PROYECTO SABER HACER

Matemáticas
aplicadas a las Ciencias Sociales I

SERIE **RESUELVE**

BACHILLERATO 1

El libro Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I para 1.er curso de Bachillerato, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
César de la Prida Almansa
Ana María Gaztelu Villoria
Augusto González García
José Lorenzo Blanco
Carlos Pérez Saavedra
Domingo Sánchez Figueroa

EDICIÓN
César de la Prida Almansa
Virgilio Nieto Barrera

EDITOR EJECUTIVO
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

SANTILLANA

Índice

SABER HACER

- Racionalizar binomios con raíces cuadradas
- Operar con números decimales periódicos
- Realizar operaciones combinadas con potencias
- Usar la propiedad distributiva para sacar factor común
- Efectuar la unión de dos intervalos
- Efectuar la intersección de dos intervalos
- Calcular intervalos encajados que contengan a un número irracional
- Sumar y restar números en notación científica
- Escribir ciertas expresiones mediante un solo radical
- Introducir factores en un radical
- Racionalizar fracciones con un producto de radicales en el denominador
- Reconocer números representados en la recta real
- Resolver operaciones entre fracciones con radicales

- Calcular el interés en plazos distintos al anual
- Calcular el tiempo de inversión a interés compuesto
- Resolver problemas de interés compuesto con aumentos anuales de capital
- Calcular el tiempo en anualidades de capitalización
- Calcular anualidades de capitalización en plazos diferentes al anual
- Elaborar una tabla de amortización por meses
- Calcular anualidades de amortización en plazos diferentes al anual
- Calcular la TAE para períodos superiores a un año
- Calcular la TAE si los intereses no son anuales
- Analizar cantidades a partir de la inflación
- Calcular la variación de nivel adquisitivo

- Determinar un coeficiente para que una ecuación de 2.º grado tenga un número de soluciones
- Resolver ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$
- Resolver ecuaciones del tipo $P(x)/Q(x) = R(x)$
- Resolver ecuaciones del tipo $P(x)/Q(x) = R(x)/S(x)$
- Resolver ecuaciones del tipo $\sqrt{P(x)} = Q(x)$
- Resolver ecuaciones del tipo $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} = R(x)$
- Resolver ecuaciones mediante factorización
- Resolver expresiones del tipo $\log_a x = c$ o $\log_x b = c$
- Resolver problemas mediante el uso de ecuaciones
- Resolver ecuaciones del tipo $\sqrt{P(x)} = a$
- Resolver ecuaciones exponenciales mediante un cambio de variable

---

- Expresar todas las soluciones de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado con dos incógnitas
- Resolver sistemas en función de un parámetro
- Resolver problemas con un sistema de ecuaciones
- Determinar el número de soluciones de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas
- Expresar todas las soluciones de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado con tres incógnitas
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas en función de un parámetro
- Resolver problemas con un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas
- Resolver sistemas no lineales que contienen expresiones radicales
- Resolver sistemas no lineales que contienen fracciones algebraicas
- Escribir un sistema compatible determinado con una solución dada
- Resolver un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas

- Hallar los valores de las operaciones con funciones
- Componer funciones
- Calcular el dominio de funciones no elementales
- Calcular el período de las funciones trigonométricas
- Representar funciones del tipo $f(x) = ax^n$ con $n \geq 2$
- Determinar la gráfica de una función a partir de transformaciones
- Representar funciones del tipo $kf(x)$ conocida la gráfica de $f(x)$
- Representar funciones del tipo $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$ y $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$
- Representar la gráfica de una función inversa
- Representar funciones del tipo $f(x) = a^{kx}$
- Representar funciones del tipo $f(x) = a^{x+b} + c$
- Representar funciones del tipo $f(x) = \log_a kx^b$
- Representar funciones del tipo $g(x) = |f(x)|$
- Representar funciones en las que interviene el valor absoluto
- Expresar una función como composición de otras funciones
- Determinar el período de una función
- Representar funciones del tipo $f(x) = \dfrac{k}{x^n}$
- Representar funciones del tipo $f(x) = \dfrac{k}{\sqrt[n]{x}}$

- Calcular las asíntotas oblicuas de una función
- Estudiar la continuidad de una función elemental
- Determinar el límite de un cociente de polinomios con radicales
- Resolver límites del tipo $(a_n/b_n)^{c_n}$ que presentan la indeterminación 1^∞
- Calcular el límite de una función en un punto
- Calcular un límite que presenta una indeterminación del tipo 0/0 cuando hay radicales
- Representar una función conociendo sus asíntotas y sus puntos de corte
- Determinar el signo de las ramas infinitas de una función racional
- Determinar si una función racional tiene asíntotas horizontales y oblicuas
- Estudiar la continuidad de una función definida a trozos
- Calcular el valor de un parámetro para que una función sea continua
- Calcular el límite en un punto de un cociente de polinomios
- Determinar las asíntotas de una función

Índice

SABER HACER

- Calcular la tangente de una función en un punto utilizando las técnicas de derivación
- Determinar los puntos con tangente horizontal en una función
- Calcular la tangente a un punto de un lugar geométrico
- Hallar el valor de un parámetro en una función conociendo algunas de sus tangentes
- Calcular una derivada sucesiva
- Calcular la derivada de una función del tipo $f(x) = g(x)^n$
- Calcular la deriva de una función del tipo $f(x) = a^{g(x)}$
- Calcular la derivada de una función del tipo $f(x) = \ln g(x)$
- Calcular la derivada de una función del tipo $f(x) = sen\ g(x)$
- Calcular la derivada de una función del tipo $f(x) = arc\ cos\ g(x)$
- Calcular la derivada de una función del tipo $f(x) = g(x)^{h(x)}$
- Calcular la derivada de la composición de tres funciones
- Determinar la tangente de una función en un punto que cumple una serie de condiciones
- Calcular la recta normal a una curva
- Calcular el valor de varios parámetros de una función conociendo algunas de sus características
- Calcular la velocidad de un móvil

- Resolver problemas mediante el estudio del crecimiento de una función
- Determinar los parámetros de una función de la que se conocen un máximo o un mínimo
- Determinar una función conociendo algún punto por el que pasa y un máximo o un mínimo
- Estudiar el crecimiento y el decrecimiento en una función a partir de la gráfica de su derivada
- Representar la derivada de una función a partir de la gráfica de dicha función
- Determinar la concavidad y convexidad de una función definida a trozos
- Estudiar la concavidad y la convexidad en un punto a partir de la representación gráfica de la función
- Estudiar la posición de la gráfica respecto de una asíntota horizontal
- Estudiar la posición de la gráfica respecto de una asíntota vertical
- Resolver problemas de optimización
- Representar funciones exponenciales
- Representar funciones logarítmicas

- Elaborar una tabla de una variable discreta cuando el número de datos es grande
- Construir un diagrama de barras adosadas
- Interpretar pirámides de población
- Analizar datos mediante medidas de posición
- Trabajar la estadística unidimensional con calculadora
- Interpretar las medidas estadísticas en una variable unidimensional
- Interpretar la media y la desviación típica conjuntamente
- Calcular medidas estadísticas con ordenador
- Realizar gráficos estadísticos con ordenador
- Añadir o suprimir datos para obtener una medida estadística determinada
- Variar la media de un conjunto de datos al sumar una cantidad fija a todos

- Agrupar los datos de variables bidimensionales en intervalos
- Construir las tablas de frecuencias marginales a partir de la tabla de doble entrada
- Interpretar una tabla de doble entrada
- Calcular la recta de regresión con la calculadora
- Determinar la media de una de las variables a partir de la recta de regresión
- Determinar e interpretar el signo del coeficiente de correlación a partir de la recta de regresión
- Dibujar gráficos estadísticos bidimensionales con ordenador
- Realizar una recta de regresión con ordenador
- Representar variables bidimensionales
- Calcular el coeficiente de correlación en tablas de doble entrada agrupadas en intervalos

- Hallar el espacio muestral de un experimento con una tabla de doble entrada
- Calcular probabilidades experimentalmente
- Calcular probabilidades utilizando sus propiedades
- Resolver problemas de probabilidad con sucesos compuestos
- Calcular la probabilidad de la intersección de sucesos utilizando un diagrama de árbol
- Utilizar la regla del producto en experimentos con reemplazamiento
- Calcular probabilidades de sucesos compuestos
- Calcular probabilidades condicionadas de sucesos compuestos
- Calcular el contrario de la unión o de la intersección
- Expresar sucesos utilizando sus operaciones
- Hallar la probabilidad de sucesos no equiprobables
- Calcular una probabilidad condicionada
- Utilizar la regla del producto en experimentos sin reemplazamiento

- Calcular probabilidades por medio de tablas en variables aleatorias que siguen una distribución normal
- Calcular probabilidades en una variable aleatoria binomial aproximándola a una normal
- Calcular los parámetros de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial
- Determinar un parámetro para que una función sea función de densidad
- Calcular la probabilidad de que $Z \equiv N(0, 1)$ sea mayor que un valor positivo
- Calcular la probabilidad de que $Z \equiv N(0, 1)$ esté entre dos valores
- Calcular la probabilidad de que $Z \equiv N(0, 1)$ sea menor o mayor que un valor negativo
- Calcular un punto conociendo la probabilidad
- Tipificar una variable aleatoria
- Calcular uno de los parámetros, conociendo el otro parámetro y una probabilidad
- Calcular la media y la desviación típica, conociendo dos probabilidades
- Calcular probabilidades en variables aleatorias que siguen una distribución binomial con n grande
- Determinar los extremos del intervalo simétrico respecto a la media, μ, que contiene un porcentaje de las observaciones de la distribución $N(\mu, \sigma)$
- Aproximar una distribución binomial a una distribución normal y calcular probabilidades

La estructura de las unidades didácticas es muy sencilla, ya que se trata de facilitar la localización de los contenidos fundamentales, de los ejemplos resueltos y de las actividades propuestas.

A lo largo de toda la unidad marcamos con iconos aquellos contenidos o actividades en las que se trabajan de manera particular las competencias básicas.

- Competencia matemática, científica y tecnológica
- Competencia social y cívica
- Conciencia y expresión artística
- Iniciativa y emprendimiento
- Comunicación lingüística
- Competencia digital
- Aprender a aprender

Introducción a la unidad: un texto que motiva el estudio de los contenidos.

Se especifican los contenidos (**Saber**) de la unidad.

El texto inicial presenta un aspecto de la vida real en el que se utilizan los contenidos que se van a estudiar en la unidad.

Páginas finales de la unidad: un paso más en la aplicación de los contenidos aprendidos.

Esta página, que te muestra cómo las **matemáticas** intervienen **en tu vida**, responde a la pregunta de la página inicial de la unidad. Además, propone una serie de actividades que te permitirán profundizar en el aspecto de la vida real que se muestra.

Páginas de contenidos: SABER y SABER HACER como un todo integrado.

Nuestra propuesta para **Saber** son unos textos claros y estructurados. Los **Ejemplos** te ayudarán a afianzar esos saberes.

Junto a los textos explicativos encontrarás **informaciones complementarias** que te serán muy útiles para la comprensión de los conceptos y procedimientos.

En la parte **Saber hacer** aprenderás, paso a paso, los procedimientos necesarios para tu desarrollo matemático.

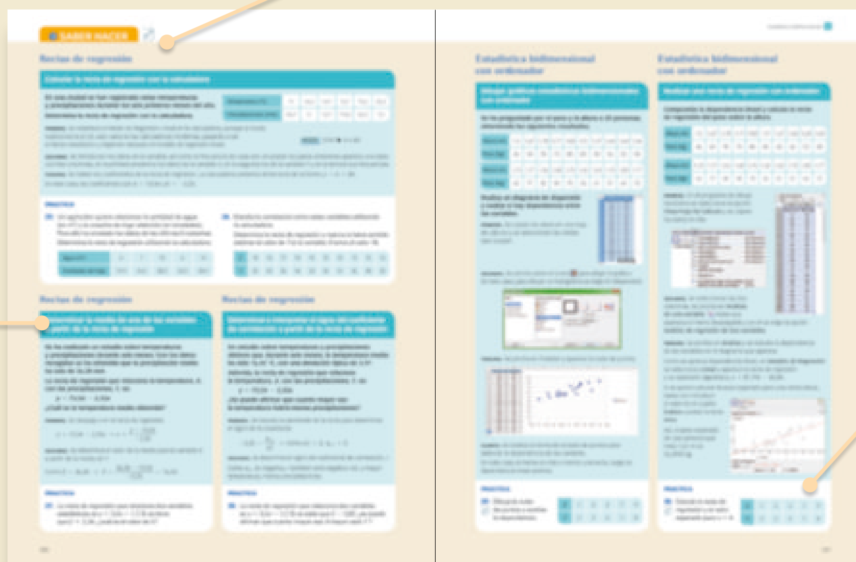
Las **Actividades** de estas páginas te ayudarán a practicar los conocimientos adquiridos.

Además, su secuenciación te permitirá llegar a dominarlos.

Páginas de Saber hacer: para aprender a hacer matemáticas.

En estas páginas se muestran los procedimientos básicos (**Saber hacer**) de la unidad.

Cada procedimiento se introduce mediante la resolución de una actividad en la que se muestra, paso a paso, un método general de resolución.



