Módulo de Ciencias Aplicadas II

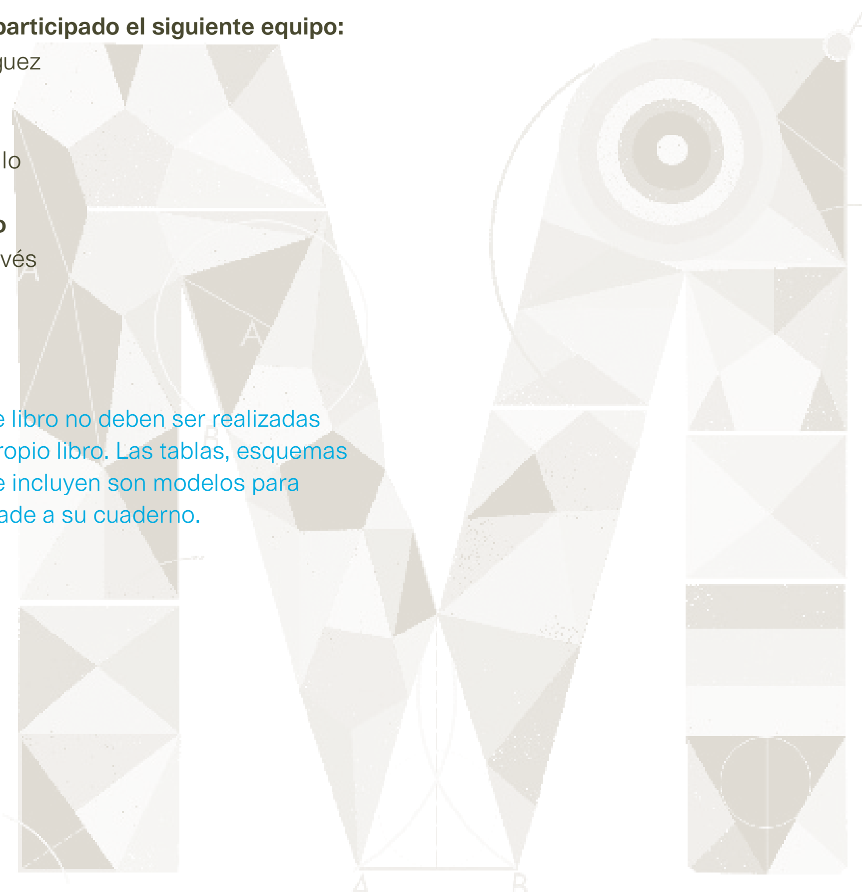
Matemáticas 2

El libro Matemáticas 2, para segundo curso de Formación Profesional Básica, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grenze Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
Azucena Zapata Rodríguez

Editor ejecutivo
José María Prada Carrillo

Dirección del proyecto
Mercedes Rubio Cordovés



Las actividades de este libro no deben ser realizadas en ningún caso en el propio libro. Las tablas, esquemas y otros recursos que se incluyen son modelos para que el alumno los traslade a su cuaderno.

Formación Profesional Básica

SANTILLANA
FORMACIÓN PROFESIONAL

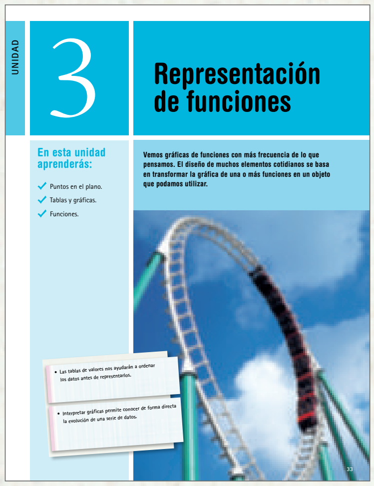
Presentación

La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) crea los ciclos de Formación Profesional Básica dentro de la Formación Profesional del sistema educativo. Estos ciclos incluyen módulos relacionados con las ciencias aplicadas y la sociedad y la comunicación, que permitirán al alumnado alcanzar y desarrollar las competencias del aprendizaje permanente y proseguir estudios de enseñanza postobligatoria.

Este libro de *Matemáticas 2* responde al currículo de Matemáticas Aplicadas al Contexto Personal y de Aprendizaje incluido dentro del módulo profesional de Ciencias Aplicadas II y está diseñado y elaborado para ser una eficaz herramienta de trabajo en el aula. Todos sus elementos han sido cuidadosamente trabajados y revisados con el objeto de crear un material riguroso, pero asequible a la comprensión de los alumnos.

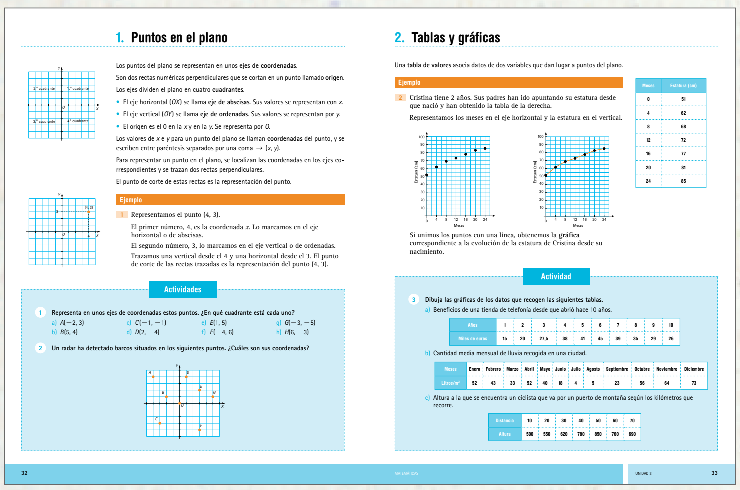
Los contenidos desarrollados en este libro se han secuenciado de acuerdo al Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero de 2014, por el que se regulan aspectos específicos de esta nueva etapa: la Formación Profesional Básica.

Esquema de la unidad



Página inicial

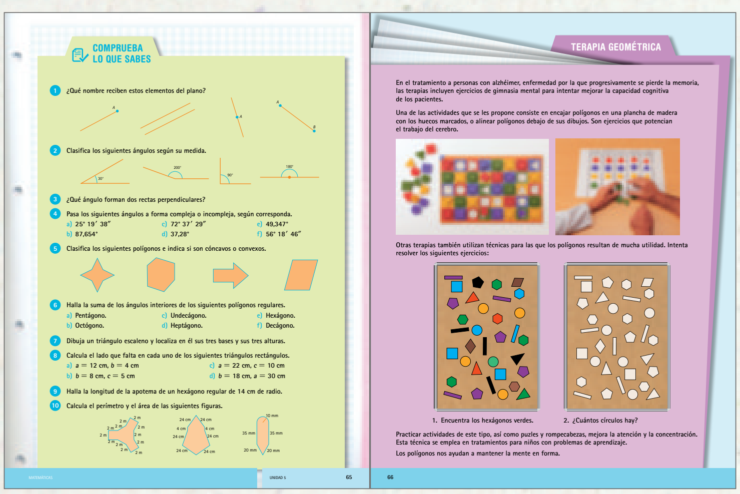
Esta página contiene el índice de contenidos de la unidad en el lateral junto a un breve texto introductorio.



Páginas de contenido y actividades

En las páginas centrales se desarrollan los contenidos de cada unidad, a través de textos expositivos, sencillos y cuidadosamente estructurados, apoyados en numerosos ejemplos.

Todos los epígrafes van seguidos de una serie de actividades que serán esenciales para practicar y afianzar lo aprendido.



Páginas finales

El objetivo del apartado COMPRUEBA LO QUE SABES es acreditar los conocimientos adquiridos mediante una serie de ejercicios que incluyen todos los aspectos conceptuales y procedimentales explicados en la unidad correspondiente.

Todas las unidades terminan con una página cuya información pretende acercar al estudiante a una forma de aprender práctica, mediante la manipulación, la observación de su entorno o el trabajo en pequeños grupos.

Índice

UNIDAD

1 Polinomios

En esta unidad aprenderás:

- Expresiones algebraicas.
- Operaciones con monomios.
- Operaciones con polinomios.

Los polinomios son una herramienta que nos ayuda a predecir resultados en nuestra vida cotidiana, como la cuota de la hipoteca, cuántas semanas deberemos trabajar para comprar un televisor o si tendremos suficiente dinero para acabar el mes.

El lenguaje algebraico tiene unas normas de uso que debemos repasar.

- Sirve para expresar construcciones matemáticas de forma general.
- Utiliza números, letras y signos para transmitir su información.

1. Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una operación con números y letras, llamadas **incógnitas o variables.**

Las incógnitas están siempre elevadas a un exponente. Cuando dicho exponente es 1, no hace falta ponerlo.

En una expresión algebraica, cada uno de los sumandos recibe el nombre de **término**, y los números que multiplican las incógnitas, **coeficientes.**

Si un término no contiene una incógnita, el exponente de dicha incógnita es cero.

