3 = mI + nA$, donde I es la matriz identidad.

73. Encuentra los valores de α y β que verifican la ecuación $A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0$, sabiendo que I es la matriz identidad de orden 2 y que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

74. Halla una matriz B sabiendo que su primera fila es (2, 0) y que verifica que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

75. Comprueba si las siguientes matrices cumplen la propiedad conmutativa para el producto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

76. Determina todas las matrices A antisimétricas que cumplan que $A^2 = B$, donde B es la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

77. Considera las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A + B)^2$.

b) Halla $A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$.

c) ¿Qué deberían cumplir A y B para que se verificase que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$? Razona la respuesta.

78. Encuentra todas las matrices posibles de la forma $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que conmuten con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
De entre todas ellas, determina aquella cuya suma de los elementos de la diagonal principal sea 5 y donde $a_{11} = -a_{12}$.

79. Encuentra las matrices $X = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ que verifican la condición $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad.

80. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{41}.

81. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtén la matriz $T_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$.

82. De una matriz A sabemos que verifica la condición $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad.
Determina la expresión general de la potencia n-ésima de la matriz A.

83. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demuestra que A y B son conmutables.

b) Calcula A^n y B^n.

84. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Halla todas las matrices B que conmuten con A.

b) Calcula la potencia n-ésima de A.

85. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5. Obtén, razonadamente, A^n para $n > 5$.

86. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula lo siguiente.

a) Todas las matrices M que conmutan con A.

b) A^4 y A^n.

87. Considera las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcula lo siguiente.

a) M^n, con $n = 1, 2, 3\ldots$

b) Todas las matrices M que verifiquen que $M^{100} = V$.

88. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, determina:

a) Las constantes m y n tales que $A^2 = mA + nI$, donde I es la matriz identidad.

b) A^5, utilizando solo la expresión del apartado anterior, y sin calcular A^3 ni A^4.

89. Se dice que una matriz cuadrada es idempotente cuando se cumple que su cuadrado es igual a ella misma, es decir, cuando $A^2 = A$.

a) Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3, distinta de la matriz unidad y de la matriz nula, que sea idempotente.

b) Calcula el valor de m para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix}$ sea idempotente.

c) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.

90. Dada una matriz cuadrada A, se define su traza, $Tr(A)$, como la suma de los elementos de su diagonal principal.

a) Demuestra que para dos matrices cuadradas cualesquiera A y B se verifica que $Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$.

b) Aplica el resultado anterior para calcular a, sabiendo que las matrices A y B son cuadradas y que $AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

91. Una matriz cuadrada es nilpotente cuando alguna de sus potencias es la matriz nula. En el caso de que n sea el menor entero positivo tal que $A^n = 0$, se dice que A es nilpotente de grado n.

a) Demuestra que la siguiente matriz es nilpotente de grado 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Es decir, $A^2 \neq 0$ y $A^3 = 0$.

b) Encuentra todas las matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ nilpotentes de grado 2.

Rango de una matriz

92. Calcula el rango de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

93. Halla el rango de estas matrices.

a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

94. Calcula el rango de esta matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

95. Calcula el valor de a para que la matriz tenga rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

96. Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro m.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

97. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix}$. Discute su rango en función del parámetro a.

98. Calcula el rango de la siguiente matriz en función del parámetro m.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{-1}{2} & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m \end{pmatrix}$$

99. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de la matriz A^n. ¿Depende el rango de n?

100. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} d & a & a \\ b & d & 3 \\ c-4 & c & d \end{pmatrix}$, donde a, b, c y d son números reales.

a) Determina los valores de a, b, c y d para los que la matriz A sea antisimétrica.

b) Si $a = b = c = 0$, determina el rango de A en función del parámetro d.

101. Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 3 & -2 \\ a+2 & 0 & a \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

102. Calcula la matriz inversa de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

103. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula.

a) A^{-1} y B^{-1} b) $(A \cdot B)^{-1}$

Comprueba que se cumple que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

104. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula.

a) A^{-1} b) $(A^t)^{-1}$

Comprueba que se cumple que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

105. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula.

a) $(A^{-1})^{-1}$ b) $B^{-1} \cdot B$

¿Se cumplen estos resultados para cualquier matriz?

106. Determina todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que $A^{-1} = 2I - A$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

107. Se dice que dos matrices cuadradas de orden n, A y B, son semejantes, si existe una matriz invertible M tal que $B = M^{-1} \cdot A \cdot M$, donde M^{-1} es la matriz inversa de M.