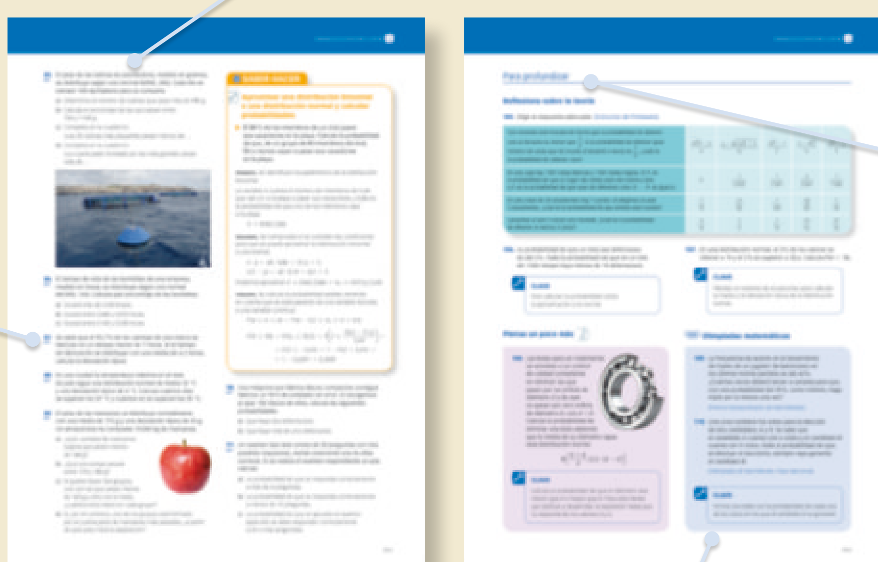
Las actividades que acompañan cada procedimiento te permitirán **practicar** y dominar estos contenidos.

Páginas de Saber hacer: para aprender a hacer matemáticas.

Nuestras **Actividades finales** están **secuenciadas** para que aproveches de la mejor forma posible la aplicación de los contenidos estudiados.

Cada actividad te muestra la **dificultad** que tiene.

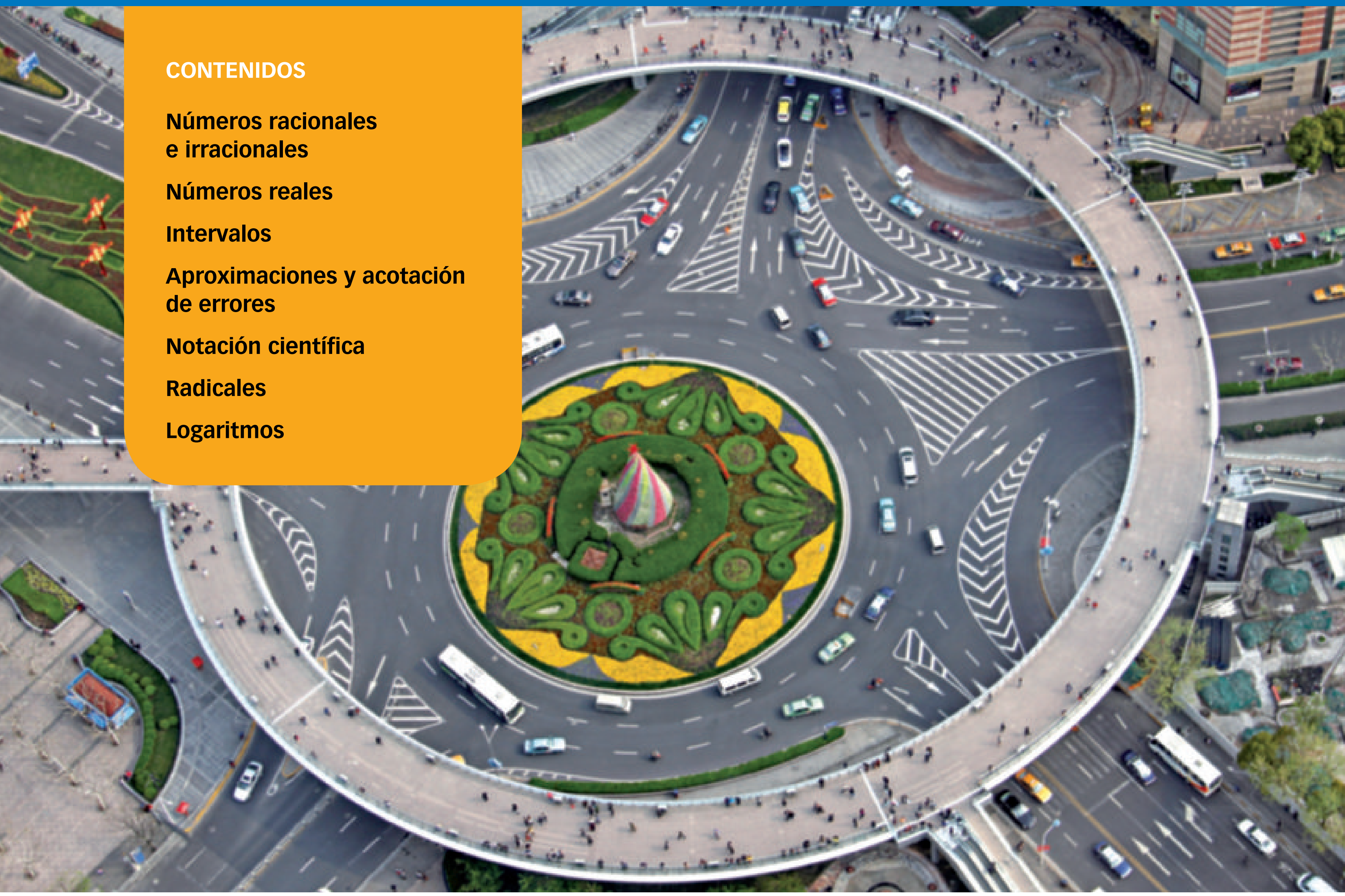
Los **Saber hacer** te ayudarán a seguir profundizando en los procedimientos.



Esta página sirve **para profundizar** en el aprendizaje de los contenidos de la unidad. Las actividades que ofrecemos te harán **reflexionar sobre la teoría** y **pensar un poco más**.

En los problemas de las **Olimpiadas matemáticas** tendrás que aplicar todos tus conocimientos e ingenio para descubrir regularidades y propiedades de los contenidos que acabas de estudiar.

1 Números reales



CONTENIDOS

Números racionales e irracionales

Números reales

Intervalos

Aproximaciones y acotación de errores

Notación científica

Radicales

Logaritmos

Por lo general, asociamos los coches y su conducción a situaciones placenteras, de ello se han encargado la publicidad, los vendedores…

La realidad es que en la mayoría de los casos estas situaciones idílicas no son tales y la conducción pasa a ser estresante y peligrosa, debiendo prestar la máxima atención para evitar accidentes.

La prevención de los accidentes de tráfico es fundamental, para mejorarla se han realizado campañas aconsejando la conducción responsable: respeto a las señales de circulación, adecuación de la velocidad a la vía por la que se circula, prohibición expresa de consumir sustancias que influyan negativamente en la conducción, como las drogas o el alcohol…

Estas medidas no son caprichosas, se han tomado después de analizar millones de accidentes y determinar las causas que los provocaron. Los estudios afirman que la velocidad es responsable en la mayoría de los casos, pero…

¿Cómo saber la velocidad que lleva un vehículo antes del accidente?

1 Números racionales

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los **números racionales** está formado por todos aquellos números que se pueden escribir como una fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y b es distinto de 0.

Al calcular la expresión decimal de un número racional, dividiendo el numerador entre el denominador se obtiene un número entero o un número decimal exacto o periódico. Recíprocamente, cualquier número decimal de este tipo se puede escribir en forma de fracción y, por tanto, es un número racional.

EJEMPLO

1 **Clasifica los números racionales y pon ejemplos.**

$$\text{Números racionales}\begin{cases}\text{Números enteros}\begin{cases}\text{Números naturales: } 1, 2, 3, \ldots\\ \text{El número cero: } 0\\ \text{Enteros negativos: } -1, -2, -3, \ldots\end{cases}\\ \text{Números decimales}\begin{cases}\text{Decimales exactos: } 0{,}1;\ -2{,}33;\ \ldots\\ \text{Decimales periódicos: } 1{,}\widehat{6};\ -3{,}1\widehat{45};\ \ldots\end{cases}\end{cases}$$

Recuerda

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes cuando tienen el mismo valor numérico:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Cada conjunto de fracciones equivalentes representa el mismo número racional.

Cualquier fracción del conjunto es un **representante** del número racional, y la fracción irreducible con denominador positivo es el **representante canónico**.

EJEMPLO

2 **El número racional $\frac{3}{5}$ está formado por la fracción $\frac{3}{5}$ y todas sus fracciones equivalentes. ¿Cuál es su representante canónico?**

$$\frac{3}{5} = \left\{\ldots, \frac{-9}{-15}, \frac{-6}{-10}, \frac{-3}{-5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \ldots\right\}$$

La fracción irreducible con denominador positivo es $\frac{3}{5}$; por tanto, es el representante canónico del conjunto de fracciones.

ACTIVIDADES

1. Calcula el representante canónico de estos números.

a) $\frac{-16}{24}$ b) $\frac{18}{39}$ c) $\frac{-24}{-60}$

2. Escribe dos representantes de los números racionales.

a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{8}{25}$

3. Halla cuántos números racionales distintos hay en esta secuencia.

$\frac{5}{3}$ $\quad -\frac{5}{3}$ $\quad \frac{-5}{3}$ $\quad \frac{5}{-3}$ $\quad \frac{10}{6}$ $\quad 1{,}\widehat{6}$

4. Una fracción que tenga un término negativo y otra que tenga sus dos términos positivos, ¿pueden ser representantes del mismo número racional?

2 Números irracionales

El conjunto $\mathbb{I}$ de los **números irracionales** está formado por los números que no pueden ser expresados como fracción. Su expresión decimal tiene un número infinito de cifras que no se repiten de forma periódica.

Existen infinitos números irracionales, algunos de los cuales son:

- Las raíces no exactas, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{1\,492}$… En general, si n es un número natural que no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{n}$ es irracional.
- Números especialmente importantes:

$$\pi = 3{,}1415926\ldots;\ \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339\ldots;\ e = 2{,}71828182\ldots$$

No olvides

Si a es un número racional y b es un número irracional:

$a + b$ es irracional

$a \cdot b$ es irracional

EJEMPLO

3 Demuestra que $\sqrt{7}$ no es un número racional.

Si $\sqrt{7}$ fuera racional $\rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b}$, con $\frac{a}{b}$ irreducible $\rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b} \rightarrow 7 = \frac{a^2}{b^2}$

Por tanto, a^2 es divisible entre b^2, lo que es imposible, ya que a y b son primos entre sí.

SABER HACER

Escribir números irracionales

Escribe algunos números irracionales indicando cómo lo haces.

PRIMER MÉTODO. Se escribe el número decimal hasta una determinada cifra y se indica cómo continúa.

Número	Regla de formación
0,1234567891011…	Tras la coma se sitúan todos los números naturales
1,2468101214…	Tras la coma se sitúan todos los números pares

SEGUNDO MÉTODO. Si a un número irracional se le suma o multiplica por un número racional, el resultado es un irracional.

Por ejemplo, $\sqrt{5}$ es irracional $\rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1+\sqrt{5}, 3\cdot\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{3}$, …, son irracionales.

ACTIVIDADES

5. Escribe cuatro números irracionales, especificando su regla de formación.

6. Decide si los siguientes números son irracionales.

a) 0,51015202530… b) $\frac{3\pi}{4\pi}$ c) $2-\pi$ d) $\frac{10}{17}$

7. Encuentra, sin hacer operaciones con decimales, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

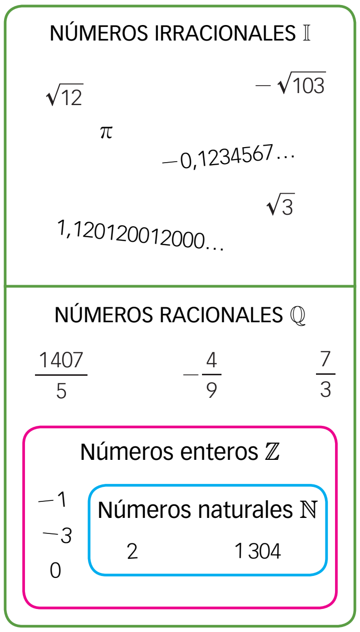
8. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.

a) La raíz de un número irracional es irracional.

b) Un número irracional al cuadrado no es racional.

3 Números reales

NÚMEROS REALES $\mathbb{R}$



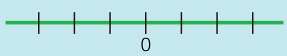
El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales e irracionales, y se representa por $\mathbb{R}$.

3.1. Recta real

La recta numérica en la que se representan todos los números reales se denomina **recta real**.

No olvides

Los números reales *llenan* completamente la recta.



Cada punto de la recta se corresponde con un número real, ya sea racional o irracional.

SABER HACER

Representar en la recta real los números de la forma $\sqrt{n}$

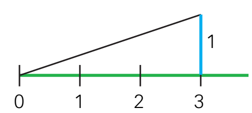
▶ Representa $\sqrt{12}$ en la recta real.

PRIMERO. Se descompone n como una suma de cuadrados perfectos.

$$\sqrt{12} \rightarrow 12 = 3^2 + 3 = 3^2 + 1^2 + 2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

SEGUNDO. Se utilizan los dos primeros cuadrados perfectos para construir los catetos de un triángulo rectángulo sobre la recta real.

Las longitudes de los catetos serán 3 y 1.