Ejemplos

1 Analizamos estas dos expresiones algebraicas:

$$3xy - 2z \qquad 2bc^2 + 5k - 1$$

$3xy - 2z \rightarrow$ Las incógnitas son x, y, z. Los términos son $3xy$, $-2z$. Los coeficientes son 3, -2.

$2bc^2 + 5k - 1 \rightarrow$ Las incógnitas son b, c, k.
Los términos son $2bc^2$, $5k$, -1

Si conocemos el valor de las incógnitas y lo sustituimos en la expresión algebraica, obtenemos su **valor numérico.**

2 $4x - 2y \xrightarrow[y=3]{x=2} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 2$

$3bc^2 - 4c \xrightarrow[c=2]{b=1} 3 \cdot 1 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$

Actividades

1 **Identifica los elementos de las tres expresiones algebraicas siguientes.**

Expresión	Incógnitas	Términos	Coeficientes
$7yz^2 + 4x - 5$			
$4x - 2y$			
$2bc^2 + 5k - 1$			

2 **Representa las siguientes situaciones por medio de expresiones algebraicas.**

a) El precio de x libros a 10 € cada uno.

b) El número de ruedas de x bicicletas e y coches.

c) La diferencia entre el doble de un número y su mitad.

d) El peso de la cuarta parte de un pastel de n gramos.

2. Operaciones con monomios

Cada uno de los términos de una expresión algebraica es un monomio. Un monomio es el producto de un coeficiente por una o más incógnitas elevadas a un número natural.

La suma de los exponentes de las incógnitas se llama **grado** del monomio.

Cuando las partes literales de dos monomios son iguales, estos son **semejantes**.

Ejemplos

3 $15k^3m$ es un monomio con las características siguientes:

$15 \rightarrow$ Coeficiente $\qquad k^3m \rightarrow$ Parte literal

$k, m \rightarrow$ Incógnitas $\qquad 3 + 1 = 4 \rightarrow$ Grado

$3c^5h - 4x \rightarrow$ No es un monomio, porque tiene dos términos.

$9yk^{-2} \rightarrow$ No es un monomio, ya que el exponente -2 no es un número natural.

4 $3x^3t$ y $-\frac{4}{5}x^3t$ son monomios semejantes.

$11z^4y^3$ y $11z^3y^4$ no son monomios semejantes.

Actividades

3 **Completa la siguiente tabla.**

Monomio	Incógnitas	Partes literales	Coeficientes	Grados
$6a^2zh^3$				
$-5mt^6$				

4 **Identifica los monomios semejantes.**

a) $2ap^2q$ y $-3ap^2q$

b) $4x^4y^2z$ y $\frac{1}{3}y^2zx^4$

c) $-7bv^3c$ y $6bvc$

d) $\frac{2}{5}a^5tx$ y $\frac{2}{5}a^5x$

e) $\frac{1}{5}x^6$ y $2x^5$

f) $-8aj^4$ y $-8a^4j$

5 **Escribe monomios que cumplan las condiciones que se indican en cada caso.**

a) Que sea semejante a $6az^3b$.

b) Que tenga el mismo grado que $2xm^2c^3$ pero distintas incógnitas.

c) Que tenga las mismas incógnitas que $-4zpf$ y grado 6.

d) Que tenga dos incógnitas y grado 5.

e) Que no sea semejante a $2xyz$.

Suma, resta y producto de monomios

Solo podemos sumar o restar monomios si estos son semejantes. Para ello se suman los coeficientes y se conserva la parte literal (ver el ejemplo 5).

Si los monomios no son semejantes, la operación se deja indicada (ver el ejemplo 6).

Para multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes y las partes literales (ejemplo 7).

Ejemplos

5 $5x^3y + 2x^3y = (5 + 2)x^3y = 7x^3y$

$3abc + 4abc - 5abc = (3 + 4 - 5)abc = 2abc$

$7x^2 - 5x^2 + 2x^2 = (7 - 5 + 2)x^2 = 4x^2$

6 $2x^2 - 3x + 4x^2 = 6x^2 - 3x$

$6yz^2 + 4 - 4yz^2 - 2 = 2yz^2 + 2$

$3x^2 - 2y^2 + 4 - x^2 + 3y^2 = 2x^2 + y^2 + 4$

7 $3ac \cdot 2am = 6a^2cm$

$-4x^2za \cdot 2xz^2 = -8x^3z^3a$

$3 \cdot 5xv^2 = 15xv^2$

$2bx^5f \cdot (-3)b^2f^2 = -6b^3x^5f^3$

Actividades

6 **Suma o multiplica los siguientes monomios.**

a) $4x^2 - x^2 + 3x^2$

b) $-4y^3 + y^2 + 5y^3$

c) $8a^3b^2c \cdot \frac{1}{2}ac$

d) $4x^2y^3z \cdot \frac{1}{2}xz$

e) $(-1) \cdot (-x^3 + x^2 - 5)$

f) $6 \cdot 2pq^4 \cdot p^3$

g) $4xy^2 - 2xy + 7xy$

h) $7abc - abc + 2abc$

i) $3 \cdot (-2m^2n + 4m^2n)$

j) $4xy^2 - 2xy^2 + 7xy$

k) $7z^2b - \frac{3}{2}z^2b + \frac{1}{2}z^2b$

l) $3x^2 \cdot 2y \cdot \frac{1}{3}y$

7 **Efectúa estas operaciones con monomios.**

a) $2y^2m - 3y^2m + 6y^2m - 4y^2m$

b) $\frac{3}{4}a^3z \cdot \frac{8}{3}az - 2a^4z$

c) $-2 \cdot (-5x^6 + 7x^6 + 2x^6 - x^6)$

d) $5x^2 \cdot 3xy \cdot 2x - 6x^3 \cdot 3x \cdot 2y$

e) $-3x \cdot (2xk - 8xk + 7xk)$

f) $(6ac^3) \cdot (-2a^2c^3) \cdot (-3ac) \cdot (-4a^3c^2)$

g) $7x \cdot (2xy) \cdot (-3xy^5) \cdot (xy)$

h) $5xz - 3xz + 15xz - 11xz + 8xz - 3xz$

i) $-3x \cdot (2xk - 8xk + 7xk)$

j) $\left(\frac{3}{5}yz^4 + \frac{2}{5}yz^4\right) \cdot 3y^3$

k) $4 \cdot 5k^2 + 2 \cdot 3k^2 - 15k^2$

l) $-\frac{1}{2}(a^3b - 6a^3b + 4a^3b)$

m) $\frac{2}{3}(a^2c - 4a^2c) + \frac{1}{6}a \cdot \left(-\frac{2}{3}ac\right)$

n) $5xy^3 - 2xy^3 + 7xy^3 - 3xy^3$

ñ) $3abc + 6abc - 9abc - 4abc$

o) $8xy + 7xy - xy + 3xy - xy$

3. Operaciones con polinomios

Un polinomio es la suma de varios monomios, que reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Un polinomio de dos términos se llama **binomio**, y uno de tres, **trinomio**.

El máximo grado de los monomios que lo componen es el **grado del polinomio** (ver los ejemplos 8 y 9).

Lo más habitual es utilizar polinomios con una única incógnita.

El **valor numérico** de un polinomio es el número que se obtiene al sustituir la *x* por un número conocido (ver el ejemplo 10).

Ejemplos

8

Coeficientes

Término independiente

$$2hy^4 - 3y^2 + 4h - 5$$

Términos

Grado $= 4 + 1 = 5$

9 $5x^5 - 2x^3 + x - 4$

En este polinomio no hay término de grado 4 ni de grado 2. Esto es porque sus coeficientes son 0:

$$5x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 0x^2 + x - 4$$

El grado del polinomio es 5.

10 El valor de $2x^3 - 4x^2 + x - 3$ para $x = 2$ es:

$$2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 - 3 = 16 - 16 + 2 - 3 = -1$$

Suma de polinomios

Para sumar polinomios, se suman los monomios semejantes.

El opuesto de un polinomio se obtiene cambiando de signo todos sus términos.

La suma de un polinomio y su opuesto es 0.

Ejemplos

11

$$\begin{array}{rrrrr} -4x^6 & +\,x^5 & & +\;\;7x^2 & +\,3 \\ 2x^6 & & -\,4x^4 & +\;\;3x^2 & -\,5 \\ \hline -2x^6 & +\,x^5 & -\,4x^4 & +\,10x^2 & -\,2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow (-4x^6 + x^5 + 7x^2 + 3) + (2x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 5) =$$
$$= -2x^6 + x^5 - 4x^4 + 10x^2 - 2$$

12 El opuesto de $3x^2 + 4x - 5$ es: $-(3x^2 + 4x - 5) = -3x^2 - 4x + 5 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{rrr} 3x^2 & +\,4x & -\,5 \\ -3x^2 & -\,4x & +\,5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Resta de polinomios

Si queremos restar dos polinomios, sumamos al primero el **opuesto** del segundo.