Determina si son semejantes estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

108. Considera una matriz cuadrada A que cumple la ecuación $A^2 - 3I = 2A$, donde I denota la matriz identidad.

a) Estudia si existe la matriz inversa de A y, si es posible, determina A^{-1} en función de A e I.

b) Determina todas las matrices A de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $A^2 - 3I = 2A$.

109. Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz AB es $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determina la matriz B.

110. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Determina el conjunto de todas las matrices que conmutan con la matriz A.

b) Calcula A^n y deduce de esta expresión A^{-1}.

111. Considera la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como una matriz genérica de orden 2.

a) Determina la expresión genérica de su matriz inversa.

b) Razona para qué casos las matrices de orden 2 son invertibles.

112. Calcula A^{-1} y A^n, siendo A una matriz de orden 3 con todos sus elementos nulos excepto

$a_{11} = a_{23} = a_{32} = \frac{1}{5}$.

113. Si una matriz cuadrada A verifica que $A^2 + 7A = I$, siendo I la matriz unidad, calcula A^{-1} en función de A.

114. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$, calcula.

a) Las constantes a, b y c para que se cumpla que $A^t = A^{-1}$.

b) La matriz A^4 para los valores de a, b y c obtenidos.

115. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2I$.

b) Calcula A^{-1}.

c) Halla A^{12} y la inversa de A^{12}.

Ecuaciones matriciales

116. Despeja la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) $AX + B = C$

d) $AX + A = B$

e) $A^{-1}X = B$

f) $AXB = C$

g) $A^tX = B$

h) $AXA = A^2 + I$

117. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, determina una matriz X de orden 2 que cumpla esta ecuación.

$$X + A = B$$

¿De qué tipo es la matriz X obtenida?

118. Determina la matriz X que cumple la igualdad

$A + X = 2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

119. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple que $2A - 5X = B$.

120. Considera las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina una matriz X que verifique esta condición.

$$A - A^2 = A \cdot B - X$$

121. Resuelve esta ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

122. Encuentra una matriz X de orden 2 que cumpla que

$A + X = AX + XA$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

123. Resuelve la ecuación matricial $XA + AX = B$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

124. Determina, si existe, una matriz D de orden 2 que verifique esta ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

125. Considera las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AX = B$.

126. Determina la matriz X que verifica la ecuación $(X - I)B = A$, donde A y B son estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

127. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, realiza lo siguiente.

a) Determina los valores de m para los que la ecuación $AX - A^t = A$ tiene solución.

b) Resuelve la ecuación $AX - A^t = A$ para $m = 0$.

128. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcula una matriz X que verifique la ecuación $X + XA = B^t$.

129. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz A^{-1}.

b) Resuelve la ecuación $AXA = A^2 + A$.

130. Calcula la matriz X que cumple que $XB + A = B + A^2$, donde A y B sean estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

131. Resuelve los siguientes sistemas matriciales.

a) $\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} X + 3Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

132. Encuentra las matrices A y B sabiendo que cumplen las siguientes condiciones.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

133. Determina dos matrices, X e Y, que verifiquen las ecuaciones $2X + Y = A$ y $3X + 2Y = B$, sabiendo que A y B son estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

134. Sean A, B y C las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula las matrices X e Y que verifican este sistema de ecuaciones matriciales.

$$\left.\begin{array}{r} AX + BY = C \\ AX = Y \end{array}\right\}$$

135. Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$.

Encuentra las matrices X e Y que cumplen las siguientes ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 2X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{array}\right\}$$

136. Sean las matrices A y B siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de μ para el que $A^{-1} = \frac{1}{6}A$.

b) Para $\mu = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$.

137. Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores del parámetro α para los que la matriz $M^2 + 3M$ no sea invertible.

b) Para el valor $\alpha = 0$, resuelve la ecuación matricial $MX + M = 2I$.

138. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^n.

b) Halla la matriz X que verifica la ecuación

$$X \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

139. Considera las matrices siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia el rango de cada una de las matrices en función del parámetro a.

b) Para $a = 0$, obtén la matriz X que verifica la ecuación $AX = B$.

Problemas con matrices

140. Escribe en forma de tabla el siguiente enunciado y representa los datos en forma de matriz.

Una familia gastó en septiembre 400 € en comida y 120 € en los recibos de agua, luz y gas; en octubre gastó 500 € en comida y 180 € en agua, luz y gas; y en noviembre, 350 € en comida y 250 € en agua, luz y gas.

141. Una empresa de autobuses tiene tres líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses en la línea A, 3 en la B y 4 en la C. El martes salieron 2 autobuses en la línea A, 1 en la B y 4 en la C. El miércoles salió 1 autobús en la línea A, 3 en la B y 5 en la C. Represéntalo en forma de matriz.