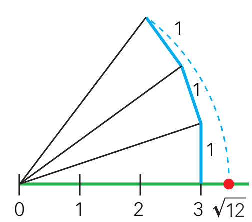


TERCERO. Se utiliza el siguiente cuadrado perfecto para construir un nuevo triángulo sobre la hipotenusa del triángulo anterior.

La longitud es 1.

CUARTO. Se siguen construyendo triángulos de forma análoga hasta hacerlo con todos los cuadrados.

QUINTO. Con centro en 0 y radio la hipotenusa del último triángulo, se traza un arco que corte a la recta real.



ACTIVIDADES

9. Indica el conjunto numérico mínimo al que pertenece cada número.

a) $8{,}0999\ldots$ c) $\sqrt{15}$ e) $2{,}5$
b) $1{,}223334444\ldots$ d) $6{,}\overset{\frown}{12}6$ f) -11

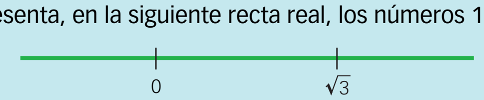
10. Representa las raíces.

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$

11. Coloca, en la recta real, el número:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

12. Representa, en la siguiente recta real, los números 1 y 2.



3.2. Propiedades

Las propiedades que cumplen los números reales son las mismas que cumplen los números racionales.

Propiedades	Suma	Multiplicación
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Elemento neutro	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Elemento opuesto/inverso	$a+(-a)=0$	$a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Distributiva	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

No olvides

- El elemento opuesto y el elemento inverso son únicos para cada número real.
- El número 0 no tiene inverso, es decir, no existe ningún número real que multiplicado por 0 sea igual a 1.

EJEMPLO

4 Aplica la propiedad distributiva a estas expresiones.

a) $-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{35}=-\frac{24}{105}=-\frac{8}{35}$

b) $\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{47}{40}=\frac{329}{80}$

3.3. Relación de orden

Dados dos números reales a y b decimos que:

- a es **menor que** b, y se escribe $a<b$, cuando $b-a$ es positivo.
- a es **mayor que** b, y se escribe $a>b$, cuando $b-a$ es negativo.

La relación de orden entre números reales cumple las siguientes propiedades.

Transitiva

Si $a\le b$ y $b\le c$, se cumple que $a\le c$.

Relación total

Se establece un orden entre todos los números: $a<b$, $a=b$ o $a>b$.

Monótona respecto de la suma

Si $a\le b$, dado un valor de c, se cumple que $a+c\le b+c$.

Respecto del producto

Si $a\le b$ y $c>0$, se cumple que $a\cdot c\le b\cdot c$.

Si $a\le b$ y $c<0$, se cumple que $a\cdot c\ge b\cdot c$.

ACTIVIDADES

13. Aplica la propiedad distributiva y opera.

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)$ b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{2}{7}$

14. Encuentra tres números situados entre estos.

a) $\frac{301}{200}$ y $\frac{302}{200}$ b) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}+\frac{1}{10}$

15. Ordena, de menor a mayor, los siguientes números racionales e irracionales.

$3 \quad \frac{22}{7} \quad \pi \quad \frac{2\,827}{900}$

16. Con ayuda de la propiedad distributiva, calcula sin realizar los cuadrados.

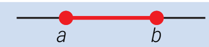
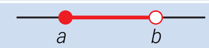
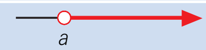
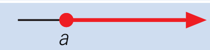
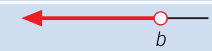
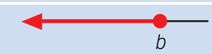
a) 99^2 b) 999^2

4 Intervalos

Un **intervalo** es un conjunto de números reales que se corresponde con los puntos de un segmento o una semirrecta de la recta real.

Cada intervalo viene determinado por sus extremos, siendo dos extremos en el caso de los segmentos y un extremo en el caso de las semirrectas.

Según incluyan o no a los puntos extremos, los intervalos pueden ser **abiertos**, **semiabiertos** o **cerrados**.

Intervalo abierto	(a, b)	$\{x: a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x: a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$(a, b]$	$\{x: a < x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$[a, b)$	$\{x: a \leq x < b\}$	
Semirrecta abierta	$(a, +\infty)$	$\{x: a < x\}$	
Semirrecta cerrada	$[a, +\infty)$	$\{x: a \leq x\}$	
Semirrecta abierta	$(-\infty, b)$	$\{x: x < b\}$	
Semirrecta cerrada	$(-\infty, b]$	$\{x: x \leq b\}$	

Recuerda

Valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|3| = 3 \quad |-3| = 3 \quad |-7| = 7$

EJEMPLO

5 Representa los conjuntos que aparecen a continuación de todas las formas posibles.

a) Números menores que 6

b) $\{x: 2 \leq x < 9\}$

c) $\{x: -5 < x < 8\}$

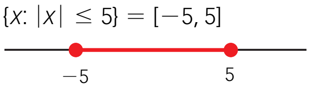
d) $\{x: |x| \leq 5\}$

a) $\{x: x < 6\} = (-\infty, 6)$

b) $\{x: 2 \leq x < 9\} = [2, 9)$

c) $\{x: -5 < x < 8\} = (-5, 8)$

d) $\{x: |x| \leq 5\} = [-5, 5]$



En el último apartado, la condición $\{|x| \leq 5\}$ equivale a que la distancia hasta el número 0 es menor o igual que 5 unidades.

ACTIVIDADES

17. Representa los siguientes conjuntos numéricos de todas las formas que conozcas.

a) Números menores que π.

b) Números mayores que $\sqrt{3}$ y menores o iguales que 7.

c) Números menores o iguales que 2 y mayores que -2.

d) Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos.

e) Números comprendidos entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

18. Escribe, de todas las maneras que conozcas, estos intervalos de la recta real.

a) 

b) 

c) 

d) 

19. Representa el conjunto $\{x: |x - 3| \leq 1\}$ de todas las formas que conozcas.

5 Aproximaciones y errores

5.1. Aproximaciones

A veces es imposible trabajar con ciertos números, por ejemplo: π; $\sqrt{3}$; 2,737… En estos casos usamos valores exactos que estén próximos al número y que simplifiquen los cálculos. Estos valores se llaman aproximaciones.

Existen varios tipos de aproximaciones, siendo las más importantes:

- **Aproximación por defecto o truncamiento.** Consiste en eliminar las cifras a partir del orden considerado.
- **Aproximación por exceso.** Se eliminan las cifras a partir del orden considerado, aumentando en una unidad la última cifra que dejamos.

Redondeo: es la mejor aproximación de entre las dos anteriores.

EJEMPLO

6 Aproxima 3,258; $2,\widehat{21}$ y $\sqrt{7}$ a las centésimas.

	3,258	$2,\widehat{21}$	$\sqrt{7} = 2,6457\ldots$
Redondeo a las centésimas	3,26	2,21	2,65
Truncamiento a las centésimas	3,25	2,21	2,64

Calculadora

Con el modo FIX de la calculadora podemos fijar el número de decimales con el que trabajamos. Por ejemplo, si fijamos 3 decimales, el resultado de hacer: $\sqrt{7} = 2,645751311\ldots$ será:

$\sqrt{\square}$ 7 = 2.646

5.2. Errores

El **error absoluto**, E_a, es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor real y la aproximación.

$$E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximado}}|$$

El **error relativo**, E_r, es el cociente del error absoluto y el valor real.

$$E_r = \left|\frac{E_a}{V_{\text{real}}}\right|$$

EJEMPLO

7 Calcula los errores cometidos al redondear 2,561 a las centésimas.

$$2,561 \xrightarrow{\text{Redondeo}} 2,56 \qquad E_a = |2,561 - 2,56| = 0,001 \qquad E_r = \left|\frac{0,001}{2,561}\right| = 0,00039$$

ACTIVIDADES

20. Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto a las diezmilésimas y a las cienmilésimas.

21. Piensa en una situación en la que dos mediciones tengan los mismos errores absolutos, pero distintos errores relativos.

6 Acotación de errores

Una cota es un valor que limita una cantidad desconocida:

- Una cota de la estatura es 2,8 m porque no existen personas de mayor altura.
- La cota de edad máxima para disfrutar de las ventajas del carné joven es 30 años, ya que a partir de esa edad no se puede obtener dicho carné.

Al redondear un número hasta un orden n cometemos un error absoluto que cumple que:

$$E_{\text{absoluto}} < \frac{1}{2 \cdot 10^n} \rightarrow \textbf{Cota de error absoluto}$$

EJEMPLO

8 **Calcula una cota de error absoluto del redondeo del número π a las centésimas.**

$$\pi = 3{,}14159265\ldots \xrightarrow{\text{Redondeo}} 3{,}14$$

$$E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximado}}| = |\pi - 3{,}14| < \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0{,}005$$

Una cota de error absoluto de esta aproximación es 0,005.

Se puede decir que el error absoluto es menor que media unidad del orden al que hemos aproximado el número.

Aproximación a las décimas $\longrightarrow$ $E_a < 0{,}05$

Aproximación a las centésimas $\rightarrow$ $E_a < 0{,}005$

…

Si ε es una cota de error absoluto, $E_{\text{absoluto}} < \varepsilon$, se cumple que:

$$E_{\text{relativo}} < \frac{\varepsilon}{V_{\text{aproximado}} - \varepsilon} \rightarrow \textbf{Cota de error relativo}$$

EJEMPLO

9 **Halla una cota de error relativo del redondeo del número π a las centésimas.**

$$\pi = 3{,}14159265\ldots \xrightarrow{\text{Redondeo}} 3{,}14 \rightarrow E_a < 0{,}005$$

$$\frac{\varepsilon}{V_{\text{aproximado}} - \varepsilon} = \frac{0{,}005}{3{,}14 - 0{,}005} = 0{,}0016 \rightarrow E_r < 0{,}0016$$

La cota de error relativo en tanto por ciento es del 0,16 %.

ACTIVIDADES

22. Indica dos ejemplos de medida y da sus correspondientes cotas de error.

23. Calcula las cotas de error absoluto y relativo al redondear el número $\sqrt{2}$:

a) A las centésimas. b) A las milésimas.

24. La población de un pueblo, redondeada a las decenas, es de 310 habitantes. ¿Puedes indicar los errores? ¿Sabrías dar las cotas de error cometido?

25. Calcula una cota de error absoluto cuando truncamos un número a las décimas. ¿Y si fuera a las centésimas?

7 Notación científica

Un número en notación científica es de la forma $a \cdot 10^b$, donde $|a|$ es un decimal exacto del intervalo $[1, 10)$ y b es un número entero.

El término a se llama **mantisa** del número y b es el **orden de magnitud**.

La notación científica se utiliza para abreviar cantidades grandes o pequeñas.

SABER HACER

Escribir un número en notación científica

▶ Escribe $-1\,258\,000$ y $0{,}00000432$ en notación científica.

PRIMERO. Si el número tiene su parte entera distinta de cero, el exponente de la potencia de 10 será positivo, y si su parte entera es cero, el exponente será negativo.

$-1\,258\,000 \rightarrow$ Exponente positivo $\qquad 0{,}00000432 \rightarrow$ Exponente negativo

SEGUNDO. Se cuentan las cifras que tiene el número desde la primera cifra distinta de cero hasta llegar a las unidades. La cifra de las unidades no se cuenta. El resultado, salvo en el signo, coincide con el exponente de la potencia de 10.

Unidades

$$-\underbrace{1\,25800}_{6\text{ cifras}}0 \qquad 0{,}\underbrace{000004}_{6\text{ cifras}}32$$

TERCERO. Se escribe el número con una sola cifra entera, distinta de cero, y la correspondiente potencia de 10.

$$-\underbrace{1\,25800}_{6\text{ cifras}}0 = -1{,}258 \cdot 10^6 \qquad 0{,}\underbrace{000004}_{6\text{ cifras}}32 = 4{,}32 \cdot 10^{-6}$$

Calculadora

Para escribir un número en notación científica con la calculadora se utilizan las teclas [×], [$x^{□}$] y [(−)].

Para introducir el número $7{,}352 \cdot 10^9$ tecleamos:

7,352 [×] 10 [$x^{□}$] 9

Y para introducir $8{,}64 \cdot 10^{-3}$ teclearemos:

8,64 [×] 10 [$x^{□}$] [(−)] 9

Operaciones con números en notación científica

- Para sumar y restar, los números deben tener el mismo orden de magnitud.
- Para multiplicar y dividir se multiplican o dividen las mantisas, por un lado, y las potencias de 10, por otro.

Date cuenta

El resultado de algunas sumas o restas puede ser un número que no está escrito en notación científica.

$7{,}06 \cdot 10^{11} + 5{,}2 \cdot 10^{11} =$
$= 12{,}26 \cdot 10^{11}$

$12{,}26 \cdot 10^{11} \rightarrow$ Su parte entera tiene dos cifras.