Ejemplos

13 $(8x^4 - 3x^2 - x + 6) - (3x^4 + x^2 - 3x + 4) =$
$= 8x^4 - 3x^2 - x + 6 - 3x^4 - x^2 + 3x - 4 =$
$= 5x^4 - 4x^2 + 2x + 2$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 8x^4 - 3x^2 - x + 6 \\ -3x^4 - x^2 + 3x - 4 \\ \hline 5x^4 - 4x^2 + 2x + 2 \end{array}$$

14 $(-3x^2 + 5x - 1) - (-2x^2 - x - 6) =$
$= -3x^2 + 5x - 1 + 2x^2 + x + 6 =$
$= -x^2 + 6x + 5$

$$\rightarrow \begin{array}{r} -3x^2 + 5x - 1 \\ 2x^2 + x + 6 \\ \hline -x^2 + 6x + 5 \end{array}$$

Actividades

8 **Halla el grado de los polinomios, e indica si entre ellos hay binomios y trinomios. ¿Cuáles son los términos independientes?**

a) $12x^2yz - 5xy + 2$
b) $\frac{1}{2}fgh^5 - f^2g^2h^4 + fgh$
c) $6x^5 - 5x^4 + 7x^3 + x - 8$
d) $z^4 - 9z^3 + z^2 - 1$
e) $\frac{2}{3}x^4 - 4x^2$
f) $m^5n^2 + 7m^4n^3 - 4mn + 3$

9 **Suma o resta los siguientes polinomios.**

a) $(13x^3 - 5x^2 + 2x - 4) - (8x^4 + 10x^3 - x^2)$
b) $(-5x^3 + 4x^2 - 9x + 3) + (7x^3 - 6x^2 + 5x)$
c) $(4x^4 + 6x^3) - (-x^5 + 3x^4 - 2)$
d) $(-2x^5 + 4x^2 + 5) - (-x^5 + 3x^2 + 5)$
e) $(-x^2 + x - 1) + (-x^2 - 2x + 3)$
f) $(10x^6 + 4x^5 - 12x^4) - (6x^6 - 8x^4)$
g) $(-3x + 6) - (x^2 - 2x + 4)$
h) $(x^4 + 3x^2 - 5) + (2x^4 - 5x^2 + 3)$

Producto de un polinomio por un número

Multiplicar un polinomio por un número significa multiplicar todos los coeficientes del polinomio por dicho número (ver el ejemplo 15).

Si todos los términos de un polinomio tienen un monomio en común, podemos **sacar factor común** y escribir dicho monomio multiplicando (ver el ejemplo 16).

Ejemplos

15 $4 \cdot (-2x^2 + 6x - 5) = -8x^2 + 24x - 20$

$-2 \cdot (-x^3 - 4x^2 + 5x + 7) = 2x^3 + 8x^2 - 10x - 14$

16 $8x^4 + 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 \cdot (2x^2 + x - 3)$

$9x^3 - 6x^2 + 3x = 3x \cdot (3x^2 - 2x + 1)$

Actividad

10 Realiza las operaciones que se indican con los siguientes polinomios.

$A(x) = -x^2 + 3x \qquad B(x) = 2x + 3 \qquad C(x) = -2x^3 + 4x \qquad D(x) = 5x^2 - 1$

a) $2 \cdot A(x) - C(x)$

b) $D(x) - 3 \cdot A(x)$

c) $2 \cdot B(x) + D(x)$

d) $3 \cdot [C(x) - B(x)]$

e) Saca factor común en $C(x)$

f) $-2 \cdot [A(x) - D(x)]$

g) $2 \cdot C(x) - 4 \cdot A(x)$

h) $D(x) + \dfrac{1}{2} C(x)$

i) $A(x) + B(x) - C(x)$

j) $2 \cdot D(x) + 4 \cdot B(x) - 6 \cdot B(x)$

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplican todos los términos del primero por cada uno de los términos del segundo.

Ejemplo

17 $(3x^2 - 2) \cdot (x^2 - 1) =$

$= 3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot (-1) + (-2) \cdot x^2 + (-2) \cdot (-1) =$

$= 3x^4 - 3x^2 - 2x^2 + 2 = 3x^4 - 5x^2 + 2$

$$
\begin{array}{r}
3x^2 - 2 \\
\times \qquad x^2 - 1 \\
\hline
-3x^2 + 2 \\
3x^4 - 2x^2 \\
\hline
3x^4 - 5x^2 + 2
\end{array}
$$

Igualdades notables

Utilizando el producto de polinomios, podemos calcular el cuadrado de un binomio y el producto de una suma por una diferencia:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Estas tres expresiones se denominan **igualdades notables.**

Ejemplo

18 $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$

$(x^2 - 3)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 - 6x^2 + 9$

$(5 + x) \cdot (5 - x) = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$

$9x^2 - 4 = (3x + 2) \cdot (3x - 2)$

$(-x + 3)^2 = (3 - x)^2 = 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + x^2 = 9 - 6x + x^2$

$(-2 - x)^2 = (2 + x)^2 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot (-x) + (-x)^2 = 4 + 4x + x^2$

Identifica los términos del binomio con la a y la b de la fórmula y después sustituye.

Actividades

11 **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $(4x^4 - 3x^2 + 1) \cdot (x - 2)$

b) $(-3x^2 - 2x) \cdot (x^2 - 2x - 5)$

c) $(4x^3 - 1) \cdot (2x^2 - 7x + 3)$

d) $(-x^5 + 3) \cdot (-x^2 + 4x)$

e) $(2x^2 + 4x - 2) \cdot (3x^2 - 6x - 1)$

f) $(3 - x^3) \cdot (5x^2 + 2x - 8)$

12 **Transforma las expresiones aplicando las igualdades notables.**

a) $(1 - 2x^2)^2$

b) $(-3 + x^4)^2$

c) $(4 + 2x^2) \cdot (4 - 2x^2)$

d) $(-a - b)^2$

e) $(x^3 + x^2)^2$

f) $4x^2 + 12x + 9$

División de polinomios

Para dividir dos polinomios, se buscan los términos que multiplicados por el segundo polinomio dan lugar al primero. Solo se pueden dividir polinomios si el primero tiene mayor grado que el segundo.

En la división:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

se cumple:

$A(x) = B(x) \cdot C(x) + R(x)$

Ejemplo

19 $A(x) : B(x) = (2x^4 - 3x + 4) : (x^2 + 1) \rightarrow 2x^4 - 3x + 4 \; \underline{|\, x^2 + 1}$

Dividimos el primer término del primer polinomio (dividendo) entre el primer término del segundo (divisor).

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & & -3x+4 & x^2+1 \\ \cline{4-4} & & & 2x^2 \end{array} \quad \text{ya que } 2x^2 \cdot x^2 = 2x^4$$

Multiplicamos el resultado por los términos del divisor y los escribimos debajo del dividendo, cambiados de signo, y sumamos:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & & -3x+4 & x^2+1 \\ \cline{4-4} -2x^4 & -2x^2 & & 2x^2 \\ \cline{1-3} & -2x^2 & -3x+4 & \end{array}$$

Repetimos la operación hasta que el grado del polinomio suma (resto) sea menor que el del divisor.

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & & -3x+4 & x^2+1 \\ \cline{4-4} -2x^4 & -2x^2 & & 2x^2-2 \\ \cline{1-3} & -2x^2 & -3x+4 & \\ & 2x^2 & +2 & \\ \cline{2-3} & & -3x+6 & \end{array}$$

El polinomio $2x^2 - 2$ es el **cociente** de la división y $-3x + 6$, el **resto**.

Comprobamos que la división es correcta:

$$(x^2 + 1) \cdot (2x^2 - 2) + (-3x + 6) = 2x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 2 - 3x + 6 =$$
$$= 2x^4 - 3x + 4 = A(x)$$

Actividad

13 **Realiza las siguientes divisiones de polinomios, comprobando el resultado.**

a) $(4x^5 - 2x^3 + x - 6) : (x^3 + 1)$

b) $(6x^3 + 7x^2 + 12) : (x + 2)$

c) $(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 4) : (x^2 + 5)$

d) $(7x^6 + 2) : (x^3 - 3)$

e) $(3x^3 - 9x^2 + x - 3) : (x^2 + 4)$

f) $(5x^8 + 4x - 1) : (x^4 + 2x - 3)$

g) $(x^5 + x^4 + 5) : (x + 1)$

h) $(2x^7 - 5x^3 + 4x^2 - 7) : (x^3 - x + 2)$

División entre $x - a$. Regla de Ruffini

Un caso particular de la división de polinomios es la división entre un binomio de la forma $x - a$. En este caso es más sencillo aplicar la **Regla de Ruffini**.