142. Una empresa produce tres artículos: A, B y C. Los precios de coste por unidad son 32 €, 46 € y 71 €, respectivamente, y los precios de venta de cada unidad son 53 €, 82 € y 140 €. El número de unidades vendidas anualmente de estos artículos es 2 100, 1 400 y 900, respectivamente. Determina la matriz fila de costes por unidad, la matriz fila de ventas por unidad, la matriz fila de beneficios por unidad, la matriz columna de unidades vendidas y el beneficio anual obtenido.

143. Una cadena de hoteles posee tres hoteles en una determinada ciudad: Hotel Edén, Paraíso Hotel y Oasis Spa. Cada hotel dispone de tres tipos de habitaciones: de lujo, habitación doble e individual. El Hotel Edén posee 6 habitaciones de lujo, 30 dobles y 10 individuales. El Paraíso Hotel, 4, 50 y 10, respectivamente y el Oasis Spa, 4, 50 y 8. El precio por habitación y noche es de 120 € la habitación de lujo, 80 € la doble y 50 € la individual.

a) Recoge estos datos en dos matrices, indicando qué significa cada fila y columna.

b) Expresa mediante una matriz los ingresos obtenidos en una noche por cada hotel en el caso de que estuvieran completos.

144. Una industria produce dos tipos de tornillos, planos (P) y de estrella (E). De cada tipo hace tres modelos: L, M, S. La producción semanal de tornillos, expresada en miles de unidades, se muestra mediante esta tabla.

	Tipo L	Tipo M	Tipo S
Tornillos planos	2	7	4
Tornillos de estrella	3	5	6

El porcentaje de tornillos defectuosos del tipo L es del 4 %, del tipo M es de un 2 % y del tipo S es de un 1 %. Calcula matricialmente el número semanal de tornillos planos y de estrella que no son defectuosos.

145. Una fábrica elabora dos tipos de productos, X e Y, que vende a tres empresas A, B y C. Inicialmente distribuía 1 000 unidades de cada producto a cada una, pero hoy la empresa A recibió 600 unidades de X y 300 de Y; la empresa B recibió 400 unidades de X y 800 de Y, y la empresa C recibió 900 unidades de X y 700 de Y. Representa mediante una matriz las disminuciones porcentuales que se han producido en la distribución de los productos a estas empresas.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

¿PARA QUÉ SIRVEN LAS MATRICES?

Para calcular una ruta óptima entre dos lugares diferentes

Cuando vemos un mapa con diferentes puntos de destino y los caminos que podemos tomar para llegar a cada uno, nuestro navegador trabaja con ellos de la siguiente forma: representa los lugares como puntos, que llamaremos vértices, y los caminos que unen estos lugares como aristas que unen los vértices. Así, el mapa que nosotros vemos con detalle, el navegador lo ve como un croquis simple que se llama grafo.

Esta situación se puede describir con una matriz cuadrada de orden n, donde n es el número de vértices que tiene el grafo y cada elemento a_{ij} es el número de aristas que van del vértice i al vértice j. Esta matriz se llama matriz de adyacencia del grafo. La matriz del grafo anterior sería:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El elemento ij de la matriz elevada al cuadrado expresa el número de caminos de 2 aristas que existen entre el vértice i y el vértice j.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, hay 1 camino de dos aristas desde el vértice 1 al vértice 4 y 3 caminos de 2 aristas desde el vértice 2 al vértice 2.

M^3 expresaría los caminos de tres aristas, M^4 los caminos de 4 aristas, y así sucesivamente.

De esta manera el navegador calcularía todos los caminos posibles y, sumando las longitudes de aristas, podría obtener el camino más corto. De igual modo lo haría para el camino más rápido sumando los tiempos de cada arista.

LEE Y COMPRENDE

1. Si entre dos puntos del mapa, la carretera que los une no es recta, sino que tiene 4 curvas pronunciadas, ¿cuántas aristas son necesarias para señalarlas en el grafo?

INTERPRETA

2. Clasifica las matrices que aparecen en el texto, según su forma y la posición de sus elementos.

REFLEXIONA

3. Decimos que un camino es simple cuando no pasa dos veces por el mismo vértice. Si consideramos un grafo con 5 vértices, ¿cuál es el número máximo de aristas que tiene un camino simple?

APLICA

4. Dadas las matrices siguientes, dibuja un grafo que las tenga como matrices de adyacencia.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Considera el siguiente grafo y calcula el número de caminos cuya longitud sea de tres aristas que hay entre el vértice 2 y el vértice 4.