$12{,}26 \cdot 10^{11} = 1{,}226 \cdot 10^{12}$

EJEMPLO

10 Realiza estas operaciones.

a) $3{,}24 \cdot 10^2 - 1{,}32 \cdot 10^3 + 9{,}2 \cdot 10^{-1} = 0{,}324 \cdot 10^3 - 1{,}32 \cdot 10^3 + 0{,}00092 \cdot 10^3 =$
$= (0{,}324 - 1{,}32 + 0{,}00092) \cdot 10^3 =$
$= -0{,}99508 \cdot 10^3 = -9{,}9508 \cdot 10^2$

b) $(3{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}3 \cdot 10^2) : (1{,}6 \cdot 10^{-2}) = [(3{,}2 \cdot 2{,}3) : 1{,}6] \cdot [(10^{-3} \cdot 10^2) : 10^{-2}] =$
$= 4{,}6 \cdot 10^{(-3+2-2)} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$

ACTIVIDADES

26. Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 0,0000085
b) 5 000 000 000 000
c) 31 940 000 000
d) 0,000000000479

27. Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $(5{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^{-2}) : 8{,}05 \cdot 10^{-4}$
b) $3{,}79 \cdot 10^8 \cdot (7{,}73 \cdot 10^4 - 6{,}54 \cdot 10^{-2})$

8 Radicales

Índice

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Radicando Raíz

Dado un número real a, se llama **raíz n-ésima** de $\boldsymbol{a}$ a todo número real $\boldsymbol{b}$ que verifique que $\boldsymbol{b^n = a}$. Se denota por $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b}$.

Al símbolo $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ se le llama **radical de índice n** de $\boldsymbol{a}$.

La radicación es una operación relacionada con la potenciación.

Potenciación	Radicación
Conocemos la base, b, y el exponente, n, y calculamos la potencia. $b^n = a$	Conocemos la potencia, a, y el exponente, n, y calculamos la base. $\sqrt[n]{a} = b$

8.1. Valor numérico de un radical

Cuando calculamos el valor numérico de un radical, hay que tener en cuenta si el índice es par o impar y, también, el signo del radicando.

Se llama valor numérico del radical $\sqrt[n]{a}$ a todo número real b tal que $b^n = a$.

	Radicando	Índice	N.º de raíces reales
$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	n impar	1 raíz positiva
		n par	2 raíces, una positiva y su opuesta
	$a = 0$	n par o impar	1 raíz $\rightarrow \sqrt[n]{0} = 0$
	$a < 0$	n impar	1 raíz negativa
		n par	Ninguna raíz

Calculadora

La calculadora científica nos permite calcular raíces con las teclas SHIFT y $\sqrt[\square]{\square}$ situando el cursor en el hueco correspondiente para escribir, primero el índice y luego el radicando.

$\sqrt[3]{-4} \rightarrow$ SHIFT $\sqrt[\square]{\square}$ 3 ▶ (−) 4 = -1.587401052

$\sqrt[4]{20} \rightarrow$ SHIFT $\sqrt[\square]{\square}$ 4 ▶ 20 = 2.114742527

EJEMPLO

11 Dadas las siguientes equivalencias, deduce el número de raíces.

a) $\left.\begin{array}{l} 5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5 \\ (-5)^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = -5 \end{array}\right\} \rightarrow$ Decimos que 25 tiene dos raíces cuadradas.

b) $\left.\begin{array}{l} 5^3 = 125 \rightarrow \sqrt[3]{125} = 5 \\ (-5)^3 = -125 \rightarrow \sqrt[3]{125} = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 125 \text{ tiene una raíz cúbica, } 5 \\ \rightarrow -125 \text{ tiene una raíz cúbica, } -5 \end{array}$

ACTIVIDADES

28. Decide si son ciertas las siguientes igualdades. Razona la respuesta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$

c) $\sqrt[3]{1\,000\,000} = \pm 1000$

d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

29. Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-10\,000}$

d) $\sqrt[5]{243}$

8.2. Potencias de exponente fraccionario

Una **potencia de exponente fraccionario** $a^{\frac{m}{n}}$ es un radical de índice n y radicando a^m, es decir, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Dos **radicales** son **equivalentes** cuando, al expresarlos en forma de potencia con exponente fraccionario, sus bases son iguales y las fracciones de sus exponentes son equivalentes.

$$a^{\frac{m}{n}} \text{ es equivalente a } a^{\frac{p}{q}} \text{ si } \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

EJEMPLOS

12 Expresa en forma de potencia con exponente fraccionario.

a) $\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$ **b)** $\sqrt[3]{-5} = (-5)^{\frac{1}{3}}$ **c)** $\sqrt{6^8} = 6^{\frac{8}{2}}$

13 Expresa como potencia los siguientes radicales y halla radicales equivalentes.

a) $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$ $\qquad 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{6}} \rightarrow \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2}$

b) $\sqrt[5]{(-3)^4} = (-3)^{\frac{4}{5}}$ $\qquad (-3)^{\frac{4}{5}} = (-3)^{\frac{8}{10}} \rightarrow \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[10]{(-3)^8}$

Date cuenta

Al calcular radicales equivalentes, el número de raíces puede variar.

$\sqrt[3]{-1}$ y $\sqrt[6]{(-1)^2}$ son equivalentes, pero no tienen las mismas raíces.

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[6]{(-1)^2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

8.3. Simplificación de radicales

Simplificar radicales consiste en extraer de la raíz todos los factores posibles.

SABER HACER

Simplificar radicales

▶ Simplifica todo lo posible los radicales $\sqrt[6]{25}$ y $\sqrt[3]{81}$.

PRIMERO. Se expresa la raíz como potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} \qquad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$$

SEGUNDO. Se calcula la fracción irreducible del exponente. Si es una fracción impropia, se transforma en la suma de un número entero y una fracción propia.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

TERCERO. Se expresa como producto de potencias, si se puede, y se vuelve a transformar en radical.

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \qquad 3^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{3}$$

Recuerda

Una fracción es impropia cuando su denominador es menor que su numerador.

$\frac{16}{3} \rightarrow$ Fracción impropia

Cualquier fracción impropia se puede expresar como la suma de un número entero y una fracción.

$$16 \,\underline{|\, 3} \quad \rightarrow \quad \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$$
$$1 \quad 5$$

ACTIVIDADES

30. Transforma los radicales en potencias, y viceversa.

a) $3^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{1}{6}}$ e) $10^{\frac{2}{7}}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$ d) $7^{\frac{3}{5}}$ f) $\sqrt[4]{5^7}$

31. Indica si son equivalentes los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[4]{36}$ y $\sqrt{6}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$

9 Operaciones con radicales

9.1. Reducir radicales a índice común

Reducir radicales a índice común consiste en encontrar otros radicales equivalentes que tengan el mismo índice.

SABER HACER

Reducir radicales a índice común

▶ Reduce a índice común $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{3}$.

PRIMERO. Se expresan los radicales como potencias de exponente fraccionario.

$$\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}} \qquad \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

SEGUNDO. Se reducen a común denominador los exponentes y se expresan de nuevo como radical.

m.c.m. (2, 3, 5) = 30

$$2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{30}} = \sqrt[30]{2^6} \qquad 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{10}{30}} = \sqrt[30]{5^{10}} \qquad 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{15}{30}} = \sqrt[30]{3^{15}}$$

9.2. Operaciones con radicales

- Para sumar o restar radicales deben tener el mismo índice e idéntico radicando.
- Para multiplicar o dividir radicales deben tener el mismo índice o igual radicando. Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común.
- Para calcular la potencia o la raíz de un radical transformamos los radicales en potencias y operamos con ellas.

No olvides

- $\sqrt[n\cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{n\cdot p}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} = (b+c)\sqrt[n]{a}$
- $b\sqrt[n]{a} - c\sqrt[n]{a} = (b-c)\sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

EJEMPLO

14 Realiza estas operaciones.

a) $5\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2} + 4\underbrace{\sqrt[15]{2^3}}_{\text{Se simplifica el radical}} = 5\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[5]{2} = 6\sqrt[5]{2}$

b) $\left(\sqrt[3]{3^2} : \sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[3]{2^2} = \underbrace{\left(3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{2}}\right)}_{\text{Cociente de potencias de la misma base}}\cdot 2^{\frac{2}{3}} = 3^{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)}\cdot 2^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}$

Se reducen a común denominador las fracciones de los exponentes y se expresa como potencia de un producto.

$$3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{4}{6}} = (3\cdot 2^4)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3\cdot 2^4} = \sqrt[6]{48}$$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{5}}} = \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{2}$

ACTIVIDADES

32. Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5}$

33. Opera y simplifica.

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

10 Racionalización

La **racionalización** consiste en transformar fracciones que tengan radicales en el denominador en otras fracciones equivalentes que no los tengan.

10.1. Fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

Para que desaparezca el radical del denominador en las fracciones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$ multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

Date cuenta

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

SABER HACER

Racionalizar expresiones del tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

▶ Racionaliza la expresión $\frac{12}{\sqrt[5]{2^3}}$.

PRIMERO. Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

$$\frac{12}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{12\sqrt[5]{(2^3)^4}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{(2^3)^4}} = \frac{12\sqrt[5]{2^{12}}}{2^3}$$

SEGUNDO. Se simplifica la expresión resultante.

$$\frac{12\sqrt[5]{2^{12}}}{2^3} = \frac{12 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{2^3} = 6\sqrt[5]{2^2}$$

10.2. Fracciones con un binomio en el denominador

Sus denominadores tienen sumandos que contienen raíces cuadradas.

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} \qquad \frac{a}{b-\sqrt{c}} \qquad \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$

Para eliminarlas se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

SABER HACER

Racionalizar binomios con raíces cuadradas

▶ Racionaliza y simplifica $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

PRIMERO. Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2-5}$$

SEGUNDO. Se simplifica, si es posible, la expresión resultante.

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2-5} = -(\sqrt{2}+\sqrt{5})$$

Recuerda

El conjugado de $(a+b)$ es $(a-b)$ y, recíprocamente, el conjugado de $(a-b)$ es $(a+b)$.

Por ejemplo:

$$3+\sqrt{4} \xrightarrow{\text{Conjugado}} 3-\sqrt{4}$$

$$2\sqrt{3}-\sqrt[4]{3} \xrightarrow{\text{Conjugado}} 2\sqrt{3}+\sqrt[4]{3}$$

ACTIVIDADES

34. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$ c) $\frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

35. Racionaliza y opera.

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}}$

11 Logaritmos

Date cuenta

Se puede considerar que el logaritmo es la operación inversa de la exponencial.

$$c \underset{\log_a b}{\overset{c^a}{\rightleftarrows}} b$$

Dados dos números reales positivos a y b ($a \neq 1$), el **logaritmo en base *a* de *b*** es el exponente al que hay que elevar a para que el resultado sea b.

$$\log_a b = c \;\rightarrow\; a^c = b$$

Cuando los logaritmos son en base 10 se llaman **logaritmos decimales**, y no se escribe la base.

$\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$

$\log 1\,000 = 3$ porque $10^3 = 1\,000$

$\log 0{,}1 = -1$ porque $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

$\log 0{,}01 = -2$ porque $10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

Si la base es el número $e = 2{,}7182\ldots$, se llaman **logaritmos neperianos** o logaritmos naturales, y se escribe $\ln b$.

Calculadora

La calculadora científica nos permite obtener logaritmos decimales con la tecla log y logaritmos neperianos o naturales con la tecla ln.

EJEMPLO

15 Calcula los logaritmos que aparecen a continuación.

a) $\log_2 32$ **b)** $\log 0{,}0001$ **c)** $\ln e^6$ **d)** $\log_5 0{,}00032$

a) Si $\log_2 32 = x \rightarrow 2^x = 32$

Se expresa 32 como potencia de 2.

$32 = 2^5 \rightarrow 2^x = 2^5 \rightarrow x = 5$

$\log_2 32 = 5$

b) Si $\log 0{,}0001 = x \rightarrow 10^x = 0{,}0001$

Se expresa 0,0001 como potencia de 10.

$$0{,}0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \rightarrow 10^x = 10^{-4} \rightarrow x = -4$$

$\log 0{,}0001 = -4$

c) Si $\ln e^6 = x \rightarrow e^x = e^6 \rightarrow x = 6$

$\ln e^6 = 6$

d) Si $\log_5 0{,}00032 = x \rightarrow 5^x = 0{,}00032$

Se expresa 0,00032 como potencia de 5.

$$0{,}00032 = \frac{32}{100\,000} = \frac{32}{10^5} = \frac{2^5}{10^5} = \frac{2^5}{2^5 \cdot 5^5} = 5^{-5}$$

$\log_5 0{,}00032 = -5$

ACTIVIDADES

36. Calcula, mediante la definición, estos logaritmos.

a) $\log_2 8$
b) $\log_3 81$
c) $\log 1\,000$
d) $\log 0{,}0001$
e) $\ln e^{33}$
f) $\ln e^{-4}$
g) $\log_4 16$
h) $\log_4 0{,}25$

37. Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 243$
b) $\log_9 81$
c) $\log 1\,000\,000$
d) $\log 0{,}00001$
e) $\ln e^2$
f) $\ln e^{-14}$
g) $\log_7 343$
h) $\log_4 0{,}0625$

Propiedades de los logaritmos

- El logaritmo de 1 es siempre 0, y el logaritmo de la base es 1.

  $\log_a 1 = 0 \qquad\qquad \log_a a = 1$

- El **logaritmo de un producto** es la suma de los logaritmos de los factores.

  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

- El **logaritmo de un cociente** es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

  $$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

- El **logaritmo de una potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

- **Cambio de base** en los logaritmos.