Si tienes que dividir entre $x + 3$, recuerda que $x + 3 = x - (-3)$, por lo que $a = -3$.

Ejemplo

20 $(4x^4 + 5x^3 - 6x - 2) : (x - 1)$

Escribimos los coeficientes del polinomio en un cuadro, recordando que son cero los de aquellos términos que no aparecen en él. A la izquierda del cuadro se escribe el valor de a.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 5 & 0 & -6 & -2 \\ 1 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Bajamos el primer número y lo multiplicamos por a. El resultado lo escribimos debajo del segundo coeficiente y sumamos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 5 & 0 & -6 & -2 \\ & & + & & & \\ 1 & & 4 & & & \\ \hline \times & 4 & 9 & & & \end{array}$$

Operamos de la misma forma con el resultado obtenido y con los siguientes, hasta completar el cuadro.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 5 & 0 & -6 & -2 \\ 1 & & 4 & 9 & 9 & 3 \\ \hline & 4 & 9 & 9 & 3 & \boxed{1} \end{array}$$

Los números que hemos obtenido son los coeficientes del polinomio cociente, que tendrá un grado menos que el dividendo. El último de los números es el resto de la división.

$$C(x) = 4x^3 + 9x^2 + 9x + 3 \qquad R(x) = 1$$

Actividad

14 **Efectúa las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini.**

a) $(5x^2 - 4x + 7) : (x + 2)$

b) $(4x^3 + 3x^2 - 1) : (x - 1)$

c) $(2x^4 - x + 3) : (x + 1)$

d) $(x^4 - 4) : (x - 1)$

e) $(3x^5 - x + 2) : (x + 1)$

f) $(x^3 - 2x^2 - 4x + 15) : (x + 3)$

Raíces de un polinomio. Factorización

Si a es raíz del polinomio $A(x)$, la división entre $x - a$ tendrá como resto 0.

Un polinomio tiene como máximo tantas raíces como indique su grado.

Un número a se llama **raíz** de un polinomio si el valor numérico para él es 0.

Si un polinomio tiene varias raíces, puede expresarse como producto de sus factores.

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de factores. Para ello, debemos encontrar sus raíces (ver el ejemplo 21).

Una forma de hallar las raíces de un polinomio es sustituir en él diferentes valores numéricos para ver cuáles dan 0 (ver el ejemplo 22).

Ejemplos

21 $x^2 + x - 6$ tiene dos raíces: 2 y $-3 \rightarrow \begin{cases} 2^2 + 2 - 6 = 0 \\ (-3)^2 + (-3) - 6 = 0 \end{cases}$

$(x^2 + x - 6) : (x - 2) \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array} \qquad (x^2 + x - 6) : (x + 3) \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ -3 & & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$

Los binomios $(x - 2)$ y $(x + 3)$ se llaman **factores** del polinomio $A(x)$.

$$(x - 2) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$$

22 $x^2 + x - 2 \rightarrow$ Posibles raíces: 1, -1, 2, -2.

$1^2 + 1 - 2 = 0 \rightarrow 1$ es raíz.

$(-1)^2 + (-1) - 2 = -2 \rightarrow -1$ no es raíz.

$2^2 + 2 - 2 = 4 \rightarrow 2$ no es raíz.

$(-2)^2 + (-2) - 2 = 0 \rightarrow -2$ sí es raíz.

La factorización será: $x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2)$.

Otra posibilidad es, aplicando la regla de Ruffini, encontrar cuáles dan resto 0.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Actividad

15 **Encuentra las raíces de los siguientes polinomios y exprésalos como producto de factores. Utiliza las igualdades notables cuando sea posible.**

a) $x^2 + 2x - 3$
b) $x^3 - 7x + 6$
c) $x^2 + 5x + 4$
d) $x^3 + x^2 - 2x$
e) $x^2 - 2x - 15$
f) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
g) $x^4 - 1$
h) $x^2 - 7x + 12$
i) $x^2 - 2x + 1$
j) $x^2 - 3x - 10$
k) $x^2 - x - 30$
l) $4x^2 - 9$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1 Representa las siguientes situaciones mediante expresiones algebraicas.

a) La edad de una persona hace 6 años.

b) La suma de un número impar más su mitad.

c) Un número de dos cifras.

d) Longitud de un circuito rectangular de lados x e y.

2 Miguel trabaja en una carpintería barnizando muebles. Le pagan 5 € por cada silla y 12 € por cada armario barnizados.

a) Escribe una expresión que represente lo que cobrará en un día.

b) Ayer barnizó cinco sillas y dos armarios. ¿Cuánto le pagaron?

3 Realiza las operaciones con monomios. Identifica los elementos de los monomios resultantes.

a) $3axb^2 - 2axb^2 + 4axb^2$

b) $4x^5y \cdot 3bxy \cdot 2b^2xy$

c) $a^5b^2 + 6a^5b^2 - 2 \cdot (a^5b^2 + 3a^5b^2)$

d) $(2xz^4 + 3xz^4) \cdot (xyz - 4xyz + 2xyz)$

4 Realiza las operaciones que se indican con los siguientes polinomios.

$A(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 1 \quad B(x) = x + 5 \quad C(x) = -x^2 + 4x - 6 \quad D(x) = x^2 - x$

a) $2A(x) - C(x)$

b) $3 \cdot B(x) \cdot D(x)$

c) $B(x) \cdot C(x) - A(x)$

d) $A(x) : D(x)$

e) $C(x) : B(x)$

f) $A(x) - 5 \cdot B(x) - 3 \cdot C(x)$

g) $B(x) \cdot C(x) \cdot D(x)$

h) $A(x) \cdot [C(x) + D(x)]$

5 Utiliza las igualdades notables para completar los huecos.

a) $(2x - 9)^2 = 4x^2 - \_\_\_ + 81$

b) $(3x - 2) \cdot (3x + 2) = \_\_\_ - 4$

c) $(5 + x^2)^2 = \_\_\_ + x^4$

d) $9x^6 - 16 = \_\_\_$

e) $x^2 + 10x + 25 = (x + \_\_\_)^2$

f) $(-x - 4)^2 = \_\_\_ + 16$

6 Efectúa las siguientes divisiones empleando la regla de Ruffini.

a) $(3x^3 - 5x^2 + 3x - 2) : (x - 3)$

b) $(-4x^4 - 16x^3 - 2x + 1) : (x + 4)$

c) $(5x^5 - 8x^2 + x - 3) : (x - 1)$

d) $(5x^2 - 2) : (x + 1)$

e) $(x^4 + 5x^3 - 2x - 2) : (x + 6)$

f) $(x^6 - 24x^4 - 25x^2 + 2x - 8) : (x - 5)$

7 Comprueba si los números son raíces de los polinomios que se indican.

a) $x = 3$ y $x = 2$ de $A(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $x = -1$ y $x = 3$ de $B(x) = x^2 - 3x - 4$

c) $x = 2$ y $x = 1$ de $C(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

d) $x = 6$ y $x = -2$ de $D(x) = x^2 - 4x - 12$

8 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2 - x - 20$

b) $x^2 - 2x - 8$

c) $x^3 + 2x^2 - 3x$

d) $x^2 + 4x - 21$

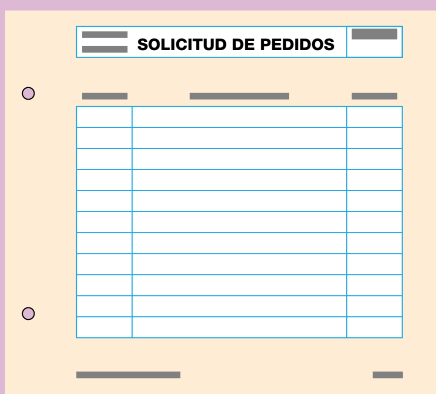
e) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

f) $x^2 - x - 30$

MANTENIENDO EL *STOCK*

Ricardo trabaja en el almacén de repuestos de una fábrica.

Cada jueves, el departamento de compras de la empresa le entrega la solicitud de aquellos repuestos que han reducido su *stock* mínimo para el consumo en la fábrica.



En el pedido de esta semana hay:

- El doble de rodamientos que de tornillos más 200.
- La cuarta parte de tuercas que de rodamientos.
- La mitad de clavos que de tuercas menos 30.

a) Si el número de tornillos es x, ¿cómo expresarías la cantidad pedida de cada repuesto?

b) Le han solicitado 1.500 tornillos. ¿Cuántas unidades de los otros repuestos tiene que solicitar?

c) ¿Cuántos repuestos debe pedir en total?

A final de mes, Ricardo tiene que hacer inventario del almacén. Hoy es el turno de las herramientas.

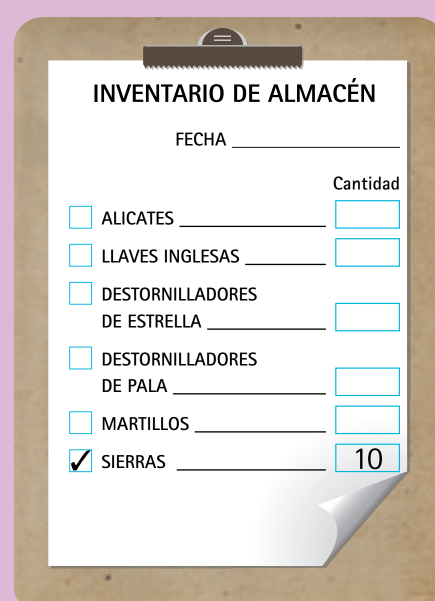
En el almacén tiene que haber:

- Alicates: las dos terceras partes de llaves inglesas más 150.
- Destornilladores de estrella: el triple de destornilladores de pala menos 80.
- La diferencia entre el número de martillos y dos veces el número de sierras debe ser 25.

Representa con una incógnita cada herramienta y expresa las cantidades necesarias utilizando expresiones algebraicas.

Al contar las herramientas del almacén, encuentra que hay 180 llaves inglesas, 130 destornilladores de estrella y 10 sierras.

¿Cuántas unidades tiene que haber de cada una de las otras herramientas?



UNIDAD

2

Ecuaciones y sistemas

En esta unidad aprenderás:

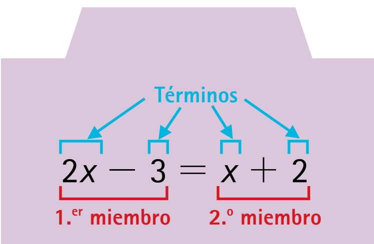
- Igualdad, identidad y ecuación.
- Ecuaciones de primer grado.
- Ecuaciones de segundo grado.
- Sistemas de ecuaciones.
- Problemas con ecuaciones y sistemas.

Las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones se aplican frecuentemente en el día a día. Por ejemplo, los ingenieros de los coches de carreras calculan variables sobre la aerodinámica de los vehículos o el agarre de los neumáticos resolviendo ecuaciones.

- Las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones nos permiten relacionar variables.

- Podemos visualizar las soluciones de un sistema usando la representación gráfica.

1. Igualdad, identidad y ecuación



Una igualdad se compone de dos expresiones relacionadas por un signo $=$.

- Si la igualdad siempre es cierta, se llama **identidad.**

  Una identidad puede ser numérica: $7 - 4 = 9 - 6$, o algebraica: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

  Las igualdades notables son identidades algebraicas.

- Si la igualdad solo es cierta para algunos valores de la variable, se llama **ecuación.**

  Una ecuación puede verificarse para uno o más números: $x^2 - 6x + 8 = 0$ es cierta para $x = 2$ y $x = 4$.

  Hay ecuaciones que se verifican para infinitos números. Por ejemplo, $y - x = 3$ es cierta para $y = 4$ y $x = 1$, $y = 3$ y $x = 0$, $y = 7$ y $x = 4$...

  Y también hay ecuaciones que no se verifican para ningún número: $x^2 + x + 7 = 0$.

Cada una de las expresiones separadas por el signo $=$ se llama **miembro.** Las variables x, y representan los valores desconocidos que hacen cierta la ecuación y se llaman **incógnitas.**

Cada uno de los sumandos recibe el nombre de **término.** Los valores de x que hacen cierta la ecuación se llaman **soluciones.**

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones.

Ejemplos

1 $2x + x + 3x = 6x \rightarrow$ Es una identidad. Siempre es verdadera.

2 $2x - 3 = x + 2 \rightarrow$ Es una ecuación. Solo es cierta cuando $x = 5$.

3 $3x - 2y = 1 \rightarrow$ Es una ecuación. Es cierta para infinitas parejas de números: $x = 1$, $y = 1$; $x = 3$, $y = 4$; $x = -1$, $y = -2$...

4 $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \rightarrow$ Es una identidad (igualdad notable). Siempre es verdadera.

5 $4x + 5 - 3x = 2x - 1 \rightarrow$ Es una ecuación. Solo es cierta cuando $x = 6$.

Actividad

1 **Indica si las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones. Halla las soluciones de las ecuaciones.**

a) $2x - 4 = 2 \cdot (x - 2)$

b) $4x - 1 = 2x + 3$

c) $2x^2 + x^2 + 4x^2 = 8x^2 - x^2$

d) $3x + 2 \cdot (x - 4) = 3x - 4$

f) $x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$

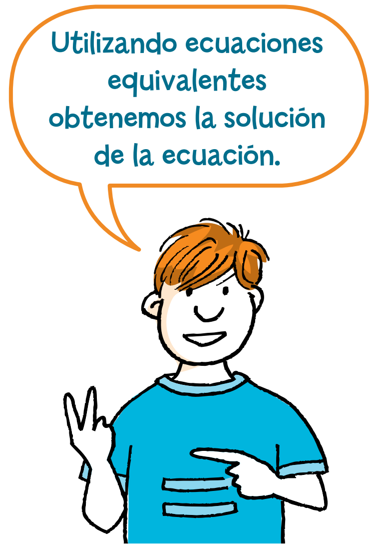
g) $5 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x + 2) = 2 \cdot (2x + 1) - 5$

2. Ecuaciones de primer grado

Una ecuación es de primer grado cuando la variable x tiene grado 1.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución. Obtenemos **ecuaciones equivalentes** a una dada de dos formas:

- Por el método de la suma: sumando el mismo número en ambos miembros.
- Por el método del producto: multiplicando o dividiendo ambos miembros por el mismo número.



Ejemplos

6 Resolvemos la ecuación $6x - 3 = 4x + 5$.

1.º Sumamos 3 $\rightarrow 6x - 3 + 3 = 4x + 5 + 3 \rightarrow 6x = 4x + 8$

2.º Restamos $4x$ $\rightarrow 6x - 4x = 4x + 8 - 4x \rightarrow 2x = 8$

3.º Dividimos entre 2 $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 8 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ Es la solución.

4.º Comprobamos que la solución verifica la ecuación:

$6 \cdot 4 - 3 = 4 \cdot 4 + 5 \rightarrow 21 = 21$

Se observa que «sumar 3 en ambos miembros» equivale a pasar sumando al otro miembro el 3 que resta.

Esta operación se llama **transposición de términos** y se puede aplicar al producto y al cociente: un número que multiplica pasa al otro miembro dividiendo, y uno que divide pasa multiplicando.

7 Resolvemos la ecuación $3x + 5 \cdot (x - 1) = \frac{1}{2}x + 2 \cdot (x + 3)$.

1.º Quitamos paréntesis y sumamos $\rightarrow 3x + 5x - 5 = \frac{1}{2}x + 2x + 6 \rightarrow$

$\rightarrow 8x - 5 = \frac{1}{2}x + 2x + 6$

2.º Pasamos el 5 sumando $\rightarrow 8x = \frac{1}{2}x + 2x + 6 + 5 \rightarrow$

$\rightarrow 8x = \frac{1}{2}x + 2x + 11$

3.º Pasamos $2x$ restando $\rightarrow 8x - 2x = \frac{1}{2}x + 11 \rightarrow 6x = \frac{1}{2}x + 11$

4.º Multiplicamos por 2 $\rightarrow 2 \cdot 6x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 11\right) \rightarrow 12x = x + 22$

5.º Pasamos x restando $\rightarrow 12x - x = 22 \rightarrow 11x = 22$

6.º Pasamos 11 dividiendo $\rightarrow x = \frac{22}{11} \rightarrow x = 2$

7.º Comprobamos la solución:

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot (2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \cdot (2 + 3) \rightarrow 6 + 5 = 1 + 2 \cdot 5 \rightarrow 11 = 11$$

$$8x - 5 = \frac{1}{2}x + 2x + 6$$

Actividades

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando ecuaciones equivalentes.**

a) $\frac{1}{2}\cdot(x+3)+2=2x-1$

b) $5x+4=3\cdot(2x-3)+12$

c) $1+3\cdot(x-4)+2x=4x-8$

d) $5x-4-3x+2\cdot(x+1)=\frac{1}{2}x+5$

e) $2x+1+4\cdot(-x-2)=2\cdot(3x-4)+5$

f) $\frac{2}{3}x+3-2\cdot(4-x)=7x-2\cdot(x+3)$

g) $4x+2\cdot(x+1)-3x+2=2\cdot(x-3)-x-\frac{1}{2}$

h) $2\cdot(x-1)+3\cdot(x+2)=4\cdot(x+1)-2\cdot(x-3)$

3 **Resuelve estas ecuaciones con la transposición de términos.**

a) $6x+2-4\cdot(2x-3)=-3\cdot(2x+5)+3$

b) $4x-2-3\cdot(2x+2)=\frac{1}{2}x+1$

c) $3\cdot(4x+4)-5\cdot(2x+3)+2x+3=-4$

d) $-5x+2\cdot(3x-5)+x+4=x+2$

e) $x+\frac{3}{2}-6\cdot(x+2)+4\cdot(2x-1)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)$

f) $2\cdot(1-4x)-3\cdot(2x+6)=-8x-10$

g) $5x-1+3\cdot(4x+3)-2\cdot(4x+2)+14=0$

h) $\frac{1}{2}\cdot(x-4)+3\cdot(x-1)=2x+7$

Ecuaciones con denominadores

Para resolver ecuaciones que tienen varios denominadores, hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de todos ellos y multiplicamos cada uno de los términos para simplificar.