  $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

EJEMPLOS

16 Resuelve estas operaciones con logaritmos.

a) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6 \cdot 1 = 6$

b) $\log 2{,}5 + \log 40 = \log (2{,}5 \cdot 40) = \log 100 = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2$

c) $\log_9 243 = \log_9 (9^2 \cdot 3) = \log_9 9^2 + \log_9 3 = 2 \cdot \log_9 9 + \log_9 3 =$

$$= 2 + \log_9 \sqrt{9} = 2 + \log_9 9^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2}\log_9 9 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

17 Halla, con ayuda de la calculadora, los logaritmos que aparecen a continuación.

a) $\log 645$ **b)** $\log e^2$ **c)** $\log_2 10$ **d)** $\ln 10$

a) log 645 = 2,8095…

b) log SHIFT $e^{\blacksquare}$ 2 = 0,8685…

c) $\log_{\blacksquare}\blacksquare$ 2 ▶ 10 = 3,3219…

d) ln 10 = 2,3025…

18 Expresa $\log_3 100$ con logaritmos decimales.

$$\log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} = \frac{2}{\log 3}$$

ACTIVIDADES

38. Calcula los logaritmos y deja indicado el resultado.

a) $\log_4 32$
b) $\log_2 32$
c) $\log_3 100$
d) $\log_5 32$
e) $\log_{32} 4$
f) $\log_2 304$

39. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$; $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log 7 = 0{,}8451$, determina los logaritmos decimales de los 10 primeros números naturales. Con estos datos, ¿sabrías calcular $\log 3{,}5$? ¿Y $\log 1{,}5$?

40. Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ y $\log_5 2$. Comprueba que su producto es 1.

41. Obtén el valor de x en las siguientes igualdades.

a) $\log_x 256 = -8$
b) $\log_3 x = \dfrac{2}{3}$
c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$
d) $\log_x 3 = 2$

42. Calcula cuánto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.

SABER HACER

Números racionales

Operar con números decimales periódicos

Calcula las siguientes sumas de números decimales periódicos.

a) $2,\widehat{4}+6,\widehat{5}$ **b)** $10,\widehat{3}-7,2\widehat{5}$

PRIMERO. Se expresan los números en forma de fracción.

a) $2,\widehat{4}=\dfrac{24-2}{9}=\dfrac{22}{9}$ $6,\widehat{5}=\dfrac{65-6}{9}=\dfrac{59}{9}$

b) $10,\widehat{3}=\dfrac{103-10}{9}=\dfrac{93}{9}$ $7,2\widehat{5}=\dfrac{725-72}{90}=\dfrac{653}{90}$

SEGUNDO. Se realizan las operaciones indicadas.

a) $2,\widehat{4}+6,\widehat{5}=\dfrac{22}{9}+\dfrac{59}{9}=\dfrac{81}{9}=9$

b) $10,\widehat{3}-7,2\widehat{5}=\dfrac{93}{9}-\dfrac{653}{90}=\dfrac{930-653}{90}=\dfrac{277}{90}=3,0\widehat{7}$

PRACTICA

43. Suma y resta.

a) $2,\widehat{7}+4,\widehat{3}$ c) $6,\widehat{13}+5,\widehat{2}$ e) $6,\widehat{34}+4,2\widehat{13}$

b) $20,2\widehat{1}-7,\widehat{5}$ d) $5,\widehat{4}+7,\widehat{6}$ f) $1,\widehat{23}-1,0\widehat{12}$

44. Multiplica y divide.

a) $1,2\cdot 2,\widehat{1}$ c) $6,3\widehat{7}\cdot 8,\widehat{4}$

b) $1,2:2,\widehat{1}$ d) $6,3\widehat{7}:8,\widehat{4}$

Números racionales

Realizar operaciones combinadas con potencias

Realiza esta operación.

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{11}{4}-2\right)^{-2}$$

PRIMERO. Se comienza con las operaciones que están dentro de los paréntesis.

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{11}{4}-2\right)^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

SEGUNDO. Se continúa operando con las potencias.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=16\cdot(-3)-\frac{16}{9}$$

TERCERO. Se efectúan las operaciones con las fracciones; primero se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen y, después, las sumas y restas de izquierda a derecha.

$$16\cdot(-3)-\frac{16}{9}=-48-\frac{16}{9}=\frac{-432-16}{9}=\frac{-448}{9}$$

PRACTICA

45. Opera.

a) $\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}$

b) $\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{4}{5}\right)^{2}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

Números reales

Usar la propiedad distributiva para sacar factor común

Extrae factor común de esta expresión.

$$\frac{15}{64}-\frac{45}{56}+\frac{135}{88}$$

PRIMERO. Se factorizan por un lado los numeradores, y por otro los denominadores.

$15=3\cdot 5$ $45=3^2\cdot 5$ $135=3^3\cdot 5$

$64=2^6$ $56=2^3\cdot 7$ $88=2^3\cdot 11$

SEGUNDO. Se seleccionan, en el numerador y el denominador, los factores que se repiten en todos los sumandos elevados al menor exponente con que aparecen.

Numerador: $3\cdot 5$ Denominador: 2^3

TERCERO. Se extrae como factor común la fracción cuyos numerador y denominador son los que se acaban de calcular.

$$\frac{15}{64}-\frac{45}{56}+\frac{135}{88}=\frac{3\cdot 5}{2^6}-\frac{3^2\cdot 5}{2^3\cdot 7}+\frac{3^3\cdot 5}{2^3\cdot 11}=$$

$$=\frac{3\cdot 5}{2^3}\left(\frac{1}{2^3}-\frac{3}{7}+\frac{3^2}{11}\right)=\frac{15}{8}\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{7}+\frac{9}{11}\right)$$

PRACTICA

46. Factoriza.

a) $\dfrac{6}{35}-\dfrac{30}{105}+\dfrac{54}{245}$ b) $\dfrac{9}{4}+\dfrac{45}{32}+\dfrac{81}{100}$

Intervalos

Efectuar la unión de dos intervalos

Calcula las siguientes uniones de intervalos.

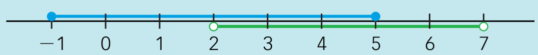
a) $[-1, 5] \cup (2, 7)$

b) $[-1, 2] \cup (5, 7)$

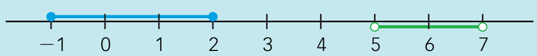
c) $[-1, 7] \cup (2, 5)$

PRIMERO. Se dibujan en la misma recta real los dos intervalos.

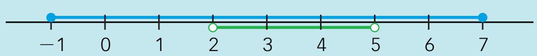
a) $[-1, 5]$ y $(2, 7)$



b) $[-1, 2]$ y $(5, 7)$

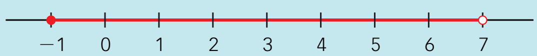


c) $[-1, 7]$ y $(2, 5)$

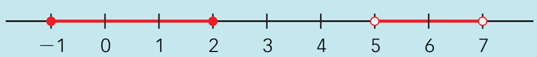


SEGUNDO. Observando los intervalos dibujados, se expresa gráficamente la unión.

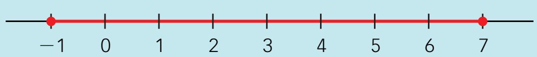
a) $[-1, 5] \cup (2, 7)$



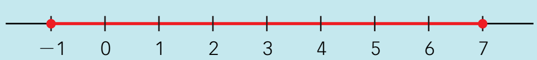
b) $[-1, 2] \cup (5, 7)$



c) $[-1, 7] \cup (2, 5)$

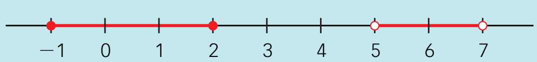


TERCERO. Se escribe el resultado en forma algebraica o numérica, fijándose si los extremos pertenecen a la unión de los intervalos.

a) 

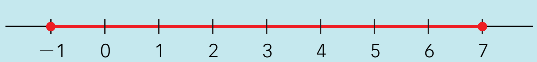
Se puede escribir como un intervalo ya que hay una sola línea resaltada, el extremo inferior pertenece al intervalo y el extremo superior no.

$[-1, 5] \cup (2, 7) = [-1, 7)$

b) 

No se puede escribir como un intervalo y, por tanto, se deja indicado.

$[-1, 2] \cup (5, 7)$

c) 

Se puede escribir como un intervalo y ambos extremos pertenecen al intervalo.

$[-1, 7] \cup (2, 5) = [-1, 7]$

PRACTICA

47. Halla la unión de estos intervalos.

a) $(-4, -2] \cup (-3, 0)$ b) $(2, 8] \cup [-2, 0)$

Intervalos

Efectuar la intersección de dos intervalos

Calcula las siguientes intersecciones de intervalos.

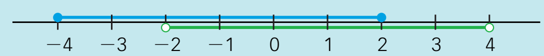
a) $[-4, 2] \cap (-2, 4)$

b) $[1, 5] \cap (7, 9)$

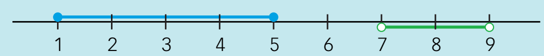
c) $[-1, 3] \cap (-3, 5)$

PRIMERO. Se dibujan en la misma recta real los dos intervalos.

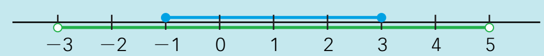
a) $[-4, 2]$ y $(-2, 4)$



b) $[1, 5]$ y $(7, 9)$

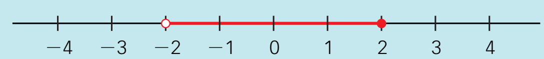


c) $[-1, 3]$ y $(-3, 5)$

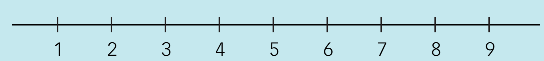


SEGUNDO. Observando los intervalos dibujados, se expresa gráficamente la intersección.

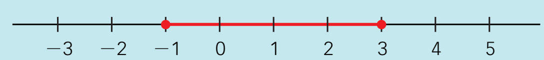
a) $[-4, 2] \cap (-2, 4)$



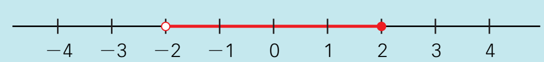
b) $[1, 5] \cap (7, 9)$



c) $[-1, 3] \cap (-3, 5)$

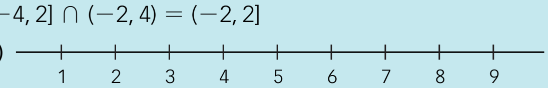


TERCERO. Se escribe el resultado en forma algebraica o numérica, fijándose si los extremos pertenecen a la intersección de los intervalos.

a) 

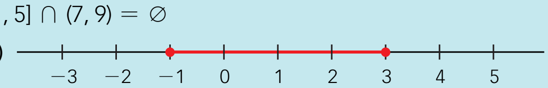
El extremo inferior no pertenece al intervalo y el extremo superior sí.

$[-4, 2] \cap (-2, 4) = (-2, 2]$

b) 

La intersección no contiene ningún punto de la recta real, luego su intersección es vacía.

$[1, 5] \cap (7, 9) = \varnothing$

c) 

Se puede escribir como un intervalo y ambos extremos pertenecen al intervalo.

$[-1, 3] \cap (-3, 5) = [-1, 3]$

PRACTICA

48. Halla la intersección de estos intervalos.

a) $(-4, -2] \cap (-3, 0)$ b) $(2, 8] \cap [-2, 0)$

SABER HACER

Intervalos

Calcular intervalos encajados que contengan a un número irracional

Escribe los cinco primeros intervalos encajados, cuyos extremos son las aproximaciones por defecto y por exceso, donde se halla $\sqrt{20}$, e indica qué error cometes en cada uno.

PRIMERO. Se halla, con la calculadora, la expresión decimal del número. $\sqrt{20} = 4{,}4721359\ldots$

SEGUNDO. Se calculan los extremos de los intervalos comenzando por las unidades, es decir, sus amplitudes serán de una unidad, una décima, una centésima, una milésima y una diezmilésima, respectivamente.

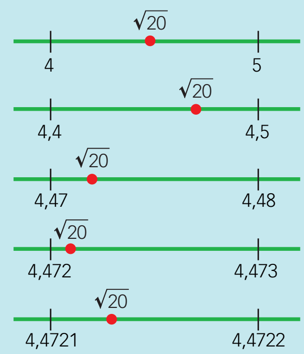
$4 < \sqrt{20} < 5 \longrightarrow (4,\ 5)$

$4{,}4 < \sqrt{20} < 4{,}5 \longrightarrow (4{,}4;\ 4{,}5)$

$4{,}47 < \sqrt{20} < 4{,}48 \longrightarrow (4{,}47;\ 4{,}48)$

$4{,}472 < \sqrt{20} < 4{,}473 \longrightarrow (4{,}472;\ 4{,}473)$

$4{,}4721 < \sqrt{20} < 4{,}4722 \rightarrow (4{,}4721;\ 4{,}4722)$



TERCERO. El error máximo, tomando como aproximación a un punto del intervalo, es menor que su amplitud.

$(4,\ 5) \longrightarrow$ Error $< 5 - 4 = 1$

$(4{,}4;\ 4{,}5) \longrightarrow$ Error $< 4{,}5 - 4{,}4 = 0{,}1$

$(4{,}47;\ 4{,}48) \longrightarrow$ Error $< 4{,}48 - 4{,}47 = 0{,}01$

$(4{,}472;\ 4{,}473) \longrightarrow$ Error $< 4{,}473 - 4{,}472 = 0{,}001$

$(4{,}4721;\ 4{,}4722) \rightarrow$ Error $< 4{,}4722 - 4{,}4721 = 0{,}0001$

No se está calculando el error al tomar como aproximación cualquiera de los extremos, sino la cota de error cometido.

La cota de error cometido es del orden de la aproximación, es decir:

- Si los extremos del intervalo son aproximaciones a las décimas, la cota de error es una décima.
- Si son aproximaciones a las centésimas, la cota es una centésima, y así sucesivamente.

PRACTICA

49. Escribe los cinco primeros intervalos encajados, y da una cota del error cometido, de los números $\sqrt{22}$, π y Φ.

Notación científica

Sumar y restar números en notación científica

Calcula $9{,}85 \cdot 10^2 - 1{,}91 \cdot 10^3 + 4{,}2 \cdot 10^{-1}$.

PRIMERO. Se igualan las órdenes de magnitud. Para ello se elige el mayor de los exponentes y se multiplica o divide por potencias de 10 el resto de los sumandos.

$9{,}85 \cdot 10^2 = 0{,}985 \cdot 10^3$ $\quad$ $1{,}91 \cdot 10^3 = 1{,}91 \cdot 10^3$ $\quad$ $4{,}2 \cdot 10^{-1} = 0{,}00042 \cdot 10^3$

$9{,}85 \cdot 10^2 - 1{,}91 \cdot 10^3 + 4{,}2 \cdot 10^{-1} = 0{,}985 \cdot 10^3 - 1{,}91 \cdot 10^3 + 0{,}00042 \cdot 10^3$

SEGUNDO. Se suman o restan las mantisas y se mantiene el mismo orden de magnitud.

$(0{,}985 - 1{,}91 + 0{,}00042) \cdot 10^3 = -0{,}92458 \cdot 10^3$

TERCERO. Se transforma el resultado en notación científica.

$-0{,}92458 \cdot 10^3 = -9{,}2458 \cdot 10^2$

PRACTICA

50. Opera en notación científica. a) $6{,}4 \cdot 10^{-6} - 5{,}1 \cdot 10^{-4} + 9{,}3 \cdot 10^{-2}$ $\quad$ b) $5{,}1 \cdot 10^6 - 5{,}2 \cdot 10^4 + 5{,}3 \cdot 10^2$

Radicales

Escribir ciertas expresiones mediante un solo radical

Opera con estas expresiones hasta convertirlas en un solo radical.

a) $2^{-\frac{5}{3}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$

PRIMERO. Se escribe la expresión como una potencia de exponente fraccionario, con el exponente de signo positivo.

a) $2^{-\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{2^{\frac{5}{3}}}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{6}}$

SEGUNDO. Se expresa la potencia de exponente fraccionario como un radical.

a) $\dfrac{1}{2^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2^2} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$

b) $7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7}$

PRACTICA

51. Convierte las siguientes expresiones en un solo radical.

a) $5^{-\frac{2}{3}}$ c) $(-5)^{\frac{2}{3}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{23}}$

b) $-5^{\frac{2}{3}}$ d) $(-5)^{-\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

Radicales

Introducir factores en un radical

Introduce dentro del signo radical todos los factores de estas expresiones.

a) $3ab\sqrt{2a}$ **b)** $2b\sqrt[3]{a^2b}$ **c)** $2a\sqrt[5]{5ab^3}$

PRIMERO. Se introduce en la raíz cada factor que está fuera, con el índice de la raíz como exponente.

a) $3ab\sqrt{2a} = \sqrt{3^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot 2\cdot a}$

b) $2b\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{2^3\cdot b^3\cdot a^2\cdot b}$

c) $2a\sqrt[5]{5ab^3} = \sqrt[5]{2^5\cdot a^5\cdot 5\cdot a\cdot b^3}$

SEGUNDO. Se simplifica la expresión resultante en el caso de que sea posible.

a) $\sqrt{3^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot 2\cdot a} = \sqrt{18a^3b^2}$

b) $\sqrt[3]{2^3\cdot b^3\cdot a^2\cdot b} = \sqrt[3]{8a^2b^4}$

c) $\sqrt[5]{2^5\cdot a^5\cdot 5\cdot a\cdot b^3} = \sqrt[5]{160a^6b^3}$

PRACTICA

52. Introduce los factores de las siguientes expresiones dentro del signo radical.

a) $3x^2\sqrt[3]{3y}$ c) $2ab^2c\sqrt[4]{4}$

b) $8b\sqrt{8a^3b}$ d) $(2a-b)\sqrt{b}$

Racionalización

Racionalizar fracciones con un producto de radicales en el denominador

Racionaliza esta expresión.

$$\frac{3}{\sqrt[4]{3}\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)}$$

PRIMERO. Se multiplican el numerador y el denominador por las expresiones necesarias para racionalizar cada uno de los factores con radicales que tenga el denominador.

$$\frac{3}{\sqrt[4]{3}\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)} = \frac{3\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\left(3+\sqrt{8}\right)}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)\cdot\left(3+\sqrt{8}\right)} = \frac{3\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\left(3+\sqrt{8}\right)}{3\cdot(9-8)} = \frac{\cancel{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\left(3+\sqrt{8}\right)}{\cancel{3}\cdot(9-8)} = 3\cdot\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt{8}$$

SEGUNDO. Se simplifica, si es posible, y se resuelven las operaciones.

$$3\cdot\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt{8} = \sqrt[4]{3^7}+\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[4]{8^2} = \sqrt[4]{3^7}+\sqrt[4]{3^3\cdot 8^2} = \sqrt[4]{2\,187}+\sqrt[4]{1\,728}$$

PRACTICA

53. Racionaliza estas expresiones.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5}}$ b) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}$

Números racionales e irracionales

54. Clasifica las fracciones en reducibles e irreducibles.

a) $\frac{-5}{12}$ c) $\frac{15}{18}$ e) $-\frac{15}{28}$

b) $\frac{9}{6}$ d) $\frac{3}{8}$ f) $\frac{104}{-206}$

55. Calcula la fracción irreducible de:

a) $\frac{5}{200}$ c) $\frac{26}{130}$ e) $\frac{12}{400}$ g) $\frac{88}{176}$

b) $\frac{-1080}{432}$ d) $\frac{-702}{1053}$ f) $\frac{72}{243}$ h) $\frac{104}{216}$

56. Halla x para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{3}{5}=\frac{6}{x}$ c) $\frac{x}{-3}=\frac{4}{6}$

b) $\frac{-5}{2}=\frac{x}{8}$ d) $\frac{4}{x}=-\frac{1}{3}$

57. Encuentra los valores de x para que sea irreducible:

a) La fracción propia $\frac{x}{18}$. b) La fracción impropia $\frac{12}{x}$.

58. Haz estas operaciones con fracciones.

a) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^{2}$ b) $\left(\frac{4}{3}:\frac{1}{6}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)^{2}$

59. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

b) $\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{5}\right)^{-1}:\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$

60. Expresa los siguientes números en forma decimal.

a) $\frac{22}{13}$ b) $\frac{43}{1000}$ c) $\frac{12}{1100}$ d) $\frac{42}{5}$

61. Indica de qué tipo son estos números decimales.

a) 2,331 c) 6,2727… e) 4

b) 4,1234… d) 0,03131… f) $-32{,}207$

62. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) 0,2 d) 8,0002 g) 0,01

b) $3{,}\overset{\frown}{5}$ e) $42{,}\overset{\frown}{78}$ h) $5{,}\overset{\frown}{902}$

c) 2,37 f) $10{,}5\overset{\frown}{23}$ i) $0{,}01\overset{\frown}{57}$

63. Efectúa, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1{,}\overset{\frown}{3}+3{,}4$ c) $6{,}3\overset{\frown}{4}+2{,}\overset{\frown}{5}$

b) $10{,}2\overset{\frown}{5}-5{,}\overset{\frown}{7}$ d) $4{,}32-7{,}0\overset{\frown}{2}$

64. Realiza las siguientes operaciones.

a) $1{,}25\cdot 2{,}\overset{\frown}{5}$ c) $3{,}7\overset{\frown}{6}\cdot 4{,}\overset{\frown}{8}$

b) $0{,}0\overset{\frown}{3}:2{,}9\overset{\frown}{2}$ d) $1{,}25:2{,}2\overset{\frown}{5}$

65. Utilizando las fracciones generatrices, comprueba si son verdaderas o falsas las igualdades.

a) $1{,}\overset{\frown}{9}=2$ c) $1{,}8\overset{\frown}{9}+0{,}1\overset{\frown}{1}=2$

b) $1{,}\overset{\frown}{3}:3=0{,}\overset{\frown}{4}$ d) $0{,}\overset{\frown}{3}+0{,}\overset{\frown}{6}=1$

66. Ordena estos números decimales de menor a mayor.

a) $2{,}9\overset{\frown}{95}$ $2{,}\overset{\frown}{9}$ $2{,}\overset{\frown}{95}$ $2{,}9\overset{\frown}{59}$ $2{,}9\overset{\frown}{5}$

b) 4,75 $4{,}\overset{\frown}{75}$ $4{,}7\overset{\frown}{5}$ 4,775 4,757 $4{,}7\overset{\frown}{57}$

67. Da un número racional y otro irracional comprendidos entre:

a) 3,4 y $3{,}400\overset{\frown}{23}$ c) 1 y 2 e) $-2{,}6\overset{\frown}{8}$ y $-2{,}\overset{\frown}{68}$

b) $2{,}5\overset{\frown}{2}$ y $2{,}\overset{\frown}{52}$ d) 5,6 y $5{,}\overset{\frown}{68}$ f) 0,2 y 0,25

68. Encuentra, sin hacer operaciones, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

69. Demuestra que $2\cdot\sqrt{5}$ es un número irracional.

70. Distingue entre números racionales e irracionales.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{15}$ e) $\sqrt{16}$ f) $\sqrt{20}$

71. Señala los números que son irracionales.

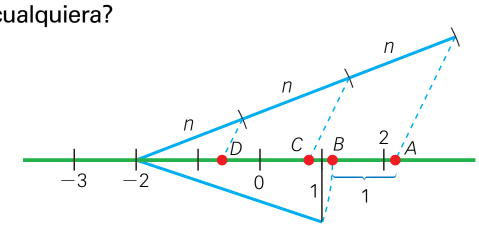
a) $2+\sqrt{3}$ c) $\sqrt{12}-2$ e) $1-\sqrt{16}$

b) $2\cdot\sqrt{9}$ d) $\sqrt{16}+\sqrt{2}$ f) $5\sqrt{19}$

SABER HACER

Reconocer números representados en la recta real

▶ **¿Qué números representan A, B, C y D si n es un segmento cualquiera?**



PRIMERO. Si el punto viene determinado por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, se miden sus catetos y se aplica el teorema de Pitágoras.

$$1^2+3^2=h^2 \rightarrow h=\sqrt{10}$$

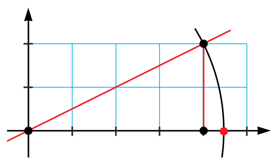
$$B=-2+\sqrt{10} \rightarrow A=B+1=-1+\sqrt{10}$$

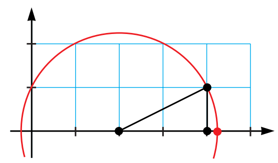
SEGUNDO. Si el punto viene determinado por rectas paralelas que dividen a un segmento en partes iguales, los segmentos que se forman sobre la recta real también son iguales.

Los segmentos $\overline{-2D}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CA}$ son iguales (teorema de Tales). Estos segmentos dividen en tres partes iguales la distancia entre -2 y $A=1+\sqrt{10}$.

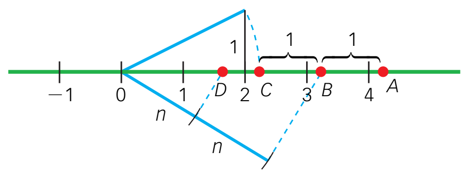
$$D=-2+\frac{1+\sqrt{10}}{3} \qquad C=-2+2\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

72. ¿Qué números están representados en cada construcción?

a) 

b) 

73. ¿Qué números representan sobre esta recta numérica los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, donde *n* es un segmento cualquiera?