Ejemplo

8 Resolvemos la ecuación $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13 \rightarrow$ m.c.m. (2, 3 y 4) $=12$.

Multiplicamos por el m.c.m. y simplificamos:

$$12\cdot\frac{x}{2}+12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot\frac{x}{4}=12\cdot 13 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x+4x+3x=12\cdot 13 \rightarrow 13x=12\cdot 13$$

Pasamos el 13 dividiendo $\rightarrow x=\frac{12\cdot 13}{13} \rightarrow x=12$

Actividad

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.**

a) $\frac{2x-3}{5}+2x-2=\frac{4x-2}{2}$

b) $\frac{x}{9}+\frac{3x-1}{3}-x-3=\frac{-2x-17}{6}$

c) $\frac{4x-1}{4}+\frac{x-2}{3}=\frac{2x+3}{4}$

d) $\frac{2x+8}{3}-\frac{x}{2}=\frac{2x+1}{2}+\frac{2-x}{3}$

3. Ecuaciones de segundo grado

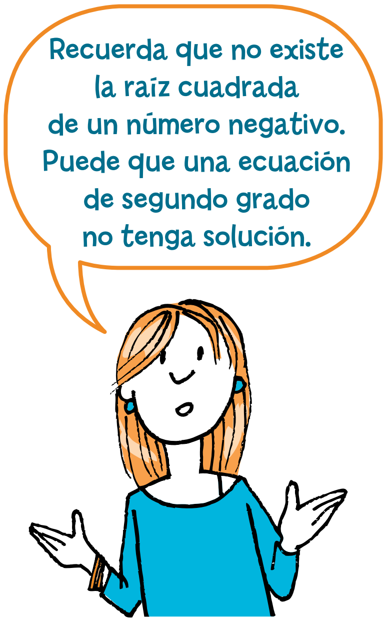
En una ecuación de segundo grado el máximo grado de x es 2. Son de la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La ecuación anterior se llama ecuación **completa** porque tiene todos sus términos. Para resolverla usamos esta fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La ecuación de segundo grado tiene como máximo dos soluciones porque su grado es 2.



Ejemplo

9 Resolvemos la ecuación $x^2 - x - 12$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -12 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+7}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{1-7}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son 4 y -3. Estos números son también las **raíces** del polinomio $x^2 - x - 12$, por lo que resolver la ecuación de segundo grado es útil para factorizar el polinomio correspondiente.

$$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3)$$

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Una ecuación de segundo grado es incompleta si en la expresión $ax^2 + bx + c = 0$ alguno de los coeficientes b o c son 0. Por tanto, hay dos tipos:

- Tipo $ax^2 + c = 0$ **(**$b = 0$**)**

  En este caso se transponen los términos c y a para despejar x.

  $$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Tipo $ax^2 + bx = 0$ **(**$c = 0$**)**

  Para resolver esta ecuación sacamos factor común x.

  $$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x \cdot (ax + b) = 0$$

  Ahora igualamos a cero cada uno de los factores del producto obtenido.

  $$x \cdot (ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

  En estas ecuaciones, una de las soluciones es siempre 0.

Ejemplos

10 Resolvemos la ecuación $2x^2 - 8 = 0$.

$$2x^2 - 8 = 0 \to x^2 = \frac{8}{2} \to x^2 = 4 \to x = \pm\sqrt{4} \to \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Comprobación: $2 \cdot 2^2 - 8 = 0 \to 8 - 8 = 0$
$2 \cdot (-2)^2 - 8 = 0 \to 8 - 8 = 0$

11 Resolvemos la ecuación $3x^2 - 4x = 0$.

$$3x^2 - 4x = 0 \to x \cdot (3x - 4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \to x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Comprobación: $3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \to 0 = 0$

$$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} = 0 \to 3 \cdot \frac{16}{9} - \frac{16}{3} = 0 \to \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = 0$$

Actividad

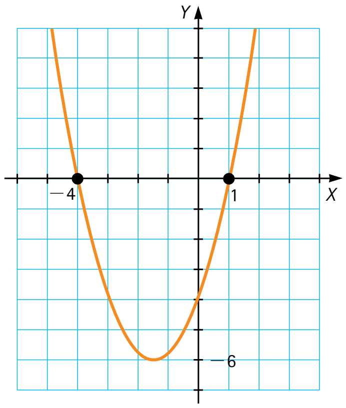
5 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $-3x^2 + 9 = 0$
b) $x^2 - x - 30 = 0$
c) $x^2 + x = 0$
d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$
e) $8x^2 - 14x + 3 = 0$
f) $3x^2 + 2x - 8 = 0$
g) $4x^2 - 16 = 0$
h) $2x^2 + 7x - 4 = 0$
i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
j) $x^2 - 5x = 0$

Solución gráfica de la ecuación de segundo grado

Las soluciones de una ecuación de segundo grado son los puntos de corte de su gráfica con el eje X.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una **parábola**.



Ejemplo

12 Resolvemos gráficamente la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$.

$$y = x^2 + 3x - 4 \to x^2 + 3x - 4 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + 5}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-3 - 5}{2} = -4 \end{cases}$$

La gráfica que representa a la curva $y = x^2 + 3x - 4$ es una parábola que corta el eje X en los puntos $x = -4$ y $x = 1$.

4. Sistemas de ecuaciones

Una **ecuación lineal** es una expresión de la forma $ax + by = c$.

Por tener dos incógnitas, existen infinitas soluciones, que son los pares de valores (x, y) que verifican esa ecuación.

Ejemplos

13 Resolvemos la ecuación lineal $3x - 2y = 4$.

Para $x = 2$ e $y = 1 \rightarrow 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$ la ecuación se cumple.

También para $x = 6$ e $y = 7 \rightarrow 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$.

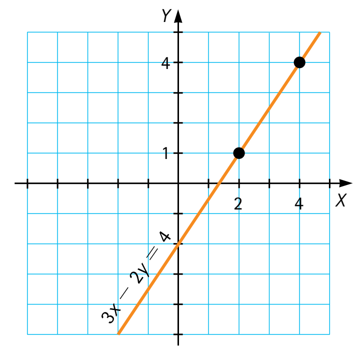
Y para $x = -2$ e $y = -5 \rightarrow 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) = 4 \rightarrow -6 + 10 = 4$.

Para obtener soluciones, despejamos y de la ecuación y damos valores a x.

$$y = \frac{4 - 3x}{-2} \rightarrow \text{Para } x = 4 \rightarrow y = \frac{4 - 3 \cdot 4}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$\rightarrow \text{Para } x = -4 \rightarrow y = \frac{4 - 3 \cdot (-4)}{-2} = \frac{16}{-2} = -8$$

Podemos representar estos valores en unos ejes de coordenadas. Observamos que forman una recta.



14 Plantea dos ecuaciones lineales cuya solución sea el par (2, 3).

Existen infinitas ecuaciones que verifican los valores $x = 2$, $y = 3$.

Un ejemplo sería $2x - y = 1$. Comprobamos la solución: $2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Otra posibilidad es: $-3x + y = -3$. Sustituyendo: $-3 \cdot 2 + 3 = -3$.

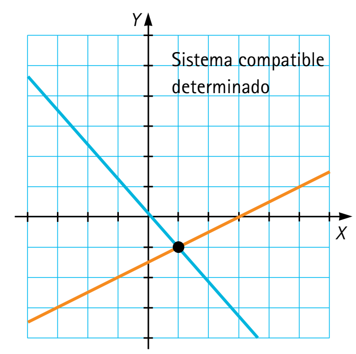
Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos ecuaciones lineales de la forma:

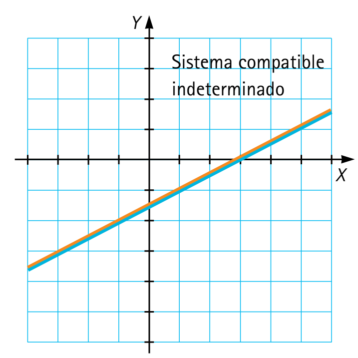
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

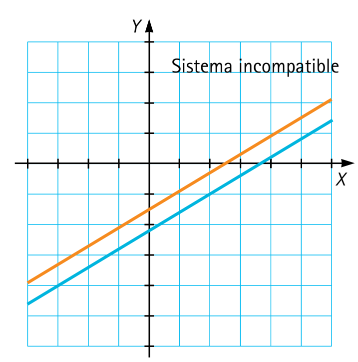
Resolver el sistema consiste en encontrar el par de valores de x e y que verifican las dos ecuaciones. Gráficamente significa encontrar el punto de corte de las dos rectas.

Un sistema puede tener solución o no. En función de ello, podemos clasificar los sistemas:

- Compatible $\rightarrow$ Tiene solución.
  - Determinado $\rightarrow$ Solución única $\rightarrow$ Rectas secantes (se cortan en un punto que es la solución del sistema).
  - Indeterminado $\rightarrow$ Infinitas soluciones $\rightarrow$ Rectas coincidentes (se cortan en todos los puntos).
- Incompatible $\rightarrow$ No tiene solución $\rightarrow$ Rectas paralelas.

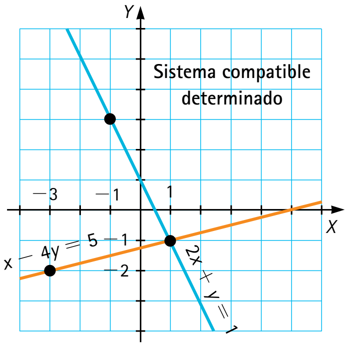






Ejemplo

15 Representamos las ecuaciones lineales de cada uno de los sistemas siguientes.



a) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

Resolvemos la ecuación lineal $x - 4y = 5$.

Para $x = 1$ e $y = -1 \quad \rightarrow 1 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$

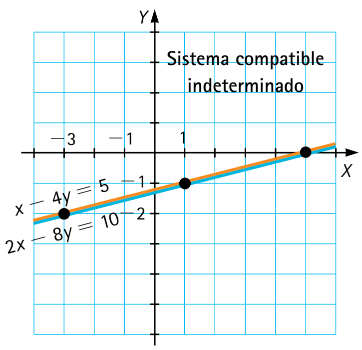
Para $x = -3$ e $y = -2 \quad \rightarrow -3 - 4 \cdot (-2) = -3 + 8 = 5$

Resolvemos la ecuación lineal $2x + y = 1$.

Para $x = 1$ e $y = -1 \quad \rightarrow 2 \cdot 1 + (-1) = 2 - 1 = 1$

Para $x = -1$ e $y = 3 \quad \rightarrow 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

Al representar ambas ecuaciones, vemos que las dos rectas se cortan en el punto $(1, -1)$, que es la solución del sistema.



b) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2x - 8y = 10 \end{cases}$

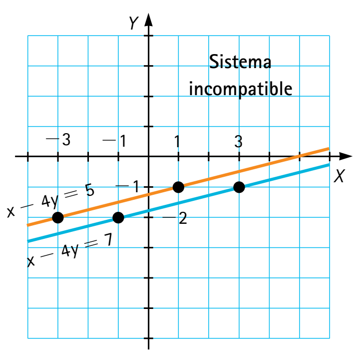
La ecuación lineal $x - 4y = 5$ ya la hemos resuelto antes.

Resolvemos la ecuación lineal $2x - 8y = 10$.

Para $x = 1$ e $y = -1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 8 \cdot (-1) = 2 + 8 = 10$

Para $x = 5$ e $y = 0 \quad \rightarrow 2 \cdot 5 - 8 \cdot 0 = 10$

Al representar las dos rectas, comprobamos que son coincidentes, lo que quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones.



c) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$

La ecuación $x - 4y = 5$ es la misma que en los dos casos anteriores.

Los puntos $(-1, -2)$ y $(3, -1)$ son soluciones de la ecuación $x - 4y = 7$.

Al representar las dos rectas, vemos que son paralelas, no tienen ningún punto en común. Por tanto, el sistema no tiene solución.

Actividades

6 Representa las siguientes ecuaciones lineales.

a) $x + y = 8$

b) $2x - y = 4$

c) $x + 3y = 5$

d) $y - x = 3$

e) $3x - 2y = 6$

f) $4x - 2y = 5$

7 Clasifica los sistemas encontrando su solución gráfica.

a) $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2x - 8y = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ 10x - 6y = 6 \end{cases}$

Métodos de resolución de sistemas

Existen tres métodos de resolución de sistemas: sustitución, igualación y reducción. Los tres métodos son válidos para resolver cualquier sistema.

Debemos elegir el método más adecuado en cada caso.

1) Método de sustitución. Consiste en despejar una de las incógnitas de una ecuación y sustituir en la otra ecuación.

Ejemplo

16 Resolvemos el sistema $\begin{cases} x - 4y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

1.º Despejamos x de la primera ecuación $\rightarrow x = 2 + 4y$

2.º Sustituimos en la segunda y operamos $\rightarrow 2 + 4y - y = -1 \rightarrow$
$\rightarrow 3y = -3 \rightarrow y = -1$

3.º Sustituimos el valor de $y \rightarrow x = 2 + 4 \cdot (-1) = -2$

La solución es: $x = -2$, $y = -1$.

4.º Comprobamos que con esa solución se verifican las dos ecuaciones:

$$-2 - 4 \cdot (-1) = -2 + 4 = 2$$
$$-2 - (-1) = -2 + 1 = -1$$

Actividad

8 **Resuelve por sustitución los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} 8x - 4y = 4 \\ 5x - y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 1 \\ x + \dfrac{y}{2} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$

2) Método de igualación. Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

Ejemplo

17 Resolvemos el sistema $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$.

1.º Despejamos x en las dos ecuaciones $\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - y}{3} \\ x = 5 + 2y \end{cases}$

2.º Igualamos y operamos $\rightarrow \dfrac{1 - y}{3} = 2y + 5 \rightarrow$
$\rightarrow 1 - y = 6y + 15 \rightarrow$
$\rightarrow -14 = 7y \rightarrow y = -2$

3.º Sustituimos el valor de y obtenido en cualquiera de las ecuaciones anteriores para obtener el valor de $x \rightarrow x = 2y + 5 \rightarrow$
$\rightarrow x = 2 \cdot (-2) + 5 \rightarrow x = 1$

La solución es: $x = 1$, $y = -2$.

Actividad

9 **Resuelve por igualación.**

a) $\begin{cases} 2 \cdot (3 - x) + y - 2 = 0 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 10 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = -7 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10x - 3y = -3 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ \dfrac{3}{2}x - 4y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x + 5y = 3 \end{cases}$

3) **Método de reducción.** Multiplicamos una de las ecuaciones por un número tal que al sumar las ecuaciones, eliminemos una de las incógnitas

Ejemplo

18 Resolvemos el sistema $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ -3x + 2y = 6 \end{cases}$.

1.º Multiplicamos la primera ecuación por $2 \rightarrow 2 \cdot 5x - 2y = 2 \cdot 4$

2.º Sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 10x - 2y = 8 \\ -3x + 2y = 6 \end{cases} \\ \hline \quad 7x \qquad = 14 \end{array} \rightarrow x = 2$$

3.º Sustituimos para hallar $y \rightarrow y = 5x - 4 \rightarrow y = 5 \cdot 2 - 4 = 6$

La solución es: $x = 2$, $y = 6$.

Actividades

10 **Resuelve por reducción.**

a) $\begin{cases} 6 - 15x = y \\ 3x - y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} = 2 \\ x - 4y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{4x}{3} - y = 4 \\ x + \dfrac{3y}{2} = 12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

11 **Resuelve los siguientes sistemas por el método más adecuado en cada caso.**

a) $\begin{cases} x - 8y = 8 \\ 3x - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{5} \cdot (x + y) + \dfrac{5}{2} \cdot (x - y) = -\dfrac{1}{2} \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}$

5. Problemas con ecuaciones y sistemas

Muchos problemas plantean situaciones de la vida cotidiana y se pueden resolver por medio de una ecuación o un sistema.

Ejemplos

19 Luis va a hacer un pastel que requiere la tercera parte de azúcar que de harina. Si el peso del pastel es de 200 g, ¿cuántos gramos de azúcar y de harina necesita?

Peso de harina $\rightarrow x$ Peso de azúcar $\rightarrow \frac{x}{3}$

El peso del pastel es de 200 g $\rightarrow$

$$\rightarrow x + \frac{x}{3} = 200 \rightarrow 3x + x = 600 \rightarrow 4x = 600 \rightarrow x = 150$$

Necesita 150 g de harina y $\frac{150}{3} = 50$ g de azúcar.

20 Tenemos 24 flores y vamos a hacer dos ramilletes. Queremos que uno tenga el triple de flores que el otro. ¿Cuántas flores tendrá cada ramillete?