74. Representa los siguientes números en la recta real.

a) $\sqrt{10}$ c) $1-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $-\sqrt{6}$ d) $\sqrt{3}-1$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

75. Representa los siguientes números en la recta real.

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{18}}{5}$

76. Ordena y representa los siguientes números en la recta real.

a) 2,3 b) $\sqrt{5}$ c) $\dfrac{9}{4}$

77. Opera y clasifica el tipo de número real.

a) $\sqrt{2,\hat{7}}$ b) $\sqrt{4,\hat{9}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1,\hat{3}}{3}}$

Intervalos

78. Expresa estos intervalos de todas las formas posibles.

a) 

c) 

b) 

d) 

79. Describe y representa los siguientes intervalos.

a) (0, 10) d) [2, 5] g) $(-\infty, 6]$

b) (3, 7] e) [5, 10) h) $(100, +\infty)$

c) $(-\infty, -2)$ f) $[-4, +\infty)$ i) $\left(-7, \sqrt{2}\right)$

80. Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

a) $1 < x < 3$ c) $5 \le x < 9$

b) $6 < x \le 7$ d) $10 \le x \le 12$

81. Escribe el intervalo que corresponde a lo siguiente.

a) $x \le -2$ c) $x > -3$ e) $x < -9$

b) $x < 5$ d) $x \ge 7$ f) $x \ge -6$

82. Calcula las siguientes uniones de intervalos.

a) $(3, 16) \cup (-2, 5)$ c) $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{3}\right] \cup \left[-\dfrac{15}{2}, \dfrac{9}{5}\right]$

b) $[-2, 2) \cup [-11, 0]$ d) $\left[-\sqrt{7}, \sqrt{5}\right] \cup \left[-\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$

83. Halla las intersecciones de estos intervalos.

a) $(-1, 10) \cap (-3, 8)$

b) $\left[-\dfrac{4}{7}, 5\right) \cap \left[-\dfrac{5}{8}, 0\right]$

c) $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{7}{3}\right] \cap \left[-\dfrac{15}{4}, \dfrac{9}{5}\right]$

d) $\left[-\sqrt{7}, \sqrt{5}\right] \cap \left[-\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$

84. Dados los intervalos siguientes, calcula.

$A = [-4, -1]$ $B = [-3, 2)$ $C = (-2, 4)$

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

85. Dados los intervalos siguientes, calcula.

$A = (-\infty, 1]$ $B = [0, 5)$ $C = [-1, 3]$

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

86. Expresa los siguientes intervalos como intersección de dos semirrectas.

a) $\left(-1, \dfrac{13}{2}\right]$ e) $\left[-3, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

b) $\left[5, 5\sqrt{3}\right]$ f) $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{2}, \sqrt{90}\right)$

c) $\left\{x: 6 < x \le \sqrt{40}\right\}$ g) $\left\{x: -\dfrac{7}{2} \le x < -\sqrt{3}\right\}$

d) $\left\{x: -\dfrac{51}{4} \le x \le 3\right\}$ h) $\left\{x: -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\right\}$

87. Escribe en forma de intervalo y exprésalo después como intersección de dos semirrectas.

a) La temperatura prevista para mañana variará entre −1 °C de mínima y 13 °C de máxima.

b) Este jugador de fútbol tiene menos de 27 años.

c) El agua se mantiene en estado líquido entre 0 y 100 °C.

d) A partir de los 18 años ya se puede votar.

e) Mi presupuesto máximo para comprar un coche es de 11 000 €.

Aproximación y errores

88. Opera y redondea el resultado a las décimas.

a) $43{,}295 + 4{,}57 - 7{,}367$
b) $5{,}32 + 4{,}05 \cdot 7{,}361$
c) $3{,}56 \cdot (7{,}4009 - 3{,}48)$
d) $7{,}37 - 5{,}3519 : 2{,}1$

89. A lo largo de la Historia se han utilizado diferentes aproximaciones del número π (cuyo valor es 3,14159265…).

- En la Biblia, el valor de π es 3.
- En el antiguo Egipto se estimaba dicho valor en $\frac{256}{81}$, fracción que resulta de suponer que el área de un círculo coincide con la de un cuadrado que tenga como lado $\frac{8}{9}$ de la medida de su diámetro.
- En Mesopotamia, el valor de π era $3 \cdot \frac{1}{8} = 3{,}125$.
- En la antigua China, $\frac{355}{113}$.
- Y, finalmente, en los cálculos prácticos se usa 3,14.

Halla los errores absoluto y relativo de cada aproximación, tomando como valor exacto de $\pi = 3{,}14159265$.

90. Halla la aproximación por redondeo hasta las diezmilésimas para cada caso.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7}$
c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8}$

91. Calcula el error absoluto y el relativo al truncar 5,73691 a la centésima.

92. Obtén el error absoluto y relativo al redondear los siguientes números.

a) $\frac{3}{11}$ a la diezmilésima.
b) 4,3964 a la centésima.
c) $\frac{29}{4}$ a la décima.

93. Aproxima el número $\frac{1}{7}$ para que el error sea menor que una centésima.

94. Aproxima el número 12,3456 de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.

95. ¿Para qué número sería 5 432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es la respuesta única? ¿Cuántas respuestas hay?

96. Halla una aproximación a los siguientes números.

a) π con una cota de error inferior a una milésima.
b) $\sqrt{2}$ con una cota de error inferior a media centésima.
c) $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ con una cota de error menor que 0,0001.
d) $\frac{22}{7}$ con una cota de error inferior a 0,00001.

Notación científica

97. Indica cuáles de estos números están escritos en notación científica.

a) $4{,}678$
b) $0{,}45 \cdot 10^5$
c) $3{,}001 \cdot 10^{17}$
d) $9{,}34 \cdot 2^{10}$
e) $4{,}62 \cdot 10^{-6}$
f) $34{,}709 \cdot 10^5$

98. Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su mantisa y su orden de magnitud.

a) 15 000 000 000
b) 0,00000051
c) 31 940 000
d) 0,0000000009
e) 4 598 000 000
f) 0,0967254
g) 329 000 000
h) 111 000

99. Realiza estas operaciones con números en notación científica.

a) $1{,}32 \cdot 10^4 + 2{,}57 \cdot 10^4$
b) $8{,}75 \cdot 10^2 + 9{,}46 \cdot 10^3$
c) $3{,}62 \cdot 10^4 + 5{,}85 \cdot 10^{-3}$
d) $2{,}3 \cdot 10^2 + 3{,}5 \cdot 10^{-1} + 4{,}75 \cdot 10^{-2}$
e) $3{,}46 \cdot 10^{-2} + 5{,}9 \cdot 10^4 + 3{,}83 \cdot 10^2$

100. Halla el resultado de estas operaciones.

a) $9{,}5 \cdot 10^4 - 3{,}72 \cdot 10^4$
b) $8{,}6 \cdot 10^3 - 5{,}45 \cdot 10^2$
c) $7{,}9 \cdot 10^{-4} - 1{,}3 \cdot 10^{-6}$
d) $4{,}6 \cdot 10^6 + 5{,}3 \cdot 10^4 - 3{,}9 \cdot 10^2$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

101. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3}$
b) $8{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{14}$
c) $(8{,}3 \cdot 10^6) : (5{,}37 \cdot 10^2)$
d) $(9{,}5 \cdot 10^{-6}) : (3{,}2 \cdot 10^3)$

102. Simplifica el resultado de estas operaciones.

a) $\dfrac{6{,}147 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^3}{7{,}9 \cdot 10^8 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-5}}$

b) $\dfrac{3{,}92 \cdot 10^4 \cdot 5{,}86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}2 \cdot 10^{13}}$

103. Dados los siguientes números escritos en notación científica, calcula.

$A = 2{,}7 \cdot 10^8$ $\quad B = 5{,}4 \cdot 10^9$ $\quad C = 7{,}1 \cdot 10^{12}$

a) $A \cdot B : C$
b) $B - A + C$
c) $A + B \cdot C$
d) $(B + C) : A$

104. Dados los siguientes números en notación científica, calcula.

$A = 3{,}2 \cdot 10^6$ $\quad B = 8{,}2 \cdot 10^{11}$ $\quad C = 5{,}1 \cdot 10^{-6}$

a) $A \cdot B \cdot C$
b) $(A : C) \cdot B$
c) $A + B \cdot C$
d) $A \cdot C^2$

Radicales

105. Halla el valor numérico de los radicales que aparecen a continuación.

a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[5]{-100\,000}$ e) $\sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[3]{-216}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

106. Escribe dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.

a) $\sqrt[3]{2^5}$ c) $\sqrt[6]{5^3}$ e) $\sqrt[8]{2^6}$

b) $\sqrt[12]{7^4}$ d) $\sqrt{2^3}$ f) $\sqrt[20]{3^{15}}$

107. Simplifica los radicales que aparecen a continuación.

a) $\sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt{27}$ g) $\sqrt[6]{27}$

b) $\sqrt[3]{54}$ e) $\sqrt{75}$ h) $\sqrt[8]{625}$

c) $\sqrt[4]{32}$ f) $\sqrt[5]{128}$ i) $\sqrt[3]{343}$

108. Escribe en cada caso si el desarrollo de la igualdad es verdadero o falso. Si es falso, corrígelo.

a) $\sqrt{8} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[3]{8^3}$ c) $\sqrt[5]{25^{10}} = \sqrt{5^{10}} = \sqrt[3]{5^{12}}$

b) $\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{9^4} = \sqrt{3^8}$ d) $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{3^9}$

109. Escribe las siguientes potencias de exponente fraccionario como un radical.

a) $\dfrac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{5}}}$ c) $\left(5 \cdot 5^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 5^3$

b) $3^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{-2} : 3^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ d) $\dfrac{\left(7^{\frac{1}{5}} \cdot 7\right)^{-\frac{1}{2}}}{7^{\frac{4}{5}}}$

110. Escribe como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ g) $\left(\sqrt{a}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}$

111. Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ e) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$ f) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}}$ i) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{256}}}}$

112. Extrae todos los factores posibles de los radicales siguientes.

a) $\sqrt{a^3b^4}$ c) $\sqrt[3]{a^3b^2c^7}$ e) $\sqrt[3]{a^3b^3 + c^3}$

b) $\sqrt{a^2b^5c^3}$ d) $\sqrt{a^3b^4 + a^2b^2}$ f) $\sqrt{a^4c^2 + a^4b^2}$

113. Extrae los factores que puedas de cada radical.

a) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{250}$ g) $\sqrt[4]{224}$

b) $\sqrt{80}$ e) $\sqrt[3]{1080}$ h) $\sqrt[5]{-486}$

c) $\sqrt[3]{189}$ f) $\sqrt[4]{720}$ i) $\sqrt{3528}$

114. La siguiente expresión con radicales es un número entero. Halla dicho número.

$$2\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{25} \cdot \sqrt[6]{8}$$

115. Extrae factores de los radicales.

a) $\sqrt{32x^3y^2}$ d) $\sqrt[4]{256x^3y^{15}}$

b) $\sqrt[3]{5^5x^6}$ e) $\sqrt[4]{x^{12}y^9z^{19}}$

c) $\sqrt[3]{125x^7y^2}$ f) $\sqrt[5]{729x^4y^{22}z^{15}}$

116. La expresión $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ es un número entero. Averigua cuál es.

117. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}}$ d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}}$

b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}}$ e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}}$ f) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

118. Copia y completa las potencias que faltan.

a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^{\blacksquare} \cdot 5}$ d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\dfrac{2^{\blacksquare} \cdot 7}{3^{\blacksquare}}}$

b) $3^{\blacksquare}\sqrt{2} = \sqrt{3^6 \cdot 2}$ e) $3^{\blacksquare}\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \sqrt{\dfrac{3^6 \cdot 2}{5}}$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\dfrac{5}{2^{\blacksquare}}}$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3^2} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{3^{\blacksquare}}}$

119. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98}$

b) $5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{108}$

c) $\sqrt{6} + 7\sqrt{24} - \dfrac{2}{3}\sqrt{54} - \sqrt{18}$

d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{3}$

120. Introduce los factores dentro del radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ d) $\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$

b) $4\sqrt[4]{20}$ e) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{6}$

c) $3\sqrt[5]{15}$ f) $2\sqrt[3]{7}$

121. Introduce los factores dentro del radical.

a) $5\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}$ b) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ c) $\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3}}{4}$

122. Introduce los factores dentro del radical, si es posible.

a) $a\cdot\sqrt{\dfrac{4a-1}{2a}}$ c) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$ e) $5+\sqrt{2}$

b) $\dfrac{4ab}{c}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{c^2b}{8a}}$ d) $\dfrac{2}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{3a}{8}}$ f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

123. Realiza las siguientes operaciones y simplifica.

a) $(5\sqrt{2}+3)\cdot(2+\sqrt{2})$

b) $(1-2\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{2})$

c) $(-\sqrt{3}+5)\cdot(5-2\sqrt{3})$

d) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{2})$

e) $(\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)$

f) $(-2\sqrt{7}-5)\cdot(\sqrt{7}-3\sqrt{5})$

124. Expresa el resultado de las siguientes operaciones mediante un solo radical.

a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt{5^3}$

b) $\left(\sqrt[3]{7^2\cdot 8}\cdot\sqrt[4]{8^5}\right):\sqrt{7\cdot 8^3}$

c) $\sqrt{3\cdot4\cdot5}\cdot\sqrt[4]{2\cdot4^2}\cdot\sqrt[8]{4^5\cdot5^3}$

d) $\sqrt[3]{2\cdot3\cdot5}:\left(\sqrt{2\cdot3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot3}\right)$

125. Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}$ c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

126. Halla el resultado de estos productos.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

127. Realiza las operaciones que aparecen a continuación y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot2^{-\frac{5}{2}}}$ c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}$ d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}}$

128. Realiza las operaciones con radicales que aparecen a continuación.

a) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}\right)^{-2}$ c) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{2a}\right)^{2}$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}+\dfrac{2a}{5}}\right)^{-4}$ d) $\left(\sqrt{6a}+\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right)^{2}$

129. Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{a^2+4-4a}$ b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}+2a^2+2a}$

Racionalización

130. Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{12}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3^3}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}$

131. Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt[4]{5^3}}$

b) $\dfrac{7\sqrt{7}-7}{\sqrt[3]{7}}$ d) $\dfrac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt[5]{-5^3}}$

132. Elimina las raíces del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$ f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

133. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ f) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-2}$ g) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ h) $\dfrac{3\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

134. Elimina raíces del denominador de las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{1-2\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{8}\,(5-\sqrt{18})}{\sqrt{2}\,(\sqrt{8}-2)}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-5\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}\,(\sqrt{5}+2)}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{5}}$

135. Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

136. Racionaliza estas expresiones.

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

137. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{3}{(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)}$ c) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)}$ d) $\dfrac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$

138. Realiza estas operaciones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

SABER HACER

Resolver operaciones entre fracciones con radicales

▶ Resuelve $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

PRIMERO. Se racionaliza cada una de las fracciones con radicales en el denominador.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}=\frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{5-2}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

SEGUNDO. Se opera con las fracciones racionalizadas.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1-2\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2}$$

139. Realiza estas operaciones.

a) $\dfrac{2}{3-2\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$

b) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}-7}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}}+\dfrac{4}{\sqrt{2}-5}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

140. Calcula la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{128}+2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{32}}-4\sqrt{2}$$

Logaritmos

141. Calcula, mediante la definición, los logaritmos que aparecen a continuación.

a) $\log_3 243$
b) $\log_9 81$
c) $\log 1\,000\,000$
d) $\log 0{,}00001$
e) $\ln e^2$
f) $\ln e^{-14}$
g) $\log_7 343$
h) $\log_4 0{,}0625$

142. Calcula los siguientes logaritmos utilizando su definición.

a) $\log_9 243$
b) $\log_{25} 125$
c) $\log_{32} 4$
d) $\log_4 512$

143. Determina cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y corrige las que no lo sean.

a) $\log(a+b)=\log a+\log b$
b) $\log 0=1$
c) $\log(a:b)=\log a-\log b$
d) $\log(a^b)=\log b\cdot\log a$

144. Halla el resultado de las expresiones mediante las propiedades de los logaritmos.

a) $2\log_4 16+\log_2 32-3\log_7 49$
b) $\log_2 8+\log_3 27+\log_5 125$
c) $\log_5 625-\log_9 81+\log_8 64$

145. Sabiendo que $\log 7=0{,}8451$ calcula aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$\log 28+\log 15-\log 6$$

146. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la calculadora.

a) $\log_5 36^2$
b) $\log_2\sqrt{31}$
c) $\log_6 100$
d) $\log_4 31^5$

147. Si $\log e=0{,}4343$; ¿cuánto vale $\ln 10$? ¿Y $\ln 0{,}1$?

148. Sabiendo que $\log 4=0{,}6021$ calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 2$
b) $\log\dfrac{1}{4}$
c) $\log 0{,}2$
d) $\log 4000$

149. Sabiendo que $\ln a=0{,}6$ y que $\ln b=2{,}2$ calcula los siguientes logaritmos.

a) $\ln\sqrt{a}$
b) $\ln\sqrt[3]{b}$
c) $\ln\sqrt[4]{\dfrac{ab}{e^2}}$
d) $\ln\dfrac{\sqrt{a^{-5}}}{\sqrt[3]{b}}$

150. Calcula el valor de x.

a) $\log_3 x=5$
b) $\log_5 x=3$
c) $\log_2 x=-1$
d) $\log_{\frac{2}{3}} x=4$
e) $\log_3 x=-5$
f) $\log_5 x=-3$
g) $\log_2 x=0$
h) $\log_{23} x=4$

Problemas con números reales

151. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Razona tu respuesta.

a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.

b) Todos los números reales son racionales.

c) Cualquier número irracional es real.

d) Hay números enteros que son irracionales.

e) Existen números reales que son racionales.

f) Todo número decimal es racional.

g) Cada número irracional tiene infinitas cifras decimales.

h) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.

i) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.

152. ¿Por qué la raíz cuadrada de cualquier número terminado en 2 es un número irracional? ¿Existe otro conjunto de números con esta característica?

153. Escribe en notación científica las siguientes cantidades.

a) El año-luz: 9 460 000 000 km.

b) Velocidad de la luz: 300 000 km/s.

c) Diámetro del Sol: 1 400 000 km.

d) Carga eléctrica del electrón: 0,0000000000000000001602 C.

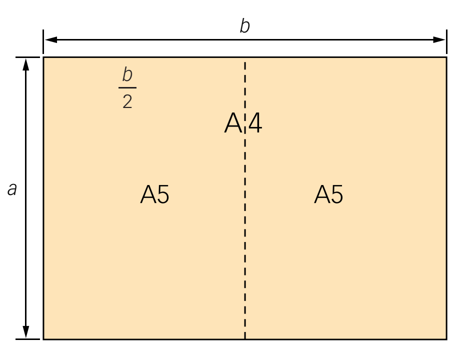
e) Masa del protón: 0,000000000000000000000001673 kg.

f) Distancia de Mercurio al Sol: 58 000 000 km.

g) Masa del electrón: 0,0000000000000000000000000000009109 kg.

h) Distancia entre la Tierra y la Luna: 384 000 000 m.

154. Los formatos de papel estándar se basan en una norma internacional. Estos tamaños de papel tienen unas medidas tales que, al cortar por la mitad uno de los rectángulos estándar, se obtienen dos rectángulos semejantes al primero. Así, al dividir por la mitad un folio DIN A4 resultan dos rectángulos iguales (de la medida DIN A5) semejantes al primero.



a) ¿Qué relación hay entre los lados de los rectángulos?

b) Se sabe que un rectángulo de tamaño DIN A0 tiene un área de 1 m². ¿Cuáles son, entonces, las dimensiones del folio de tamaño DIN A4?

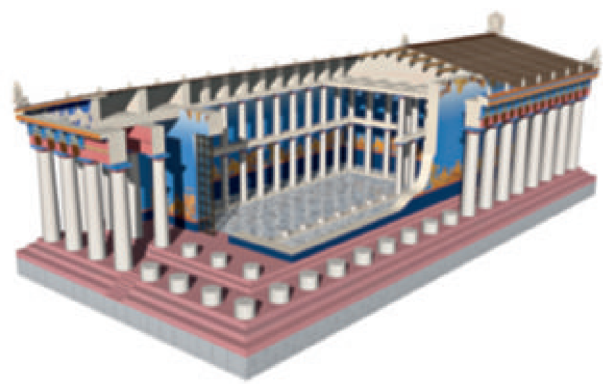
155. La distancia entre la Tierra y Júpiter es de $6{,}32 \cdot 10^6$ km. Una nave que hiciera el viaje entre los dos planetas en un año, ¿qué velocidad debería llevar?

156. Desde la antigüedad aparece con frecuencia el número de oro, Φ, en proporciones de la naturaleza, así como en obras de arte, o en construcciones como el Partenón griego.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Comprueba la siguiente propiedad del inverso del número de oro.

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$



157. ¿Qué tipo de decimal se obtiene de la fracción $\frac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, siendo a un número entero?

158. ¿Existe algún caso en que la aproximación por exceso y por defecto coincidan?

Y si consideramos el redondeo, ¿puede coincidir esta aproximación con la aproximación por exceso o por defecto?

159. Comprueba la veracidad de cada una de las igualdades que aparecen a continuación.

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$

e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$

f) $a\sqrt{b+c} = \sqrt{ab+ac}$

g) $\sqrt[4]{a^8 b^2} = a\sqrt{b}$

h) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

160. Escribe el número 2^{500} en notación científica.

a) Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y que $\sqrt{10} = 3{,}1622$.

b) ¿Podrías hacerlo con una calculadora científica?

c) Expresa 5^{500} en notación científica, teniendo en cuenta el primer apartado.

Para profundizar

Reflexiona sobre la teoría

161. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

Si $\log_x y + \log_y x = 7$, $(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2$ es igual a:	40	43	45	47	49
¿Qué número de los siguientes es $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$?	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	$3\sqrt{3}$	-6
¿Cuántos números formados por tres cifras consecutivas (no necesariamente ordenadas) tienen un número impar de divisores?	1	2	3	4	5
¿En qué intervalo está el número $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$?	$(-2, -1)$	$(1, 2)$	$(-3, -2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$
Si $y = \frac{x}{x + \frac{x}{x+y}}$, ¿para qué valores de x resulta que y no es un número real?	-6	-3	1	3	6

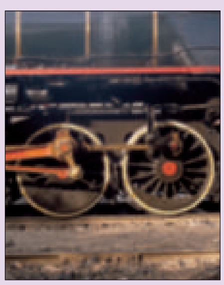
162. Si una fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible, ¿son las fracciones $\frac{a+b}{a \cdot b}$ y $\frac{a-b}{a \cdot b}$ irreducibles?

163. Razona cómo se racionalizan las fracciones del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b}}$$

Piensa un poco más

164. Dos piezas móviles de una máquina se desplazan a la misma velocidad.

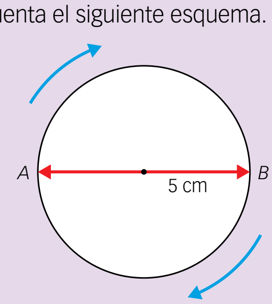


La primera pieza describe una circunferencia de radio 5 cm y la segunda se desplaza de un extremo al otro del diámetro de esa circunferencia.

Si ambas piezas parten del mismo punto, ¿coincidirán en algún momento?

CLAVE

Ten en cuenta el siguiente esquema.



Además, recuerda que el número π es irracional.

Olimpiadas matemáticas

165. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\sum_{k=1}^{99} \log \sqrt{\frac{1+k}{k}} = 1$$

166. Demuestra que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$, expresado en forma decimal, es un número mixto para cualquier valor de n.

(Olimpiadas matemáticas, Madrid)

167. Un montón de naranjas se apila en capas, de forma que en el hueco de 4 naranjas de una capa se coloca otra de la capa superior.

La primera capa, contando por debajo, tiene m filas y n columnas y la última capa tiene una sola fila; siendo m el número de diagonales de un decágono y n el menor número que dividido entre 4 da resto 3, entre 5 da resto 4 y entre 6 da resto 5. ¿Cuántas naranjas hay?

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

¿PARA QUÉ SIRVEN LOS NÚMEROS REALES?

Para determinar la velocidad en un accidente de tráfico

Cuando un coche frena bruscamente, a una velocidad considerable, produce marcas sobre la carretera debido a una transferencia de peso a las ruedas delanteras. Gracias a estas marcas es posible calcular la velocidad a la cual iba un automóvil antes de utilizar los frenos, en el caso de un accidente de tráfico.

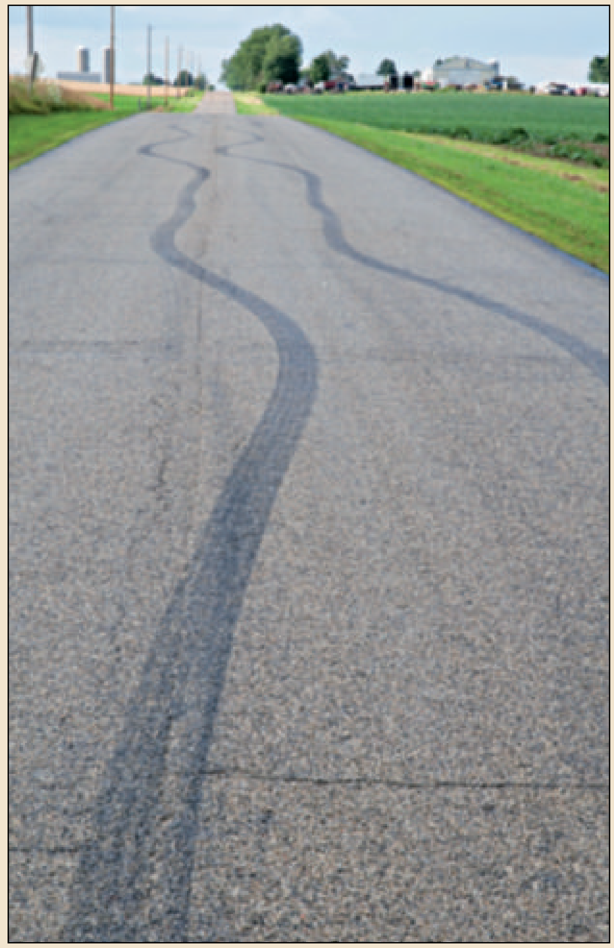
Por lo general, la velocidad inicial de un automóvil en un accidente se estima a partir de la longitud de las marcas de frenado x por medio de la expresión:

$$v = \sqrt{-2ax}$$

Pero si un coche frena bloqueando las cuatro ruedas, se detiene mucho antes que si frena bloqueando solo dos ruedas. Para determinar correctamente la velocidad inicial antes de un accidente es necesario tener en cuenta el reparto de carga entre las ruedas. Si las cuatro ruedas se bloquean, la aceleración a cumple: $a = -\mu g$, donde g es la gravedad, $g = 9{,}8$ m/s^2, y μ es el coeficiente de rozamiento de la carretera.

Así, al reemplazar en la expresión, se tiene que la velocidad inicial en m/s respecto a la distancia de frenado x se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{2\mu g x}$$



Los coeficientes de rozamiento más comunes para vehículos, de acuerdo con el tipo de pavimento, son:

Tipo de pavimento	Asfalto	Cemento	Nieve	Grava
Coeficiente de rozamiento μ	0,75	0,9	0,3	0,5

LEE Y COMPRENDE

1. Responde.

a) ¿Por qué se hacen marcas en la carretera al frenar bruscamente el automóvil?

b) ¿Cuál es el valor de la gravedad g?

2. Consulta qué es el coeficiente de rozamiento de una superficie.

INTERPRETA

3. ¿Qué magnitudes representan las variables μ, g y x en la expresión de la velocidad inicial con respecto a la distancia de frenado?

REFLEXIONA

4. ¿Es correcta esta igualdad?

$$v = \sqrt{2\mu g x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$$

5. ¿Cuál es el índice de la expresión radical?

APLICA

6. Calcula la velocidad de un automóvil si se sabe que frenó bruscamente y dejó una marca de frenado de 30 m en una carretera de asfalto.

7. Averigua cuáles son las campañas de los responsables de tráfico de tu ciudad o comunidad para evitar accidentes.