Primer ramillete $\rightarrow x$ flores Segundo ramillete $\rightarrow 3x$ flores

Como en total son 24 flores $\rightarrow x + 3x = 24 \rightarrow 4x = 24 \rightarrow x = 6$

El primer ramillete tendrá 6 flores y el segundo 18 flores.

21 Para repoblar un bosque se van a plantar 1.650 árboles entre pinos y castaños. El número de pinos es el doble del de castaños más 150. ¿Cuántos árboles de cada tipo se van a plantar?

Identificamos las incógnitas $\rightarrow x =$ número de pinos
$y =$ número de castaños

Planteamos las ecuaciones:

Entre pinos y castaños hay 1.650 árboles $\rightarrow x + y = 1.650$

El número de pinos es el doble del de castaños más 150 $\rightarrow x = 2y + 150$

Resolvemos el sistema sustituyendo la x:

$$\left.\begin{cases} x + y = 1.650 \\ x = 2y + 150 \end{cases}\right. \rightarrow 2y + 150 + y = 1.650 \rightarrow 3y = 1.500 \rightarrow y = 500$$

$$x = 2y + 150 \xrightarrow{y = 500} x = 2 \cdot 500 + 150 = 1.150$$

Se van a plantar 1.150 pinos y 500 castaños.

22 Dos números suman 25. Uno de ellos es el doble del otro más 1. ¿Cuáles son los números?

Los números suman 25 $\rightarrow x + y = 25$

Uno es el doble del otro más 1 $\rightarrow y = 2x + 1$

Resolvemos por igualación:

$$\left.\begin{cases} x + y = 25 \rightarrow y = 25 - x \\ y = 2x + 1 \end{cases}\right. \rightarrow 25 - x = 2x + 1 \rightarrow 24 = 3x \rightarrow x = 8$$

$$y = 25 - x = 25 - 8 = 17$$

Actividades

12 María es voluntaria en una protectora de animales. En total acogen a 125 animales entre perros y gatos. Ella se ocupa de cuidar a los gatos, que son la mitad del número de perros más 5. ¿De cuántos gatos debe ocuparse María?

13 En la revista donde Carlos trabaja tiene que haber el doble de páginas de reportajes que de publicidad más 25. Si en total la revista tiene 160 páginas, ¿cuántas se dedican a publicidad y cuántas a reportajes?

14 Las dos cifras de un número suman 14. La cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades menos 1. ¿Cuál es el número?

15 El perímetro de un campo rectangular es de 300 m. El ancho es el doble del largo menos 30. ¿Cuáles son las dimensiones del campo? ¿Cuál es su área?

16 Laura tiene 14 años y su madre 38. ¿Cuántos años tienen que pasar para que la edad de la madre sea el doble de la edad de Laura?

17 Por alquilar 3 horas unos patines y 2 horas una bicicleta, Jesús ha pagado 35 €. Si alquilara los patines 1 hora y la bicicleta 4 horas, pagaría 45 €. ¿Cuánto cuesta cada hora de alquiler de los patines y de la bicicleta?

18 Los amigos de Ana le están preparando una fiesta sorpresa. Tienen 20 € de presupuesto para confeti y globos. Quieren comprar el doble de bolsas de globos que de confeti, y saben que cada bolsa de globos cuesta 50 cts. y cada bolsa de confeti, 75 cts. ¿Cuántas bolsas de cada clase pueden comprar?

19 Una empresa de transportes dispone de dos camiones de 3 y 4 toneladas de capacidad, respectivamente. ¿Cuántos viajes deberá hacer cada camión para transportar 200 toneladas de fresas si el camión de 4 toneladas puede hacer la mitad de viajes que el de 3 toneladas?

20 Jorge gasta $\frac{1}{3}$ de su sueldo en pagar el alquiler, $\frac{2}{5}$ partes en comida y $\frac{1}{15}$ partes en ocio. Si le sobran 180 € a final de mes, ¿cuánto cobra Jorge?

21 En un parque de atracciones suben a la montaña rusa 35 personas más que a la noria. Además, el triple de los clientes de la noria supera en 50 al doble de los que montan en la montaña rusa. ¿Cuántos clientes tiene cada atracción?

22 En la tintorería de Julián hoy han recibido mantas y edredones. El número de edredones es el doble del número de mantas menos 1. Además, el doble del número de edredones es el triple del de mantas más 6. ¿Cuántas mantas y cuántos edredones tiene que limpiar Julián?

23 Un fabricante de cristalerías gana 0,45 € por cada vaso que vende, pero pierde 0,60 € por cada uno que se rompe. Hoy ha fabricado 3.500 vasos, obteniendo un beneficio de 1.155 €. ¿Cuántos vasos se han roto?

24 Un equipo de fútbol ha marcado 35 goles en una temporada. Fuera de casa marcó las $\frac{2}{5}$ partes de los que marcó en casa. ¿Cuántos goles marcó fuera?

COMPRUEBA LO QUE SABES

1 Las siguientes igualdades ¿son identidades o ecuaciones?

a) $3x - 1 = 2 \cdot (x + 3) - 2$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$

c) $1 + 2x - 3 \cdot (x + 4) = -x - 11$

d) $4x + \frac{1}{2} = 2 \cdot (2x + 5) + \frac{3}{2} - x$

e) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

f) $x^2 - 3x = x \cdot (x + 2) - 5$

2 Resuelve las ecuaciones de primer grado.

a) $5 \cdot (2x - 3) + 2x + 10 = 2 \cdot (6x + 4) - 9x$

b) $\frac{2x - 1}{3} + x - 2 = 2x + 1$

c) $x - 3 \cdot \left(3 - \frac{x}{4}\right) = x - 8$

d) $1 - \frac{2}{3} \cdot (x + 2) = 2x - 3$

e) $2 \cdot (x + 3) - 3 \cdot (x + 2) + 4 \cdot (x - 1) = 2 \cdot (x + 1)$

f) $x - 7 \cdot (2x + 1) = 6 \cdot (1 - 2x) - 10$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones con varios denominadores.

a) $\frac{2x + 7}{2} - \frac{x + 4}{3} + \frac{2x - 5}{4} = \frac{12x - 8}{6} + 1$

b) $\frac{x}{18} + \frac{3x - 1}{3} - \frac{2x + 4}{6} = -1 + \frac{x - 1}{2}$

c) $\frac{3 \cdot (x + 2)}{5} - \frac{4x - 1}{10} = \frac{6x + 2}{15} - \frac{x - 5}{6}$

d) $\frac{2x}{5} + \frac{3x - 7}{6} = 1 - \frac{5x + 1}{3} - \frac{3x - 5}{10}$

e) $\frac{1 + 4x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{3x - 2}{12} = \frac{2 - x}{2} - \frac{7}{8}$

f) $5 - \frac{3x + 1}{20} + \frac{x}{2} = \frac{2x + 5}{2} - x$

4 Encuentra las soluciones de estas ecuaciones de segundo grado y dibuja sus gráficas.

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $9x^2 - 18 = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

d) $2x^2 - 8x = 0$

e) $x^2 - 4x - 12 = 0$

f) $x^2 - 13x + 30 = 0$

g) $x^2 - 4 = 0$

h) $x^2 + 8x - 9 = 0$

i) $x^2 + 12x + 11 = 0$

5 Clasifica los siguientes sistemas encontrando su solución numérica y gráfica.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3y = 9x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \frac{2 \cdot (y - 3)}{7} + 1 \\ y = \frac{7x + 5}{2} \end{cases}$

1. En la sala de urgencias de un hospital, Sara se encarga de derivar a los pacientes a la unidad que les corresponde según su patología.

   Esta noche han entrado pacientes de cardiología y de traumatología.

   El número de pacientes de traumatología excede en 20 al de pacientes de cardiología.

   Los pacientes de cardiología son la mitad de los de traumatología menos 1.

   ¿Cuántos pacientes debe derivar Sara a cada unidad?

2. En la unidad de cardiología hay dos doctores de guardia, que se encargan de atender a los pacientes. El doctor Hernando atiende a tres pacientes menos que el doble de los que atiende el doctor Velázquez. ¿A cuántos atiende cada uno?

   Entre los pacientes de cardiología hay varios que necesitan una transfusión.

   Los que tienen la sangre A^+ son el doble de los que tienen sangre B^-, y estos son 3 menos que los que necesitan sangre A^+.

   ¿Cuántos pacientes necesitan cada tipo de sangre?

3. Algunos de los pacientes que acuden a traumatología tienen lesiones en las piernas o en los brazos.

   La suma de los que tienen problemas en los brazos más el doble de los que tienen problemas en las piernas es 27.

   El número de lesionados en las piernas es dos veces el de lesionados en los brazos menos 14.

   ¿Cuántos pacientes hay con cada tipo de lesión?

4. La mitad menos 2 de los lesionados en las piernas, deben permanecer ingresados y el resto de pacientes son dados de alta esa misma noche.

   ¿Cuántos pacientes se quedan en el hospital?